Перетворення виходу лінійної вимірювальної системи з використанням випадкового проектора

Тищук О.В.

Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН і МОН України
avtyshcuk@gmail.com

Анотація

Досліджено метод перетворення виходу лінійної системи з використанням ортонормованого випадкового проектора. Отримано вирази для складових помилки перетворення виходу, проведено експериментальне дослідження.

1. Вступ

В практиці часто зустрічається задача, пов'язана з відновленням сигналів за результатами непрямих вимірювань. Нехай маємо лінійну вимірювальну систему, результат вимірювань якої є вектор, що відповідає деякому вхідному сигналу. Відома матриця лінійного перетворення вхід-вихід, що описує взаємодію вимірюваного сигналу з середовищем і особливості вимірювальних засобів. Стовпці матриці можна розглядати як відліки дискретно заданих базисних функцій лінійної системи. Набір базисних функцій відбиває властивості конкретної вимірювальної системи, тому не може бути довільним. Відповідно, спостережуваний вихід може не відповідати вимогам користувача або бути не сумісним з методами подальшої обробки. У разі, якщо відомий набір базисних функцій, які дали б вихід з необхідними властивостями, можна поставити задачу знаходження перетворення спостережуваного виходу в вихід системи із заданим базисом. Існуючі методи перетворення виходу [1] орієнтовані на випадок, коли матриця лінійного перетворення вихідної системи і коваріаційна матриця шуму – невироджені. Якщо ж матриця вихідної системи має високе число обумовленості і ряд її сингулярних чисел плавно спадає до нуля, одержуване відомими методами рішення є нестійким. Тому метою роботи є розробка та дослідження стійких і обчислювально ефективних методів перетворення виходу лінійної системи в вихід системи із заданим базисом.

У даній роботі розвивається підхід до розробки стійких та обчислювально ефективних методів перетворення виходу лінійної системи з використанням випадкового проектування. Випадкове проектування відноситься до перспективного класу рандомізованих алгоритмів, які широко використовуються для ефективної класифікації образів (наприклад, [2,3,4]), формування розподілених представлень [5, 6], в тому числі, як компонентів складних ієрархічних структур [7-11] Однак, в контексті підвищення стійкості рішень, цей підхід запропоновано недавно в [12, 13, 14].

Наведено нові результати з використання в якості проектора ортонормованої випадкової матриці, проведено розкладання помилки перетворення виходу на стохастичну та детерміновану складові, проведено експериментальне дослідження залежності помилки від розмірності матриці проектора.

2. Задача перетворення виходу

Розглянемо задачу перетворення виходу лінійної системи. Нехай є лінійна система, вектор виходу якої $\mathbf{b}$ формується шляхом лінійного перетворення вхідного вектора (входу) $\mathbf{x}$ та додавання адитивного шуму як $\mathbf{Ax} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}$.

Наприклад, це може бути вимірювальна система, де дискретно заданий сигнал об'єкта вимірювань $\mathbf{x}$ невідомий, $\mathbf{b}$ – спостережуваний вихід ("сигнальний образ" $\mathbf{x}$), матриця $\mathbf{A}$ описує взаємодію сигналу з середовищем та/або особливості вимірювальних засобів (детектора, перетворювача сигналу і т.п.). Стовпці $\mathbf{A}$ можна розглядати як відліки дискретно заданих базисних функцій лінійної системи.

Набір базисних функцій $\mathbf{A}$ відображає властивості конкретної вимірювальної системи, тобто не може бути довільним. Відповідно, спостережуваний вихід $\mathbf{b}$, який визначається базисними функціями $\mathbf{A}$, може не відповідати вимогам користувача, або може бути несумісним з методами наступної обробки. З іншого боку, якщо відомий набір базисних функцій $\mathbf{C}$, які дали б вихід з необхідними властивостями, можна поставити задачу знаходження перетворення спостережуваного виходу $\mathbf{b}$ в вихід системи C з базисом $\mathbf{C}$. Перетворення виходу шукатимемо як лінійне перетворення.

Проілюструємо ситуацію, в якій можливе застосування методу перетворення виходу лінійної системи в вихід системи із заданим базисом, на прикладі гамма-спектрометричних вимірювальних систем. Припустимо, що детектор лінійної вимірювальної системи A має більш низьку розподільчу здатність, ніж детектор системи C. Дискретно задані функції відгуку детектора (базисні функції) формують матриці $\mathbf{A}$ і $\mathbf{C}$ наведені на рис.1-а. Виходи систем A і C: $\mathbf{b}$ і $\mathbf{d}$ наведені на рис.1-б. Використовуючи метод перетворення виходу лінійної системи, вихід системи (що має меншу розподільчу здатність) можна перетворити в вихід системи C (що має більшу розподільчу здатність).

Для випадку, коли вектор шуму відомий і його коваріаційна матриця не вироджена, а також не вироджена матриця базисних функцій $\mathbf{A}$, зважена коваріаційною матрицею шуму, в [1] пропонується отримувати шукане перетворення з використанням обернення $\mathbf{A}$. Однак, якщо $\mathbf{A}$ має високе число обумовленості та ряд її сингулярних чисел плавно спадає до нуля, одержуване з використанням оберненої матриці рішення (результат перетворення в вихід системи C) є нестійким. Нестійкість виявляється в тому, що малим змінам **b** відповідають великі зміни рішення і помилка рішення велика. Матриці базисних функцій із зазначеними властивостями часто зустрічаються на практиці в задачах обробки сигналів в геофізичній розвідці (електророзвідка, магніторозвідка, сейсморозвідка, гравірозвідка), спектрометрії (наприклад, гамма-спектрометрія), медичній діагностиці (візуалізація, томографія) та ін.

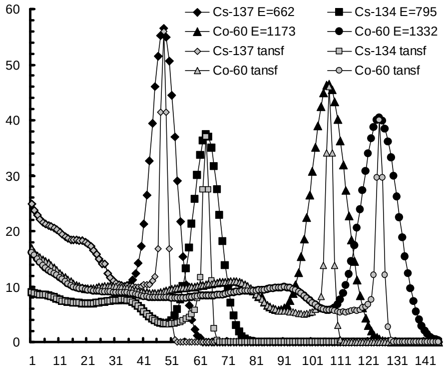

Рис. 1. а) Дискретно задані функції відгуку що формують матриці **A** та **C**

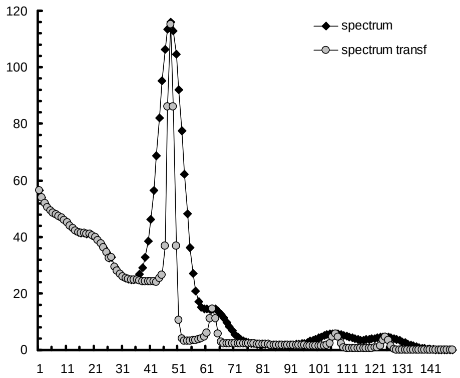

Рис. 1. б) Виходи систем *A* та *C*

Нехай сигнал **b** отриманий з виходу лінійної системи **A**, що виконує перетворення

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}, \qquad (1)$$

де $\mathbf{A} \in \Re^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \Re^{n}$, $\mathbf{b} \in \Re^{m}$, та

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_0. \qquad (2)$$

Позначимо як $\mathbf{d}_0$ вихід лінійної системи *C*, що виконує перетворення

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}_0. \qquad (3)$$

Для отримання рішення – оцінки виходу системи *C* по **b** – спочатку отримаємо оцінку **x'** входу **x**, вирішивши зворотну задачу:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}\,\mathbf{b}, \qquad (4)$$

де **P** – оператор (матриця), що перетворює вихід **b** в **x'**. Потім отримаємо оцінку виходу системи *C*:

$$\mathbf{d}' = \mathbf{C}\,\mathbf{x}' = \mathbf{C}\,\mathbf{P}\,\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{b} \qquad (5)$$

Таким чином, оператор **CP** перетворює **b** в **d'**. Матрицю перетворення **T** = **CP** в [1] називають матрицею редукції.

Конкретний вид **P** залежить від властивостей матриці **A**. Якщо ряд власних чисел **A** спадає монотонно та число обумовленості велике, задачу відносять до класу дискретних некоректних задач. Наближені рішення дискретних некоректних задач як задач найменших квадратів з використанням чисельних методів лінійної алгебри, таких як розкладання LU, Холецкого, QR, є нестійкими. Це означає, що малі збурення у вхідних даних приводять до великих збурень у рішенні. Для отримання стійкого рішення в цих випадках використовують регуляризацію [15].

В даній роботі розглядається підхід до сталого вирішення задачі перетворення виходу, заснований на проектуванні ортонормованою випадковою матрицею.

3. Перетворення вектора виходу з використанням випадкового проектора

Розглянемо підхід до сталого вирішення задачі перетворення виходу з використанням випадкового проектування.

Отримаємо оцінку сигналу входу **x'**, використовуючи підхід до сталого вирішення дискретної некоректної задачі на основі рандомізації, де в якості матриці проектора будемо використовувати матрицю **Ω**. Матрицю **Ω** отримаємо як $\mathbf{G} = \boldsymbol{\Omega\Sigma\Omega}^{T}$, де **Ω** – ортонормована матриця, **Σ** - діагональна. Елементи матриці **G** – реалізації випадкової величини з нормальним розподілом, нульовим середнім і одиничною дисперсією, $k \le N$. Помноживши ліву та праву частини виразу (1) на **Ω**, отримаємо:

$$\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}\mathbf{x} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{b}, \qquad (6)$$

де $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A} \in \Re^{k\times n}$, $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{b} \in \Re^{k}$. Число стовбців *n* визначається розмірністю матриці **A**, число рядків *k* апріорі невідомо. Оцінку сигналу **x** отримаємо за допомогою псевдооберненої матриці $(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A})^{+}$ як:

$$\mathbf{x}' = (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A})^{+}\,\boldsymbol{\Omega}\mathbf{b}. \qquad (7)$$

З урахуванням (7), оцінка виходу **d'** системи *C* виглядає наступним чином:

$$\mathbf{d}' = \mathbf{C}\,\mathbf{x}' = \mathbf{C}\,(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A})^{+}\,\boldsymbol{\Omega}\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{b}, \qquad (8)$$

де $\mathbf{T} = \mathbf{C}\,(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A})^{+}\,\boldsymbol{\Omega}$. Запишемо вираз для вектора помилки перетворення виходу в разі проектування матрицею **Ω**:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}' - \mathbf{d}_0 &= \mathbf{C}\,(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A})^{+}\,\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{C}\,\mathbf{x} = \\ &= \mathbf{C}((\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A})^{+}\,\boldsymbol{\Omega}\mathbf{b}_0 - \mathbf{I})\mathbf{x} + \mathbf{C}\,(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A})^{+}\,\boldsymbol{\Omega\varepsilon}. \end{aligned} \qquad (9)$$

Усереднимо вираз (9) по реалізаціям шуму **ε**. Враховуючи, що $\boldsymbol{\Omega\Omega}^{T} = \mathbf{I}$, $2E<\mathbf{C}((\boldsymbol{\Omega}^{T}\mathbf{A})^{+}\boldsymbol{\Omega}^{T}\mathbf{b}_0 - \mathbf{I})\mathbf{x}, \mathbf{C}(\boldsymbol{\Omega}^{T}\mathbf{A})^{+}\boldsymbol{\Omega}^{T}\boldsymbol{\varepsilon}> = 0$, $E(\mathbf{C}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A})^{+}\boldsymbol{\Omega\varepsilon}) = \sigma^2 \mathrm{trace}(\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega}^{T}\mathbf{A})^{+T}\mathbf{C}^{T}\,\mathbf{C}(\boldsymbol{\Omega}^{T}\mathbf{A})^{+}\boldsymbol{\Omega}^{T})$,

отримаємо наступний вираз для середньоквадратичної помилки перетворення вектора виходу при проектуванні матрицею **Ω**:

$$\begin{aligned} e = E\,\|\,\mathbf{C}\,((\boldsymbol{\Omega}^{T}\mathbf{A})^{+}\,\boldsymbol{\Omega}^{T}\,\mathbf{A} - \mathbf{I})\,\mathbf{x}\,\|^2 &+ \\ + \sigma^2\,\mathrm{trace}((\boldsymbol{\Omega}^{T}\mathbf{A})^{+T}\mathbf{C}^{T}\mathbf{C}(\boldsymbol{\Omega}^{T}\mathbf{A})^{+})&. \end{aligned} \qquad (10)$$

Для помилки перетворення виходу побудуємо залежність норми зміщення, дисперсії та сумарної помилки від розмірності матриці *k*. Для проведення чисельного експерименту сформуємо матриці **A** і **C** так, що стовпчики містять *N* відліків радіальних базисних функцій: $f_n(z)=\exp(-g(z-c)^2)$, $c=dn+b$, (d=5, b=20), z={1,…,100}, n – номер базисної функції. Для вихідної лінійної системи g = 0.05, для системи C значення g=0.3. Компоненти вектора **x** призначимо наступними: x_5=1, x_6=0.5, x_{10}=1, x_{11}=0.26, x_{12}=0.25, інші компоненти вектора **x** – нульові. Вектори $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{d}_0$, отримаємо як **Ax**, **Cx** відповідно. В якості шуму використовуватимемо випадкову величину з гауссовим розподілом і середньоквадратичним відхиленням {5E-4, 5E-6, 5E-8}. Приклад залежностей наведено на рис.2.

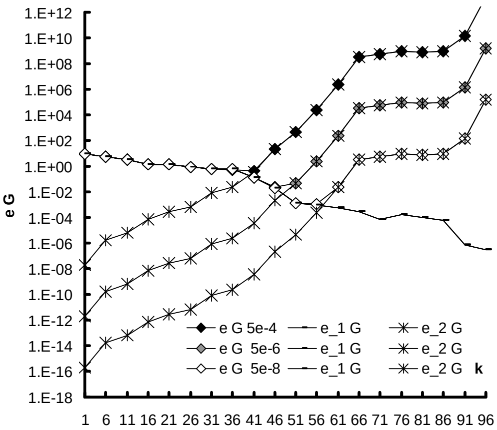

Рис. 2. Залежність помилки *e* від розмірності *k* для методу з використанням проектора **Ω**.

Для перетворення виходу з використанням проекційної матриці **Ω** залежність *e* від *k* має мінімум при *k*<*N*. З ростом рівня шуму положення мінімуму зміщується в область менших значень *k*, а помилка в точці мінімуму зростає. Оптимальним числом рядків *k* проекційної матриці слід вважати таке, при якому мінімальна середньоквадратична помилка перетворення виходу.

4. Висновки

Проведено дослідження методу перетворення виходу лінійної системи в вихід системи із заданим базисом з використанням ортонормованого випадкового проектора.

Для підходу до сталого вирішення задачі перетворення виходу отримано вирази для складових помилки перетворення виходу, проведено експериментальне дослідження поведінки залежності помилки рішення і її складових від розмірності матриці проектора. Перетворення виходу з використанням проекційної матриці забезпечує досить точне і стійке перетворення виходу лінійної системи в вихід системи із заданим базисом для випадку, коли матриця **A** базисних функцій вихідної лінійної системи має високе число обумовленості і ряд її сингулярних чисел плавно спадає до нуля.

5. Література

[1] Пытьев Ю.П., “Математические методы интерпретации эксперимента”, М: Высшая школа, 1989, 351 с.

[2] Kussul E.M., Kasatkina L.M., Rachkovskij D.A., Wunsch D.C., “Application of Random Threshold Neural Networks for Diagnostics of Micro Machine Tool Condition”, IJCNN'98., 1998, V. 1, p. 241-244.

[3] Kussul E.M., Baidyk T.N., Lukovich V.V., Rachkovskij D.A., “Adaptive High Performance Classifier Based on Random Threshold Neurons” Twelfth European Meeting on Cybernetics and Systems Research (EMCSR-94), 1994, V. 2, p. 1687-1695.

[4] Kussul E.M., Baidyk T.N., Lukovich V.V., Rachkovskij D.A., “Adaptive neural network classifier with multifloat input coding”, 6-th Intern. Conf. "Neural Networks and their Industrial and Cognitive Applications", Neuro-Nimes'93., 1993, p. 25-29.

[5] Kussul E.M., Rachkovskij D.A., Wunsch D.C., “The Random Subspace Coarse Coding Scheme for Real-Valued Vectors” IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN'99), 1999, V. 1, p.450-455.

[6] Rachkovskij D.A., “Vector data transformation with random binary matrices”, Cybernetics and Systems Analysis, 2014, p. 50.

[7] Rachkovskij D.A., Kussul E.M., Baidyk T.N., “Building a world model with structure-sensitive sparse binary distributed representations”, Biologically Inspired Cognitive Architectures, Vol 3, 2013, p.64-86.

[8] Gritsenko V.I., Rachkovskij D.A., Goltsev A.D., Lukovych V.V., Misuno I.S., Revunova E.G., Slipchenko S.V., Sokolov A.M., “Neural distributed representation for intelligent information technologies and modeling of thinking”, Cybernetics and computer engineering, 2013, 173, p. 7-24. (in Russian).

[9] Rachkovskij D.A., “Some approaches to analogical mapping with structure-sensitive distributed representations” Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence 16 (3), 2004, p. 125-144.

[10] Rachkovskij D.A., “Representation and processing of structures with binary sparse distributed codes”, IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2001, 13, N 2., p. 261-276.

[11] Kussul E.M., Rachkovskij D.A., «Multilevel assembly neural architecture and processing of sequences», In A.V. Holden & V. I. Kryukov (Eds.), Neurocomputers and Attention: Vol. II. Manchester and New York: Manchester University Press, 1991, p. 577-590.

[12] Rachkovskij D.A., Revunova E.G., “Randomized method for solving discrete ill-posed problems”, Cybernetics and Systems Analysis, 2012, 48, N 4, p. 621-635.

[13] Revunova E.G., “Using randomized algorithms for solving discrete ill-posed problems”, International Journal "Information Theories and Applications", 2009, N 2., p. 176-192.

[14] Ревунова Е.Г., Тищук А.В., “Устойчивое преобразование выхода линейной системы в выход системы с заданным базисом на основе случайных проекций”, XVI Международная конференция по нейрокибернетике (ICNC-12), 2012, vol.2., p. 180-183.

[15] Hansen P.C., “Rank-deficient and discrete ill-posed problems”, Numerical Aspects of Linear Inversion, SIAM, Philadelphia, 1998, p. 247.