Підхід рандомізації в задачах відновлення сигналів за результатами непрямих вимірювань

Ревунова О.Г.

Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем
НАН і МОН України
helab@i.com.ua

Анотація

Проведено аналітичне дослідження складових помилки відновлення істинного сигналу для рандомізованого методу розв'язання дискретної некоректної задачі. Отримано апроксимацію помилки відновлення сигналу виходу та запропоновано критерій вибору оптимальної розмірності випадкової матриці.

1. Вступ

Задача відновлення істинного сигналу об'єкта за результатами непрямих дистанційних вимірювань часто виникає в технічних системах. Сигнал об'єкта зазнає спотворення при взаємодії з середовищем поширення та системою детектування. Результати непрямих вимірювань об'єктів зовнішнього середовища формують сигнальний образ об'єкта спостереження, за яким необхідно відновити справжній сигнал. Така необхідність існує в практиці обробки сигналів в різних областях – геофізична розвідка, спектрометрія, виявлення присутності окремих хімічних елементів в об'єктах, медична діагностика (візуалізація, томографія), неруйнівний контроль, дистанційний моніторинг.

При відновленні сигналів об'єкта спостереження за результатами непрямих дистанційних вимірювань, виникає необхідність розв'язання зворотної задачі. При цьому матриця, що характеризує взаємодію сигналу з середовищем, має велике число обумовленості, ряд її сингулярних значень плавно спадає до нуля, а вектор правої частини рівняння, як правило, спотворений адитивним шумом. За таких умов це є дискретна некоректна зворотна задача. Відомо, що її рішення, як задачі найменших квадратів на основі псевдообернення матриці, є нестійким. Для подолання нестійкості та підвищення точності рішення дискретних некоректних задач були запропоновані методи регуляризації [1, 2]. Регуляризація накладає на шукане рішення обмеження, що забезпечують стійкість. Недоліками методів вирішення дискретних некоректних задач на основі регуляризації Тихонова є висока обчислювальна складність і труднощі вибору належного параметра регуляризації, що впливає на стійкість рішення. Це визначає мету роботи – розвиток альтернативних підходів до вирішення дискретних некоректних задач, які повинні забезпечувати точність, порівнянну з точністю регуляризації Тихонова, але при низьких обчислювальних витратах.

2. Лінійні задачі найменших квадратів та дискретні некоректні задачі

Розглянемо лінійні задачі найменших квадратів та виділимо клас задач – дискретні некоректні задачі. Багато застосувань математики, фізики та аналізу даних вимагають знаходження наближеного рішення системи лінійних рівнянь:

$$\mathbf{Ax}\approx\mathbf{y}, \qquad (1)$$

де матриця $\mathbf{A}\in\Re^{N\times N}$ та вектор $\mathbf{y}\in\Re^{N}$, спотворений адитивним шумом $\boldsymbol{\varepsilon}\in\Re^{N}$ ($\mathbf{y}=\mathbf{y}_0+\boldsymbol{\varepsilon}$), відомі й потрібно оцінити вектор сигналу $\mathbf{x}\in\Re^{N}$.

Якщо матриця **A** має повний ранг і добре обумовлена, оцінку $\mathbf{x}'$ для методу найменших квадратів можна отримати шляхом вирішення системи нормальних рівнянь [2], наприклад, за допомогою розкладання Холецкого. У разі, коли матриця **A** має неповний ранг чи погано обумовлена, для отримання оцінки $\mathbf{x}'$ може використовуватися рішення на основі QR-розкладання. У разі, коли матриця **A** дуже погано обумовлена, для одержання стійкої оцінки $\mathbf{x}'$ використовують розкладання по сингулярним значенням (SVD). Ідея отримання стійкої оцінки $\mathbf{x}'$ на основі сингулярного розкладання полягає в наступному: якщо в спектрі сингулярних значень є різкий перепад, а сингулярні значення після нього дуже малі, вони можуть розглядатися як шумові та усуваються застосуванням порога.

У разі, коли **y** містить шум, ряд сингулярних чисел σ_i матриці **A** плавно спадає до нуля, **A** має високе число обумовленості $\sigma_{\max}/\sigma_{\min}$, задачу оцінки **x** називають дискретною некоректною зворотною задачею [1]. Прийом «усічення» сингулярного розкладання не працює в дискретних некоректних задачах, оскільки, як зазначалося вище, тут немає розривів в ряду сингулярних значень і чисельний ранг не визначений.

Для подолання нестійкості та, відповідно, підвищення точності рішення використовують регуляризацію. Недоліками, властивими методам вирішення дискретних некоректних обернених задач на основі регуляризації Тихонова, є висока обчислювальна складність і складність підбору правильного параметра регуляризації, від якого значною мірою залежить стійкість рішення. Тому затребуваними є альтернативні підходи до вирішення дискретної некоректної оберненої задачі з точністю на рівні регуляризації Тихонова, але з меншою обчислювальною складністю.

Нами розробляється підхід [3-5] до вирішення дискретної некоректної зворотної задачі, що використовує ідею випадкових проекцій [6-8]. Випадкові проекції –

різновид рандомізованих методів розв'язання різного роду задач, які включають, наприклад, формування розподілених представлень [9-12], рішення задачі класифікації [13-15], та ін.

3. Відновлення сигналу з використанням випадкового проектора

Для вирішення на основі проекційного підходу обидві частини вихідного рівняння (1) помножимо на матрицю $\mathbf{R}_k \in \Re^{k\times N}$, та отримаємо рівняння:

$$\mathbf{F}_k\mathbf{x} = \mathbf{b}_k, \text{ где } \mathbf{F}_k = \mathbf{R}_k\mathbf{A},\ \mathbf{F}_k \in \Re^{k\times N},\ \mathbf{b}_k = \mathbf{R}_k\,\mathbf{y},\ \mathbf{b}_k \in \Re^{k}. \qquad (2)$$

Задамо матрицю $\mathbf{G} \in \Re^{N\times N}$, елементи якої – реалізації випадкової величини з нормальним розподілом, нульовим середнім і одиничною дисперсією. Матрицю $\mathbf{R}$ отримаємо як результат власного розкладання $\mathbf{G}=\mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$, де $\mathbf{R} \in \Re^{N\times N}$ – ортонормована матриця, $\boldsymbol{\Sigma}$ – діагональна. Матрицю $\mathbf{R}_k$ отримаємо відбором k рядків матриці $\mathbf{R}$.

Оцінку сигналу $\mathbf{x}$ на основі псевдообернення отримаємо як:

$$\mathbf{x}'_{\mathrm{k}} = \mathbf{F}_{\mathrm{k}}^{+}\mathbf{b}_{\mathrm{k}}. \qquad (3)$$

Запишемо вираз для середньоквадратичної помилки відновлення істинного сигналу при проектуванні випадковою матрицею $\mathbf{R}_k$:

$$\begin{aligned} e_k = &\mathrm{E}\,\|(\mathbf{F}_k^{+}\mathbf{F}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 + \mathrm{E}\,\|\mathbf{F}_k^{+}\mathbf{R}_k\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + \\ &+ 2\,\mathrm{E}\,\langle(\mathbf{F}_k^{+}\mathbf{F}_k - \mathbf{I})\mathbf{x},\ \mathbf{F}_k^{+}\mathbf{R}_k\boldsymbol{\varepsilon}\rangle. \end{aligned} \qquad (4)$$

Враховуючи, що $2\,\mathrm{E}\,\langle(\mathbf{F}_k^{+}\mathbf{F}_k - \mathbf{I})\mathbf{x},\ \mathbf{F}_k^{+}\mathbf{R}_k\boldsymbol{\varepsilon}\rangle = 0$, та $\mathrm{E}\,\|\mathbf{F}_k^{+}\mathbf{R}_k\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \sigma^2\,\mathrm{trace}\,(\mathbf{R}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_k^{+\mathrm{T}}\mathbf{F}_k^{+}\mathbf{R}_k)$, маємо

$$e_k = \|(\mathbf{F}_k^{+}\mathbf{F}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 + \sigma^2\,\mathrm{trace}\,(\mathbf{R}_k\mathbf{R}_k^{\mathrm{T}}\,\mathbf{F}_k^{+\mathrm{T}}\mathbf{F}_k^{+}). \qquad (5)$$

Розглянемо залежність величини стохастичної складової помилки рішення дискретної некоректної задачі від числа рядків матриці проектора $\mathbf{R}_k$. З урахуванням того, що $\mathbf{R}_k\mathbf{R}_k^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$, стохастична складова помилки є:

$$e_{1k} = \mathrm{E}\,\|\mathbf{F}_k^{+}\mathbf{R}_k\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \sigma^2\,\mathrm{trace}\,(\mathbf{F}_k^{+\mathrm{T}}\mathbf{F}_k^{+}). \qquad (6)$$

Для дослідження залежності стохастичної складової помилки від k, запишемо вираз для e_{1k} в рекурсивному вигляді. Скориставшись представленням збурення псевдооберненої матриці ($\mathbf{F}_k^{+}$) через збурення вихідної матриці ($\mathbf{F}_k=\mathbf{F}_{k-1}+\mathbf{E}_k$), запропонованим в [16], ми отримали рекурсивний вираз для $\mathbf{F}_k^{+\mathrm{T}}\mathbf{F}_k^{+}$ наступного вигляду:

$$\mathbf{F}_k^{+\mathrm{T}}\mathbf{F}_k^{+} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_k & \mathbf{c}_k \\ \mathbf{c}_k^{\mathrm{T}} & d_k \end{bmatrix},\ \mathbf{B}_k = \mathbf{F}_{k-1}^{+\mathrm{T}}\mathbf{F}_{k-1}^{+} + \mathbf{M}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_k, \qquad (7)$$

де $\mathbf{M}_k = \mathbf{F}_k^{+}\mathbf{P}_k\mathbf{E}_k\mathbf{Z}_k\mathbf{F}_{k-1}^{+}$, $\mathbf{P}_k = \mathbf{F}_k\mathbf{F}_k^{+}$, $\mathbf{Z}_k = \mathbf{F}_{k-1}^{+}\mathbf{F}_{k-1}$.

Відповідно:

$$e_{1k} = \sigma^2 trace\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k-1}^{+\mathrm{T}}\mathbf{F}_{k-1}^{+} + \mathbf{M}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_k & \mathbf{c}_k \\ \mathbf{c}_k^{\mathrm{T}} & d_k \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

де $d_k = \mathbf{t}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{t}_k$, $\mathbf{t}_k = \mathbf{F}_k^{+}\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}^{\perp}$.

Відзначимо, що матриця $\mathbf{B}_k$ має додатні елементи на діагоналі, так як діагоналі $\mathbf{F}_{k-1}^{+\mathrm{T}}\mathbf{F}_{k-1}^{+}$ та $\mathbf{M}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_k$ – додатні. Елемент d_k – додатний. З виразу (7) випливає, що матриця $\mathbf{F}_k^{+\mathrm{T}}\mathbf{F}_k^{+}$ має додатну діагональ та підматрицю $\mathbf{B}_k$, що рекурсивно змінюється. Отже, значення стохастичної складової помилки зростає з ростом k.

Розглянемо залежність величини детермінованої складової помилки рішення дискретної некоректної задачі від числа рядків матриці проектора. Вираз для детермінованої складової помилки має наступний вигляд:

$$e_{2k} = \left\|(\mathbf{F}_k^{+}\mathbf{F}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\right\|^2 = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_k^{+}\mathbf{F}_k\mathbf{x}. \qquad (9)$$

З метою дослідження залежності детермінованої складової помилки від k, запишемо вираз для e_2 в рекурсивному вигляді:

$$\begin{aligned} e_{2k} &= \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_{k-1}^{+}\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_k\mathbf{x}) = \\ &= \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_{k-1}^{+}\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_k^{1/2\mathrm{T}}\mathbf{N}_k^{1/2}\mathbf{x}), \end{aligned} \qquad (10)$$

де $\mathbf{N}_k$ – квадратна матриця, симетрична щодо діагоналі:

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{F}_k^{+}\mathbf{E}_k\mathbf{Z}_{\mathrm{F}k-1}^{\perp}. \qquad (11)$$

Оскільки $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_k^{1/2\mathrm{T}}\mathbf{N}_k^{1/2}\mathbf{x} > 0$, значення $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_k^{+}\mathbf{F}_k\mathbf{x}$ зростає із зростанням k, а значення детермінованої складової помилки – спадає.

Для помилки відновлення істинного сигналу, отриманої з використанням проекційної матриці $\mathbf{R}_k$, можна побудувати залежність норми сумарної помилки, детермінованої та стохастичної складових від розмірності матриці. Приклад цих залежностей для дискретної некоректної задачі Phillips [1] при рівнях шуму 1E-2, 1E-3, 1E-4 приведений на рис.1.

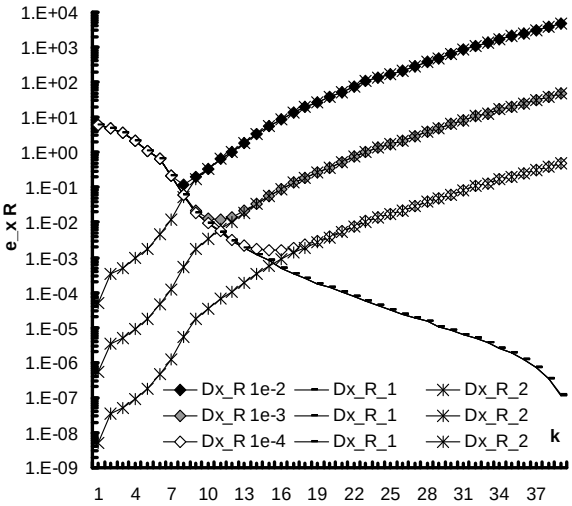

Рис. 1. Залежність помилки рішення e, її детермінованої та стохастичної складових від розмірності випадкової проекційної матриці k

При зростанні k норма детермінованої складової зменшується, а норма стохастичної зростає так, що сумарна норма помилки має мінімум. Такий характер поведінки помилки мав місце для всіх досліджених нами некоректних обернених задач при рівні шуму вище деякого мінімального [3]. Таким чином, для отримання рішення з мінімальною помилкою необхідно використовувати проекційну матрицю з розмірністю k, близькою до оптимальної.

Однак визначення оптимального значення за графіками залежності помилки відновлення істинного сигналу від k представляє тільки теоретичний інтерес, так як вираз включає вектор істинного рішення, який при вирішенні практичних задач невідомий. Щоб вибрати розмірність проекційної матриці, при якій помилка рішення близька до мінімальної в реальних умовах, тобто

коли точне рішення невідомо, в наступному розділі ми пропонуємо критерій вибору. Розмірність проекційної матриці вибирається такою, при якій значення критерію мінімально.

4. Підхід до визначення оптимальної розмірності матриці проектора

Оптимальною розмірністю матриці проектора ми називаємо таку розмірність ($k \times N$) при якій помилка відновлення істинного сигналу мінімальна. Оскільки в реальних умовах помилку відновлення істинного сигналу обчислити неможливо (через відсутність даних про справжній сигналі), ми пропонуємо для визначення оптимальної розмірності матриці проектора використати помилку відновлення вектора виходу. Розглянемо помилку відновлення вектора виходу:

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{y}' - \mathbf{y}_0 = (\mathbf{AF}^+\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{y}_0 + \mathbf{AF}^+\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (12)$$

Вираз для середньоквадратичної помилки відновлення виходу виглядає наступним чином:

$$e_y = \left\|(\mathbf{AF}^+\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\right\|^2 + \sigma^2 trace((\mathbf{AF}^+\mathbf{R})^{\mathrm{T}}\mathbf{AF}^+\mathbf{R}). \qquad (13)$$

Замінимо в (13) невідомий вектор $\mathbf{y}_0$ на відомий вектор $\mathbf{y}$ (отриманий, наприклад, в результаті вимірювань) та проведемо усереднення по реалізаціям шуму:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{e_y'\} &= \left\|(\mathbf{AF}^+\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\right\|^2 + \sigma^2 trace((\mathbf{AF}^+\mathbf{R})^{\mathrm{T}}\mathbf{AF}^+\mathbf{R}) + \\ &+ \sigma^2 trace((\mathbf{AF}^+\mathbf{R} - \mathbf{I})^{\mathrm{T}}(\mathbf{AF}^+\mathbf{R} - \mathbf{I})). \end{aligned} \qquad (14)$$

Зіставивши вираз для $\mathrm{E}\{e'_y\}$ та вираз для середньоквадратичної помилки відновлення виходу (13), скоригуємо вклад шуму та отримаємо апроксимацію середньоквадратичної помилки відновлення виходу, що не містить невідомого вектора $\mathbf{y}_0$:

$$\begin{aligned} CR &= \mathrm{E}\left\|(\mathbf{AF}^+\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{y}\right\|^2 + \sigma^2 trace((\mathbf{AF}^+\mathbf{R})^{\mathrm{T}}\mathbf{AF}^+\mathbf{R}) - \\ &- \sigma^2 trace((\mathbf{AF}^+\mathbf{R} - \mathbf{I})^{\mathrm{T}}(\mathbf{AF}^+\mathbf{R} - \mathbf{I})). \end{aligned} \qquad (15)$$

Замість невідомого вектора $\mathbf{y}_0$, в (15) входить відомий вектор, тому CR може використовуватися для визначення оптимальної розмірності матриці проектора.

5. Висновки

Для рандомізованого методу розв'язання дискретної некоректної задачі наведені результати аналітичного дослідження складових помилки відновлення істинного сигналу. Показано, що з ростом числа рядків матриці проектора детермінована складова помилки спадає, а стохастична зростає.

Запропоновано критерій вибору оптимальної розмірності випадкового проектора, заснований на апроксимації помилки відновлення сигналу виходу.

6. Література

[1] Hansen, P.C., *Rank-deficient and discrete ill-posed problems: Numerical Aspects of Linear Inversion*, SIAM, Philadelphia, .247 p., 1998.

[2] Tikhonov, A.N., Arsenin. V.Y., *Solution of ill-posed problems*, Winston, Washington, DC, 1977.

[3] Ревунова, Е.Г., "Исследование составляющих ошибки для решения обратной задачи с использованием случайных проекций", *Математические машины и системы*, N 4: 33-42, 2010.

[4] Revunova, E.G., Rachkovskij, D.A., "Using randomized algorithms for solving discrete ill-posed problems", *Information Theories and Applications (IJITA)*, 16(2): 176-192, 2009.

[5] Rachkovskij, D.A., Revunova, E.G., "Randomized method for solving discrete ill-posed problems", *Cybernetics and Systems Analysis*, 48(4): 621-635, 2012.

[6] Ревунова, Е.Г., Тищук, А.В., "Устойчивое преобразование выхода линейной системы в выход системы с заданным базисом на основе случайных проекций", *XVI Международная конференция по нейрокибернетике (ICNC-12)*, 2:180-183, 2012.

[7] Гриценко, В.И., Рачковский, Д.А., Гольцев, А.Д., Лукович, В.В., Мисуно, И.С., Ревунова, Е.Г., Слипченко, С.В., Соколов, А.М., "Нейросетевые распределенные представления для интеллектуальных информационных технологий и моделирования мышления", *Кибернетика и вычислительная техника*, 173: 7-24, 2013.

[8] Rachkovskij, D.A., "Vector data transformation with random binary matrices", *Cybernetics and Systems Analysis*, 50(6), 2014.

[9] Amosov, N. M., Baidyk, T. N., Goltsev, A. D., Kasatkin, A. M., Kasatkina, L. M., Kussul, E. M., Rachkovskij, D. A., *Neurocomputers and intelligent robots*, Kiev: Naukova dumka, 269 p., 1991.

[10] Rachkovskij, D.A., "Some approaches to analogical mapping with structure-sensitive distributed representations", *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence*, 16 (3):125-144, 2004.

[11] Rachkovskij, D.A., Kussul, E.M., Baidyk, T.N., "Building a world model with structure-sensitive sparse binary distributed representations", *Biologically Inspired Cognitive Architectures, Vol 3, 2013, p. 64-86.*

[12] Rachkovskij, D.A., "Representation and processing of structures with binary sparse distributed codes", *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 13(2):261-276, 2001.

[13] Kussul, E.M., Baidyk, T.N., Lukovich, V.V., Rachkovskij D.A. "Adaptive high performance classifier based on random threshold neurons", *Twelfth European Meeting on Cybernetics and Systems Research (EMCSR-94), Vol. 2, 1994, 1687-1695.*

[14] Kussul, E.M., Baidyk, T.N., Lukovich, V.V., Rachkovskij, D.A., "Adaptive neural network classifier with multifloat input coding", *6-th Intern. Conf. "Neural Networks and their Industrial and Cognitive Applications", Neuro-Nimes'93*, 1993, p. 25-29.

[15] Kussul, E.M., Rachkovskij, D.A., Wunsch, D.C., "The random subspace coarse coding scheme for real-valued vectors", *IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN'99), Vol. 1, 1999, p. 450-455*.

[16] Stewart, G.W., "On the perturbation of pseudo-inverses, projections and linear least squares problems", *SIAM Review*, 19(4): 634-662, 1977.