# ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОЦІНОК ВЗАЄМОСПЕКТРАЛЬНИХ КОМПОНЕНТІВ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

*Юзефович Р.М.*[1], *Яворський І.М.*[1,2], *Мацько І.Й.*[1], *Шевчик В.Б.*[1]

[1] Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів
вул. Наукова 5, м. Львів, 79060
Тел.: +38 096 3 733 744, факс: +38 032 263 33 55
Ел. пошта: abzac@ipm.lviv.ua, iavor@ipm.lviv.ua, ivanmatsko@ipm.lviv.ua

[2] Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща
Алея проф. С. Каліського, 7, Бидгощ, Польща, 85796
Тел.: +48 523 408 378, факс: +48 523 408 808
Ел. пошта: abzac@o2.pl, javor@atr.bydgoszcz.pl

Анотація

Проаналізовані властивості оцінок взаємоспектральних компонентів, що знаходяться на основі перетворень Фур'є згладжених оцінок взаємокореляційних компонентів. Виведено формули для зміщення та дисперсії оцінок, що описують залежність цих величин від довжини відрізка реалізації, точки усічення корелограми, форми згладжувального вікна та спектральних характеристик сигналу.

*Ключові слова*: періодично нестаціонарні випадкові сигнали, взаємокореляційна функція, взаємоспектральна густина, дисперсія, зміщення оцінки.

# THE INVESTIGATION OF PROPERTIES OF CROSS-SPECTRAL COMPONENTS ESTIMATORS FOR PERIODICALLY NON-STATIONARY RANDOM SIGNALS

*Yuzefovych R.M.*[1], *Javorskyj I.M.*[1, 2], *Matsko I.Y.*[1], *Shevchyk V.B.*[1]

[1] Karpenko Physico-mechanical institute NAS Ukraine, Lviv
Naukova str., 5, Lviv, 79060
Tel.: +38 096 3 733 744, fax: +38 032 263 33 55
E-mail: abzac@ipm.lviv.ua, iavor@ipm.lviv.ua, ivanmatsko@ipm.lviv.ua

[2] Telecommunication Institute of University of Technology and Life Science, Poland
Al. Prof. S.Kaliskiego, 7, Bydgoszcz, Poland, 85796
Tel.: +48 523 408 378, fax: +48 523 408 808
E-mail: abzac@o2.pl, javor@atr.bydgoszcz.pl

Abstract

The properties of cross-spectral components estimators, based on Fourier transformation of smoothed estimators of cross-correlation components, are analyzed. The formulae for estimator bias and variance, which describe dependence of these values on realization length, point of correlogram cutoff, smoothing window form and signal spectral characteristics, are derived.

*Keywords*: periodically non-stationary random signals, cross-correlation function, cross-spectral density, variance, estimator bias.

## ВСТУП

Корельованість гармонічних складових випадкових сигналів є ознакою їх нестаціонарності. У випадку періодично нестаціонарних випадкових сигналів (ПНВС) між собою корелюють гармоніки, віддалені одна від одної на частоти, які є кратними до величини $2\pi/T$, де $T$ – період нестаціонарності [1, 2]. Оскільки поява дефектів обертових вузлів механічних систем приводить до періодичної нестаціонарності вібраційних сигналів, то пошук корельованості гармонічних складових може бути покладений в основу виявлення дефектів [1, 3–5]. Для характеристики такої корельованості використовуються спектральні компоненти, які є коефіцієнтами Фур'є змінної спектральної густини та одночасно перетвореннями Фур'є кореляційних компонентів. Для розширення можливостей вібродіагностики доцільно проводити взаємоспектральний аналіз вібраційних сигналів, відібраних в різних точках механічної системи. Це дає змогу досліджувати просторові властивості сигналів і тим самим ефективніше розв'язувати задачі локалізації дефектів [6, 7].

## ЗМІЩЕННЯ ОЦІНОК ВЗАЄМОСПЕКТРАЛЬНИХ КОМПОНЕНТІВ

Для оцінювання взаємних спектральних характеристик на основі експериментальних даних може бути використано як періодограмний метод А. Шустера, так і корелограмний метод Блекмана-Т'юкі, коли оцінки спектральних характеристик знаходяться за допомогою перетворення Фур'є згладжених оцінок кореляційних характеристик. Оскільки періодограмний метод є окремим випадком методу Блекмана-Т'юкі, то для оцінювання взаємних спектральних компонентів використаємо тільки останній.

Оцінки взаємоспектральних компонентів можуть бути отримані як на основі оцінок змінної спектральної густини

$$\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t, \qquad (1)$$

так і оцінок кореляційних компонентів

$$\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k(u)\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)e^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u. \qquad (2)$$

Приймаючи до уваги, що [1]

$$\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k(u)\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)e^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u,$$

отримуємо

$$\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k(u)e^{-\mathrm{i}\omega u}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \hat{b}_{\xi\eta}(t,u)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k(u)\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)e^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u.$$

Таким чином, статистики (1) і (2) співпадають, тому розглянемо тільки одну з них, а саме розглянемо аналіз властивостей оцінки (2).

Приймемо, що

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{b}_{\xi\eta}(t,u)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t,$$

де оцінка $\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)$ визначається формулою

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t,u) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)\eta(t+u+nT) -$$

$$-\hat{m}_\xi(t)\hat{m}_\eta(t+nT).$$

при цьому

$$\hat{m}_\xi(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT),$$

$$\hat{m}_\eta(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\eta(t+nT).$$

Приймаючи до уваги співвідношення

$$E\hat{b}_{\xi\eta}(t,u) = b_{\xi\eta}(t,u) - \frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)b_{\xi\eta}(t,u+nT),$$

отримуємо

$$E\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k(u)\Bigg[\quad B_k^{(\xi\eta)}(u) - .$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)B_k^{(\xi\eta)}(t,u+nT)\Bigg]e^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u.$$

Підставимо до цього виразу подання

$$k(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_1)e^{\mathrm{i}\omega_1 u}\mathrm{d}\omega_1, \qquad (3)$$

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi\eta)}(\omega_2)e^{\mathrm{i}\omega_2 u}\mathrm{d}\omega_2. \qquad (4)$$

Тоді

$$E\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega-\omega_1)f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1)\left[1-g(\omega_1,N)\right]\mathrm{d}\omega_1,$$

де

$$g(\omega,N) = \frac{\sin^2\frac{\omega}{2}NT}{N^2\sin^2\frac{\omega}{2}T}.$$

Флуктуаційні складові цих виразів прямують до нуля при $N\to\infty$ і ця збіжність покращується зі збільшенням ширини спектрального вікна $\lambda(\omega)$. Для регулярної складової, припускаючи, що спектральні компоненти є досить гладкими функціями частоти, і використовуючи розклад їх в ряд Тейлора в околі точки $\omega$

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1) = f_k^{(\xi\eta)}(\omega) -$$

$$-\left[f_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]^{/}\omega_1 + \left[f_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]^{//}\frac{\omega_1^2}{2} - \ldots$$

в другому наближенні маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1)\lambda(\omega-\omega_1)\mathrm{d}\omega_1=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_1)\, f_k^{(\xi\eta)}(\omega-\omega_1)\mathrm{d}\omega_1\approx$$

$$\approx f_k^{(\xi\eta)}(\omega)+\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_1^2\lambda(\omega_1)\mathrm{d}\omega_1\right]\left[f_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]^{//}.$$

Ідентичність цієї формули і аналогічного виразу для регулярної складової зміщення оцінки спектральної густини стаціонарного випадкового сигналу дає можливість перенести на даний випадок всі ті висновки, які випливають з нього: а) менші зміщення мають оцінки більш гладких компонентів; б) оцінки мають занижені значення в області максимумів і завищені в області мінімумів; в) зміщення оцінок зменшуються при зменшенні ширини спектрального вікна.

## ДИСПЕРСІЯ ОЦІНОК

Проведемо тепер аналіз дисперсії згладжених оцінок

$$D\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-u_m}^{u_m}\int_{-u_m}^{u_m}R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1,u_2)k(u_1)k(u_2)e^{\mathrm{i}\omega(u_2-u_1)}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ ,$$

$$R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1,u_2)=E\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u_1)\overline{\hat{B}}_k^{(\xi\eta)}(u_2)-E\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u_1)E\overline{\hat{B}}_k^{(\xi\eta)}(u_2).$$

Тут $R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1,u_2)$ – кореляційна функція оцінок кореляційних компонентів, які в першому наближені можна представити у вигляді

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\mathring{\xi}(t)\mathring{\eta}(t+u)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t\ .$$

Тоді

$$R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1,u_2)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta}b_\zeta(t,s-t,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}k\omega_0(s-t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\ ,$$

де

$$b_\zeta(t,s-t,u_1,u_2)=b_\xi(t,s-t)b_\eta(t+u_1,s-t+u_2-u_1)+$$
$$+b_{\xi\eta}(t,s-t+u_2)b_{\xi\eta}(s,t-s+u_1)\ .$$

Подавши функцію $b_\zeta(t,s-t,u_1,u_2)$ у вигляді ряду Фур'є $b_\zeta(t,s-t,u_1,u_2)=\sum_{l\in \text{ÿ}}\tilde{B}_l^{(\xi\eta)}(s-t,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}l\omega_0 t}$ ,

маємо

$$R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1,u_2)=\frac{\sum_{l\in \text{ÿ}}\left[\begin{array}{l}\int_{-\theta}^{0}\tilde{B}_l(u,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}k\omega_0 u}f_l(-u,\theta)\mathrm{d}u+\\+\int_0^{\theta}\tilde{B}_l(u,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}\mathrm{i}k\omega_0 u}f_l(0,\theta-u)\mathrm{d}u\end{array}\right]}{\theta^2},$$

при цьому

$$f_l(u,\theta)=\frac{1}{\theta}\int_u^{\theta}e^{\mathrm{i}l\omega_0 u}\mathrm{d}u\ .$$

Нехтуючи складовими, що містять функцію $f_l(u,\theta),\ l\neq 0$, як величинами вищого порядку малості, приходимо до виразу

$$R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1,u_2)=\frac{1}{\theta}\int_{-\theta}^{\theta}\left(1-\frac{|u|}{\theta}\right)\tilde{B}_0^{(\xi\eta)}(u,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}k\omega_0}\mathrm{d}u\ ,$$

а звідси

$$D\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]=\frac{1}{4\pi^2\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(u_1)k(u_2)\times$$

$$\times\left[\int_{-\theta}^{\theta}\left(1-\frac{|u_1|}{\theta}\right)\tilde{B}_0(u,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}k\omega_0 u}\mathrm{d}u\right]e^{\mathrm{i}k\omega_0(u_2-u_1)}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ .$$

Оскільки

$$\tilde{B}_0(u,u_1,u_2)=\sum_{l\in \text{ÿ}}e^{-\mathrm{i}l\omega_0 u_1}\left[\begin{array}{l}B_l^{(\xi)}(u)\overline{B}_l^{(\eta)}(u+u_2-u_1)+\\+B_l^{(\xi\eta)}(u+u_2)\overline{B}_l^{(\eta\xi)}(u-u_1)\end{array}\right],$$

то

$$D\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]=\frac{1}{\theta}\sum_{l\in \text{ÿ}}\int_{-\theta}^{\theta}\left(1-\frac{|u|}{\theta}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(u_1)k(u_2)\left[B_l^{(\xi\eta)}(u)B_{-l}^{(\xi\eta)}(u+u_2-u_1)+\right.\right.$$

$$\left.+B_l^{(\eta\xi)}(u+u_2)B_{-l}^{(\eta\xi)}(u-u_1)\right]\times$$

$$\left.\times e^{-\mathrm{i}l\omega_0 u_1}e^{-\mathrm{i}\omega(u_2-u_1)}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\right]e^{\mathrm{i}k\omega_0 u}\mathrm{d}u\ .$$

Прийнявши до уваги (3) і (4), а також подання

$$B_k^{(\xi)}(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f_k^{(\xi)}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}\omega\ ,$$

$$B_k^{(\eta)}(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f_k^{(\eta)}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}\omega\ ,$$

знаходимо:

$$D\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]=\sum_{l\in \text{ÿ}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f_l^{(\xi)}(\omega_1)\,f_{-l}^{(\eta)}(\omega_2)\lambda(\omega+\omega_2)\times\right.\right.$$

$$\times\lambda(\omega+\omega_0+l\omega_0)\varphi(\omega_1+\omega_2+k\omega_0,\theta)+\lambda(\omega+\omega_1)\times$$

$$\left.\left.\times\lambda(\omega-\omega_2)\varphi(\omega_1-\omega_2+(k-l)\omega_0,\theta)\right]\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\right\}, \qquad (5)$$

де

$$\varphi(\omega,\theta)=\frac{1}{\theta}\int_{-\theta}^{\theta}\left(1-\frac{|u_1|}{\theta}\right)e^{\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u=\frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta}e^{\mathrm{i}\omega(s-t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{\omega^2\theta^2}\left(e^{\mathrm{i}\omega\theta}-1\right)\left(e^{-\mathrm{i}\omega\theta}-1\right)=\frac{2}{\theta^2\omega^2}(1-\cos\omega\theta)=\frac{\sin^2\dfrac{\omega\theta}{2}}{\left(\dfrac{\omega\theta}{2}\right)^2}.$$

Для першої складової формули (5) в першому наближенні маємо:

$$D^{(1)}\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]\approx f_0^{(\eta)}(\omega_2)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega+\omega_2)\,f_0^{(\xi)}(\omega_1)\varphi(\omega_1+\omega_2+k\omega_0,\theta)\,\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 .$$

Можна також наближено прийняти, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0^{(\xi)}(\omega_1)\varphi(\omega_1+\omega_2+k\omega_0)\,\mathrm{d}\omega_1\approx$$

$$\approx f_0^{(\xi)}(\omega_2+k\omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega_1+\omega_2+k\omega_0)\,\mathrm{d}\omega_1=$$

$$=\frac{2\pi}{\theta}\,f_0^{(\xi)}(\omega_2+k\omega_0),$$

а тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega+\omega_2)f_0^{(\xi)}(\omega_2+k\omega_0)\,\mathrm{d}\omega_2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega_1)f_0^{(\xi)}(\omega-\omega_1-k\omega_0)\,\mathrm{d}\omega_1\approx$$

$$\approx f_0^{(\xi)}(\omega-k\omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega_1)\,\mathrm{d}\omega_1=W(0)\,f_0^{(\xi)}(\omega-k\omega_0).$$

Відтак

$$D^{(1)}\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]\approx\frac{2\pi}{\theta}W(0)\,f_0^{(\eta)}(\omega)\,f_0^{(\xi)}(\omega-k\omega_0).$$

Другу складову співвідношення (5) перепишемо у вигляді

$$D^{(2)}\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]\approx$$

$$\approx\sum_{l\in\mathbb{Z}} f_l^{(\xi\eta)}(-\omega)f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega-\omega_2)\lambda(\omega+\omega_1)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\theta}\int_{-\theta}^{\theta}\left(1-\frac{|u|}{\theta}\right)e^{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2+(k-l)\omega_0)u}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 .$$

Після нескладних, але громіздких перетворень отримуємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega-\omega_2)\lambda(\omega+\omega_1)e^{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2)u}\,\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(u_1)k(u_2)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}\omega_1(u+u_2)}\,\mathrm{d}\omega_1\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{i}\omega_2(u+u_1)}\,\mathrm{d}\omega_2\right]e^{\mathrm{i}\omega(u_1+u_2)}\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2=k^2(u)\,e^{-\mathrm{i}\omega_0 u},$$

$$\frac{1}{\theta}\int_{-\theta}^{\theta}\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)e^{\mathrm{i}[(k-l)\omega_0-2\omega]u}e^{\mathrm{i}2\omega_0 u}k^2(u)\,\mathrm{d}u=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}W^2(\omega_1)\left[\frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta}e^{\mathrm{i}[\omega_1-2\omega+(k-l)\omega_0]}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega_1\approx$$

$$\approx W\left[2\omega-(k-l)\omega_0\right]\frac{2\pi}{\theta},$$

а тоді

$$D^{(2)}\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]\approx$$

$$\approx\frac{2\pi}{\theta}\sum_{l\in\mathbb{Z}} f_l^{(\xi\eta)}(-\omega)f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega)W\left[2\omega-(k-l)\omega_0\right].$$

Приймаючи до уваги, що

$$f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega)=\overline{f}_l^{(\eta\xi)}(\omega+l\omega_0),\quad f_l^{(\xi\eta)}(-\omega)=f_l^{(\eta\xi)}(\omega+l\omega_0),$$

для дисперсії оцінки (2) маємо

$$D\left[f_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]=\frac{2\pi}{\theta}\Big[W(0)\,f_0^{(\xi)}(\omega-k\omega_0)\,f_0^{(\eta)}(\omega)+$$

$$+\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|f_l^{(\eta\xi)}(\omega+l\omega_0)\right|^2W\left(2\omega-(k-l)\omega_0\right)\Big].\qquad(6)$$

З цієї формули випливає, що дисперсії оцінок взаємоспектральних компонентів залежать від усіх тих спектральних компонентів, які містяться в розкладі в ряд Фур'є змінної спектральної густини ПНВС.

## ВИСНОВОК

Отже, слід зазначити, що при визначенні похибки оцінювання навіть взаємоспектральної густини стаціонарного наближення ПНВС не можна обмежуватися тільки характеристиками цього наближення. Таким чином, статистичний аналіз стаціонарного наближення ПНВС аж ніяк не може бути проведений у рамках стаціонарної моделі, а тільки в рамках того ПНВС, наближенням якого він є.

## ЛІТЕРАТУРА


[1] *Яворський І.М.* Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів: ФМІ НАН України, 2013. – 804 с.

[2] *Hurd H.L., Miamee A.* Periodically Correlated Random Sequences. Spectral Theory and Practice. – New Jersey: Wiley-Interscience, 2007. – 353 p.

[3] *Napolitano A.* Generalizations of Cyclostationarity Signal Processing. Spectral Analysis and applicatons. – John Wiley & Song, 2012. – 480 p.

[4] *Antoni J.* Cyclostationarity by examples // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2009. – Vol. 23. – P. 987–1036.

[5] *Яворський І.М., Кравець І.Б., Юзефович Р.М., Мацько І.Й., Стецько І.Г.* Методи та засоби ранньої вібродіагностики підшипникових вузлів турбоагрегатів ТЕС // Енергетика та електрифікація. – № 8 (348). – Київ, 2012. – С. 58–67.

[6] *Яворський І.М., Кравець І.Б., Юзефович Р.М., Мацько І.Й., Стецько І.Г., Луферчик П.П.* Віброакустична система ВАС-1 для ранньої вібраційної діагностики обертових механізмів // Наука та інновації. – 2013. – № 3 – С. 31–38.

[7] *Яворський І.М., Кравець І.Б., Юзефович Р.М., Мацько І.Й., Стецько І.Г.* Інформаційно-вимірювальна система для багатомірної вібраційної діагностики // Проблемы машиностроения. – 2013. – Т. 16. – № 3. – С. 45–50.