ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОМПОНЕНТНОЇ ОЦІНКИ ВЗАЄМОКОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

Юзефович Р.М.[1], *Яворський І.М.*[1,2], *Кравець І.Б.*[1], *Мацько І.Й.*[1]

[1] Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАН України, Львів
вул. Наукова 5, м. Львів, 79060
Тел.: +38 096 3 733 744, факс: +38 032 263 33 55
Ел. пошта: abzac@ipm.lviv.ua, iavor@ipm.lviv.ua, ivanmatsko@ipm.lviv.ua, kravets@ipm.lviv.ua

[2] Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща
Алея проф. С. Каліського, 7, Бидгощ, Польща, 85796
Тел.: +48 523 408 378, факс: +48 523 408 808
Ел. пошта: abzac@o2.pl, javor@atr.bydgoszcz.pl

Анотація

Проведено аналіз властивостей дисперсії компонентної взаємокореляційної функції періодично нестаціонарних випадкових сигналів. Отримані формули для дисперсії оцінок, що описують залежності цих величин від довжини відрізка реалізації та характеристик сигналів.

Ключові слова: періодично нестаціонарні випадкові сигнали, взаємокореляційна функція, компонентний аналіз, дисперсія.

THE INVESTIGATION OF CROSS-CORRELATION FUNCTION COMPONENTS ESTIMATES PROPERTIES FOR CYCLOSTATIONARY SIGNALS

Yuzefovych R.M.[1], *Javorskyj I.M.*[1, 2], *Kravets I.B.*[1], *Matsko I.Y.*[1]

[1] Karpenko Physico-mechanical institute NAS Ukraine, Lviv
Naukova str., 5, Lviv, 79060
Tel.: +38 096 3 733 744, fax: +38 032 263 33 55
E-mail: abzac@ipm.lviv.ua, iavor@ipm.lviv.ua, ivanmatsko@ipm.lviv.ua, kravets@ipm.lviv.ua

[2] Telecommunication Institute of University of Technology and Life Science, Poland
Al. Prof. S.Kaliskiego, 7, Bydgoszcz, Poland, 85796
Tel.: +48 523 408 378, fax: +48 523 408 808
E-mail: abzac@o2.pl, javor@atr.bydgoszcz.pl

Abstract

The estimators of cross-correlation functions of periodically non-stationary random processes are analyzed. The formulae for variance which describe dependence of these values on realization length and signal properties, are obtained.

Keywords: periodically correlated random signals, cross-correlation function, component analysis, variance.

ВСТУП

При розв'язуванні задач ідентифікації шляхів поширення сигналів, визначення місця знаходження їх джерел, оцінці їх вкладу в сумарний вихідний сигнал приходимо до необхідності аналізу взаємозв'язків між випадковими сигналами. Для знаходження імовірнісних характеристик взаємозв'язків періодично нестаціонарних випадкових сигналів (ПНВС) можуть бути

використані ті ж методи, які розроблені для автокореляційного й спектрального аналізу: когерентний [1], компонентний [2], метод найменших квадратів [3], методи лінійної фільтрації [4]. Аналіз властивостей когерентних оцінок взаємокореляційних характеристик ПНВС проведено в роботі [5]. Проведемо аналіз властивостей дисперсії компонентної взаємокореляційної функції періодично нестаціонарних випадкових сигналів.

ЗАСТОСУВАННЯ КОМПОНЕНТНОГО МЕТОДУ

Когерентні оцінки імовірнісних характеристик ПНВС, які знаходяться за допомогою усереднення відліків, що відбираються через період корельованості T, використовують тільки одне значення реалізації на періоді. Компонентна статистика

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)=\sum_{k=-N_2}^{N_2}\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)e^{ik\omega_0 t}\ ,\ \omega_0=\frac{2\pi}{T}\ , \qquad (1)$$

яка формується на основі інтегральної оцінки

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left[\xi(t)-\hat{m}_{\xi}(t)\right]\times$$
$$\times\left[\eta(t+u)-\hat{m}_{\eta}(t+u)\right]e^{-ik\omega_0 t}dt\ , \qquad (2)$$

де

$$\hat{m}_{\xi}(t)=\sum_{k=-N_2}^{N_2}\hat{m}_k^{(\xi)}e^{ik\omega_0 t}\ ,\ \hat{m}_{\eta}(t)=\sum_{k=-N_2}^{N_2}\hat{m}_k^{(\eta)}e^{ik\omega_0 t}\ , \quad (3)$$

$$\hat{m}_k^{(\xi)}(t)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\xi(t)e^{-ik\omega_0 t}dt\ ,\ \hat{m}_k^{(\eta)}(t)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\eta(t)e^{-ik\omega_0 t}dt\ ,$$

містять “багатшу” інформацію про властивості процесів. Тому можна сподіватися, що у випадку, коли взаємокореляційна функція процесів суттєво змінюється за зсувом u в межах інтервалу довжиною T, компонентна оцінка (1) буде ефективніша, ніж когерентна

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\begin{array}{l}\left[\xi(t+nT)-\hat{m}_{\xi}(t+nT)\right]\times\\ \times\left[\eta(t+u+nT)-\hat{m}_{\eta}(t+u+nT)\right]\end{array}\right],$$

де

$$\hat{m}_{\xi}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)\ ,\ \hat{m}_{\eta}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\eta(t+nT)\ .$$

Компонентний метод можна застосовувати тоді, коли маємо апріорні дані про число гармонічних складових в розкладах Фур’є кожної з імовірнісних характеристик, яка оцінюється. Про це число можна судити на основі аналізу фізичних умов протікання процесів, а також результатів обробки експериментальних даних за допомогою когерентного методу. Зрозуміло, що ефективність компонентного оцінювання падає при збільшенні числа гармонік, які містяться в тригонометричних поліномах (1) і (3), а в асимптотиці $N_1\to\infty$ і $N_2\to\infty$ компонентні статистики переходять у когерентні. При скінчених N_1 і N_2 різниця між статистичними характеристиками компонентних та когерентних оцінок визначатиметься кореляційними властивостями процесів.

Розглянемо компонентну статистику (1). Оцінку взаємокореляційних компонентів (2) перепишемо наступним чином

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left[\overset{\circ}{\xi}(t)-\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t)\right]\times$$
$$\times\left[\overset{\circ}{\eta}(t+u)-\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+u)\right]e^{-ik\omega_0 t}dt\ , \qquad (4)$$

де

$$\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t)=\sum_{l=-N_1}^{N_1}e^{il\omega_0 t}\left[\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\overset{\circ}{\xi}(s)e^{-il\omega_0 s}ds\right].$$

Для оцінювання взаємокореляційних компонентів також може бути використана статистика [6]:

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left[\begin{array}{l}\xi(t)\eta(t+u)-\\ -\hat{m}_{\xi}(t)\hat{m}_{\eta}(t+u)\end{array}\right]e^{-ik\omega_0 t}dt\ . \qquad (5)$$

ВЛАСТИВОСТІ ДИСПЕРСІЇ КОМПОНЕНТНОЇ ОЦІНКИ ВЗАЄМОКОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ПНВС

Розглянемо тепер властивості дисперсії компонентної оцінки взаємокореляційної функції, поданої у вигляді (1). На основі цього виразу маємо

$$D\left[\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)\right]=E\left|\sum_{l=-N_2}^{N_2}\overset{\circ}{\hat{B}}{}_l^{(\xi\eta)}(u)e^{il\omega_0 t}\right|^2,$$

при цьому $\overset{\circ}{\hat{B}}{}_l^{(\xi\eta)}(u)=\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(u)-E\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(u)$. Після усереднення за розподілом отримуємо

$$D\left[\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)\right]=\sum_{k,l=-N_2}^{N_2}R_{l,k}^{(\xi\eta)}(u)e^{i(l-k)\omega_0 t},$$

де функції $R_{l,k}^{(\xi\eta)}(u)$ визначають кореляції між оцінками кореляційних компонентів:

$$R_{l,k}^{(\xi\eta)}(u)=E\,\overset{\circ}{\hat{B}}{}_l^{(\xi\eta)}(u)\overset{\circ}{\hat{B}}{}_k^{(\xi\eta)}(u)=$$

$$=E\,\overset{\circ}{\hat{B}}{}_l^{(\xi\eta)}(u)\overline{\overset{\circ}{\hat{B}}{}_k^{(\xi\eta)}}(u)-E\hat{B}_l^{(\xi\eta)}(u)E\overline{\hat{B}}_k^{(\xi\eta)}(u).$$

Ввівши новий індекс і помінявши порядок сумування, знаходимо

$$D\left[\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)\right]=\sum_{n=-2N_2}^{2N_2}\alpha_n(u)e^{in\omega_0 t}=$$

$$=\alpha_0(u)+\sum_{n=1}^{2N_2}\left[\alpha_n^c(u)\cos n\omega_0 t+\alpha_n^s(u)\sin n\omega_0 t\right],\qquad(6)$$

при цьому

$$\alpha_n(u)=\begin{cases}\sum\limits_{k=-N_2-n}^{N_2}R_{n+k,k}^{(\xi\eta)}(u), & n\le 0,\\ \sum\limits_{k=-N_2}^{N_2-n}R_{n+k,k}^{(\xi\eta)}(u), & n>0.\end{cases}$$

і $\alpha_n(u)=\frac{1}{2}\left[\alpha_n^c(u)-i\alpha_n^s(u)\right]$. Коефіцієнт $\alpha_0(u)$ визначає середнє значення дисперсії $D\left[\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)\right]$. Він визначається дисперсіями оцінок кореляційних компонентів:

$$\alpha_0(u)=\sum_{k=-N_2}^{N_2}R_{k,k}^{(\xi\eta)}(u)=$$

$$=D\left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)\right]+2\sum_{k=1}^{N_2}D\left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)\right].\qquad(7)$$

В першому наближенні для обох оцінок взаємокореляційних компонентів (4) і (5) маємо

$$R_{n+k,k}^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta b_\zeta(t,s-t,u)e^{ik\omega_0(s-t)}e^{-in\omega_0 t}dtds,$$

де кореляційна функція

$$b_\zeta(t,s-t,u)=E\overset{\circ}{\zeta}(t,u)\overset{\circ}{\zeta}(s,u),\ \overset{\circ}{\zeta}(t,u)=\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u),$$

для гауссових ПНВС визначається формулою [6]:

$$b_\zeta(t,s-t,u)=b_\xi(t,s-t)b_\eta(t+u,s-t)+$$
$$+b_{\xi\eta}(t,s-t+u)b_{\xi\eta}(s,t-s+u).$$

Введемо нову змінну інтегрування $u_1=s-t$ і змінимо його порядок

$$R_{n+k,k}^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_{-t}^{\theta-t}b_\zeta(t,u_1,u)e^{ik\omega_0 u_1}e^{-in\omega_0 t}du_1dt=$$

$$=\frac{1}{\theta^2}\left[\begin{array}{l}\int\limits_{-\theta}^{0}\int\limits_{-u_1}^{\theta}b_\zeta(t,u_1,u)e^{ik\omega_0 u_1}e^{-in\omega_0 t}dtdu_1+\\ +\int\limits_0^\theta\int\limits_0^{\theta-u_1}b_\zeta(t,u_1,u)e^{ik\omega_0 u_1}e^{-in\omega_0 t}dtdu_1\end{array}\right].$$

Оскільки $b_\zeta(t,-u_1,u)=b_\zeta(t-u_1,u_1,u)$, то

$$\int\limits_{-\theta}^{0}\int\limits_{-u_1}^{\theta}b_\zeta(t,u_1,u)e^{ik\omega_0 u_1}e^{-in\omega_0 t}dtdu_1=$$

$$=\int\limits_0^\theta\int\limits_{u_1}^{\theta}b_\zeta(t-u_1,u_1,u)e^{-ik\omega_0 u_1}e^{-in\omega_0 t}dtdu_1=$$

$$=\int\limits_0^\theta\int\limits_0^{\theta-u_1}b_\zeta(t,u_1,u)e^{-i(k+n)\omega_0 u_1}e^{-in\omega_0 t}dtdu_1,$$

тоді

$$R_{n+k,k}^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^{\theta-u_1}b_\zeta(t,u_1,u)e^{-in\omega_0 t}\left[\begin{array}{l}e^{-i(k+n)\omega_0 u_1}+\\ +e^{ik\omega_0 u_1}\end{array}\right]dtdu_1.$$

Подаючи функцію $b_\zeta(t,u_1,u)$ у вигляді ряду Фур'є

$$b_\zeta(t,u_1,u)=\sum_{k=-2N_2}^{N_2}\tilde{B}_k(u_1,u)e^{ik\omega_0 t},$$

після інтегрування по t знаходимо:

$$R_{n+k,k}^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\tilde{B}_n(u_1,u)\left[\begin{array}{l}e^{-i(k+n)\omega_0 u_1}+\\ +e^{-ik\omega_0 u_1}\end{array}\right]du_1+$$

$$+\frac{1}{\theta}\sum_{\substack{l=-2N_2,\\ l\ne n}}^{2N_2}\int_0^\theta\tilde{B}_l(u_1,u)f_{l-n}(0,\theta-u_1)\left[\begin{array}{l}e^{-i(k+n)\omega_0 u_1}+\\ +e^{ik\omega_0 u_1}\end{array}\right]du_1.$$

При врахуванні тільки першої складової для дисперсій оцінок компонентів маємо:

$$D\left[\hat{B}_0^{(\xi\eta)}(u)\right]=\frac{2}{\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\tilde{B}_0(u_1,u)du_1,$$

$$D\left[\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)\right]=\frac{2}{\theta}\int_0^{\theta}\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\tilde{B}_0(u_1,u)\cos k\omega_0 u_1 du_1 .$$

Приймаючи до уваги співвідношення (7), для коефіцієнта $\alpha_0(u)$ отримуємо

$$\alpha_0(u)=\frac{2}{\theta}\int_0^{\theta}\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\tilde{B}_0(u_1,u)\left(1+2\sum_{k=1}^{N_2}\cos k\omega_0 u_1\right)du_1=$$

$$=\frac{2}{\theta}\int_0^{\theta}\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\tilde{B}_0(u_1,u)h(N_2,u_1)du_1 . \qquad (8)$$

Формула для коефіцієнтів вищих порядків в тому ж наближенні має вигляд:

$$\alpha_n(u)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\tilde{B}_n(u_1,u)\sum_{k=-N_2}^{N_2-n}\left[\begin{matrix}e^{-i(k+n)\omega_0 u_1}+\\+e^{-ik\omega_0 u_1}\end{matrix}\right]du_1 . \qquad (9)$$

Звідси

$$\alpha_n^c(u)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\left[\tilde{B}_n^c(u_1,u)\sum_{k=-N_2}^{N_2-n}\left[\begin{matrix}\cos(k+n)\omega_0 u_1+\\+\cos k\omega_0 u_1\end{matrix}\right]-\right.$$

$$\left.-\tilde{B}_n^s(u_1,u)\sum_{k=-N_2}^{N_2-n}\left[\sin(k+n)\omega_0 u_1-\sin k\omega_0 u_1\right]\right]du_1 , \qquad (10)$$

$$\alpha_n^s(u)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\left[\tilde{B}_n^s(u_1,u)\sum_{k=-N_2}^{N_2-n}\left[\begin{matrix}\cos(k+n)\omega_0 u_1+\\+\cos k\omega_0 u_1\end{matrix}\right]+\right.$$

$$\left.+\tilde{B}_n^c(u_1,u)\sum_{k=-N_2}^{N_2-n}\left[\sin(k+n)\omega_0 u_1-\sin k\omega_0 u_1\right]\right]du_1 . \qquad (11)$$

Аналізуючи співвідношення (6) і (8) – (11), приходимо до висновку, що є справедливою наступна теорема.

Теорема 1. *Сформована на основі статистик (1) – (3) і (5) компонентна оцінка взаємокореляційної функції при виконанні* $\lim_{|u|\to\infty} b_{\xi\eta}(t,u)=0$ *є слушною, а її дисперсія для гауссових ПНВС в першому наближенні визначається співвідношеннями (6) і (8) – (11).*

ВИСНОВОК

Як випливає з формули (8), коефіцієнт $\alpha_0(u)$, залежить не тільки від нульового, а й вищих взаємокореляційних компонентів процесу. Звідси приходимо до важливого висновку: навіть усереднене в часі значення дисперсії оцінки взаємокореляційної функції не може бути визначене на основі характеристик стаціонарного наближення періодично нестаціонарних випадкових сигналів.

Відтак, характерною особливістю оцінок, які розглядаються в даній статті, є те, що вони сформовані з врахуванням початкової інформації про кількість гармонічних складових, що містять характеристики, які оцінюються. При застосуванні когерентного методу неявно припускається існування нескінченого числа компонентів. Саме це, в першу чергу, відрізняє його від компонентного і може спричинити більшу точність компонентних оцінок у випадку швидкого загасання кореляційних зв'язків.

ЛІТЕРАТУРА

[1] *I. Javorskyj, I. Isayev, Z. Zakrzewski, S.P. Brooks.* Coherent covariance analysis for periodically correlated random processes // Signal Processing. – 2007. – 87. – P. 13-32.

[2] *I. Javorskyj, I. Isayev, J. Majewski, R. Yuzefovych.* Component covariance analysis for periodically correlated random processes // Signal Processing. – 2010. – 90. – P. 1083-1102.

[3] *I. Javorskyj, R. Yuzefovych, I. Kravets, Z. Zakrzewski.* Least Squares Method in the Statistic Analysis of Periodically Correlated Random Processes // Radioelectronics and Communication Systems. – 2011. – vol. 54. – № 1. – P. 45-59.

[4] *I. Javorskyj, J. Leskow, I. Kravets, I. Isayev, E. Gajecka.* Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes. – Part I: Coherent and component methods and their generalization // Signal Processing. – 2012. – 92. – P. 1559-1566.

[5] *I. Javorskyj, J. Leskow, I. Kravets, I. Isayev, E. Gajecka.* Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes. – Part II: Harmonic series representation // Signal Processing. – 2011. – 91. – P. 2506-2519.

[6] *Яворський І.М., Юзефович Р.М., Кравець І.Б., Мацько І.Й.* Взаємокореляційний аналіз періодично корельованих випадкових сигналів // Відбір і обробка інформації. – 2012. – № 36 (112). – С. 14-21.