Доведення основної теореми методу ЛСП

Павлов О.І.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,
Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем
Op-mail@ukr.net

Анотація

Розглядається основна теорема методу лінійних спектральних параметрів (класичного та найвищої регресії (декомпозиції)), наводиться її доведення.

1. Вступні положення

Для кодування форми спектральної обвідної мовленнєвого сигналу широко використовується класичний метод лінійних спектральних параметрів (ЛСП) [1—5]. Відповідно такому методу параметрами фільтру прогнозування і синтезуючого фільтру порядку M є коефіцієнти лінійного прогнозування (КЛП) a_i, i=1, 2, ..., M, які розраховуються з використанням автокореляційного підходу. При цьому гарантується стійкість синтезуючого фільтру, який має характеристику $H(z)=1/A(z)$, де

$$A(z)=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+...+a_Mz^{-M}\ , \qquad (1)$$

тобто гарантується, що корні поліному знаменника $\left|z_{ai}\right|<1$, i=1, 2, ..., M.

Однак, основні операції, що пов'язані з квантуванням розрахованих параметрів, їх інтерполяцією між кадрами і прогнозуванням їх значень для наступного кадру вхідного сигналу в методі ЛСП здійснюються не з КЛП, а з ЛСП [6—7]. При цьому поліном (1) розкладається (розщеплюються) на суму двох поліноміальних функцій, корені яких і утворюють пари ЛСП, — пари нормованих частот, на яких отримані поліноміальних функцій почергово приймають нульові значення.

В літературі [1] описується класичний метод ЛСП, який базується на перетворенні, що дозволяє отримати антисиметричний поліном $P(z)$ і симетричний поліном $Q(z)$ зі степенями M+1, де $P(z)=A(z)-z^{-(M+1)}A(z^{-1})$, $Q(z)=A(z)+z^{-(M+1)}A(z^{-1})$. При цьому стверджується, що всі 2M+2 кореня поліномів $P(z)$ і $Q(z)$ знаходяться на одиничній окружності в z-площині і перемежовуються, більш того серед коренів є два беззаперечних кореня: z_0=+1 і z_{M+1}= -1, а решта 2M коренів утворюють комплексно-спряжені пари, що суттєво спрощує їх пошук.

Нажаль доведення даного ствердження в літературі ніде не наводиться.

Оскільки саме це ствердження є основою класичного методу ЛСП, а також методу ЛСП найвищої регресії (декомпозиції) [8—15], то предметом подальшого розгляду буде дослідження процедури представлення стійкого поліному $A(z)$, двома критичними поліномами $P(z)$ і $Q(z)$, а також з'ясування їх властивостей і доведення основної теореми методу ЛСП.

2. Основна теорема методу ЛСП

Узагальнюючи матеріали [1—5] можна сформулювати таку теорему.

Теорема. Всякий стійкий поліном $A(z)$, який має степінь M, дійсні коефіцієнти a_i, i=1, 2, ..., M і корені $\left|z_{ai}\right|<1$, i=1, 2, ..., M, $A(z)=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+...+a_Mz^{-M}$, можна подати у вигляді полусуми двох поліномів $P(z)$ і $Q(z)$ зі степенями M+1, $A(z)=0{,}5(P(z)+Q(z))$, де $P(z)=A(z)-z^{-(M+1)}A(z^{-1})$, $Q(z)=A(z)+z^{-(M+1)}A(z^{-1})$, і справедливі такі ствердження:

1. Всі корені z_{pi} поліному $P(z)$ і z_{qi} поліному $Q(z)$ знаходяться на одиничній окружності, тобто $\left|z_{pi}\right|=\left|z_{qi}\right|=1$, i=1, 2, ..., M+1, $z_{pi}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{pi}}$, $z_{qi}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{qi}}$.
2. Корені поліномів $P(z)$ і $Q(z)$ перемежовуються, тобто всі корені поліномів є простими (кратних немає), між будь-якими двома сусідніми коренями одного поліному міститься один і тільки один корінь іншого поліному.
3. Розташування коренів $z_{pi}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{pi}}$ поліному $P(z)$ і коренів $z_{qi}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_{qi}}$ поліному $Q(z)$ на одиничній окружності (беручи на увагу верхню півплощину) задовольняє умовам (якщо M парне):

$$0=\omega_0<\omega_{q_1}<\omega_{p_1}<\omega_{q_2}<\omega_{p_2}<...<\omega_{q_{M/2}}<\omega_{p_{M/2}}<\omega_{M+1}=\pi\ ,$$

або умовам (якщо M непарне):

$$0=\omega_0<\omega_{q_1}<\omega_{p_1}<\omega_{q_2}<\omega_{p_2}<...$$
$$...<\omega_{q_{(M-1)/2}}<\omega_{p_{(M-1)/2}}<\omega_{q_{(M+1)/2}}<\omega_{M+1}=\pi\ .$$

Іншими словами: на одиничній окружності розташовуються два дійсних кореня z_0=+1 і $z_{(M+1)}$=–1, і 2M комплексно-спряжених коренів. Якщо M парне, то поліном $P(z)$ має один дійсний корінь z_{p0}=+1, а поліном $Q(z)$ — один дійсний корінь $z_{q(M+1)}$=–1. Якщо ж M непарне, то поліном $P(z)$ має два дійсних кореня z_{p0}=+1 и $z_{p(M+1)}$=–1, а поліном $Q(z)$ в цьому випадку дійсних коренів не має взагалі.

3. Доведення основної теореми методу ЛСП

1. Для доведення сформульованих в теоремі стверджень спочатку розглянемо допоміжну функцію $F(z)=\dfrac{A(z)}{z^{-M}A(z^{-1})}$, яку також можна подати у вигляді

$$F(z)=z^M\prod_{i=1}^{M}\frac{1-z_{ai}z^{-1}}{1-z_{ai}z}=z^M\prod_{i=1}^{M}\frac{1-z_{ai}^{\ *}z^{-1}}{1-z_{ai}z}=\prod_{i=1}^{M}\frac{z-z_{ai}^{\ *}}{1-z_{ai}z}\ .$$

Оскільки $\left|(a+\mathrm{j}b)\right|^2=\left|(a+\mathrm{j}b)^*\right|^2=(a+\mathrm{j}b)(a-\mathrm{j}b)$, то квадрат модуля функції $F(z)$ можна подати так:

$$\left|F(z)\right|^2=\prod_{i=1}^{M}\left|\frac{z-z_{ai}}{1-z_{ai}z}\right|^2=\prod_{i=1}^{M}\left|\frac{z-z_{ai}^{\ *}}{1-z_{ai}z}\right|^2=\prod_{i=1}^{M}\frac{(z-z_{ai}^{\ *})(z^*-z_{ai})}{(1-z_{ai}z)(1-z_{ai}^{\ *}z^*)}=$$

$$=\prod_{i=1}^{M}\frac{\left|z\right|^2+\left|z_{ai}\right|^2-z_{ai}z-z_{ai}^{\ *}z^*}{1+\left|z_{ai}z\right|^2-z_{ai}z-z_{ai}^{\ *}z^*}=\prod_{i=1}^{M}\frac{\left|z\right|^2+\left|z_{ai}\right|^2-2\mathrm{Re}\{z_{ai}z\}}{1+\left|z_{ai}z\right|^2-2\mathrm{Re}\{z_{ai}z\}}=$$

$$=\prod_{i=1}^{M}\frac{\left|z\right|^2+\left|z_{ai}\right|^2-1-\left|z_{ai}z\right|^2+1+\left|z_{ai}z\right|^2-2\mathrm{Re}\{z_{ai}z\}}{1+\left|z_{ai}z\right|^2-2\mathrm{Re}\{z_{ai}z\}}=$$

$$=\prod_{i=1}^{M}\left(\frac{\left|z\right|^2+\left|z_{ai}\right|^2-1-\left|z_{ai}z\right|^2}{1+\left|z_{ai}z\right|^2-2\mathrm{Re}\{z_{ai}z\}}+1\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^{M}\left(\frac{(\left|z\right|^2-1)(1-\left|z_{ai}\right|^2)}{\left|1-z_{ai}z\right|^2}+1\right) \qquad (4)$$

Для $\left|z_{ai}\right|<1$, i=1, 2, ..., M, що відповідає умові стійкості поліному $A(z)$, в залежності від значення $\left|z\right|$ маємо такі оцінки для лівої складової кожного з співмножників, які входять у квадрат модуля функції $F(z)$ у (4):

$$\frac{(\left|z\right|^2-1)(1-\left|z_{ai}\right|^2)}{\left|1-z_{ai}z\right|^2}=\begin{cases}<0, & \left|z\right|<1\\ =0, & \left|z\right|=1\\ >0, & \left|z\right|>1\end{cases}$$

. Тоді для кожного співмножника у виразі (4) справедливою буде така оцінка:

$$\frac{(\left|z\right|^2-1)(1-\left|z_{ai}\right|^2)}{\left|1-z_{ai}z\right|^2}+1=\begin{cases}<1, & \left|z\right|<1\\ =1, & \left|z\right|=1\\ >1, & \left|z\right|>1\end{cases}.$$

Остаточно, для квадрату модуля функції $F(z)$ в цілому маємо таку оцінку:

$$\left|F(z)\right|^2=\left|\frac{A(z)}{z^{-M}A(z^{-1})}\right|^2=\begin{cases}<1, & \left|z\right|<1\\ =1, & \left|z\right|=1\\ >1, & \left|z\right|>1\end{cases}. \qquad (5)$$

Якщо z_{pi} є корінь поліному $P(z)=A(z)-z^{-(M+1)}A(z^{-1})$, тоді $A(z_{pi})=z_{pi}^{\ -(M+1)}A(z_{pi}^{\ -1})$, звідкіля маємо $\frac{A(z_{pi})}{z_{pi}^{\ -M}A(z_{pi}^{\ -1})}=z_{pi}^{\ -1}=F(z_{pi})$. З останнього виразу маємо просте значення квадрату модуля функції $F(z)$ для z=z_{pi}, а саме: $\left|F(z_{pi})\right|^2=\left|\frac{A(z_{pi})}{z_{pi}^{\ -M}A(z_{pi}^{\ -1})}\right|^2=\frac{1}{\left|z_{pi}\right|^2}$.

Оскільки оцінка квадрату модуля функції $F(z)$ для будь-якого z відповідно (5) є справедливою і для z=z_{pi}, маємо оцінку для $\frac{1}{\left|z_{pi}\right|^2}$, а саме: $\frac{1}{\left|z_{pi}\right|^2}=\begin{cases}<1, & \left|z_{pi}\right|<1\\ =1, & \left|z_{pi}\right|=1\\ >1, & \left|z_{pi}\right|>1\end{cases}$. Ясна річ, що останнє може бути тільки якщо $\left|z_{pi}\right|=1$, i=1, 2, ..., M+1.

Таким чином, всі корені поліному $P(z)=A(z)-z^{-(M+1)}A(z^{-1})$ знаходяться на одиничній окружності.

Аналогічно, корені z_{qi} поліному $Q(z)=A(z)+z^{-(M+1)}A(z^{-1})$ перетворюють його на нуль, $Q(z_{qi})=A(z_{qi})+z_{qi}^{\ -(M+1)}A(z_{qi}^{\ -1})=0$, звідкіля отримуємо $A(z_{qi})=z_{qi}^{\ -(M+1)}A(z_{qi}^{\ -1})$, або, що теж саме: $\frac{A(z_{qi})}{z_{qi}^{\ -M}A(z_{qi}^{\ -1})}=-z_{qi}^{\ -1}$. Тоді квадрат модуля функції $F(z)$ для z=z_{qi} має знов таки дуже простий вираз, а саме $\left|F(z_{qi})\right|^2=\left|\frac{A(z_{qi})}{z_{qi}^{\ -M}A(z_{qi}^{\ -1})}\right|^2=\frac{1}{\left|z_{qi}\right|^2}$. Оскільки оцінка квадрату модуля функції $F(z)$ для будь-якого z відповідно (5) є справедливою і для z=z_{qi}, маємо оцінку для $\frac{1}{\left|z_{qi}\right|^2}$, а саме: $\frac{1}{\left|z_{qi}\right|^2}=\begin{cases}<1, & \left|z_{qi}\right|<1\\ =1, & \left|z_{qi}\right|=1\\ >1, & \left|z_{qi}\right|>1\end{cases}$. Знов таки зрозуміло, що останнє може бути тільки якщо $\left|z_{qi}\right|=1$, i=1, 2, ..., M+1.

Таким чином, всі корені поліному $Q(z)=A(z)+z^{-(M+1)}A(z^{-1})$ також знаходяться на одиничній окружності.

Перше ствердження теореми доведено.

2. Для доведення другого ствердження теореми розглянемо поліноми $A_1(z)$, $P_1(z)$, $Q_1(z)$, які утворюються з поліномів $A(z)$, $P(z)$, $Q(z)$ так:

$A_1(z)=\frac{A(z)}{z^{-(M+1)/2}}$, $P_1(z)=\frac{P(z)}{z^{-(M+1)/2}}$, $Q_1(z)=\frac{Q(z)}{z^{-(M+1)/2}}$, тобто

$$A_1(z)=z^{(M+1)/2}\prod_{i=1}^{M}(1-z_{ai}z^{-1})=z^{-(M-1)/2}\prod_{i=1}^{M}(z-z_{ai}),$$

$$P_1(z)=\frac{P(z)}{z^{-(M+1)/2}}=z^{(M+1)/2}(1+p_1z^{-1}+p_2z^{-2}+...-p_2z^{-(M-1)}-p_1z^{-M}-z^{-(M+1)})=,$$
$$=(z^{(M+1)/2}-z^{-(M+1)/2})+p_1(z^{(M-1)/2}-z^{-(M-1)/2})+p_2(z^{(M-3)/2}-z^{-(M-3)/2})+...$$

$$Q_1(z)=\frac{Q(z)}{z^{-(M+1)/2}}=z^{(M+1)/2}(1+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}+...+q_2z^{-(M-1)}+q_1z^{-M}+z^{-(M+1)})=.$$
$$=(z^{(M+1)/2}+z^{-(M+1)/2})+q_1(z^{(M-1)/2}+z^{-(M-1)/2})+q_2(z^{(M-3)/2}+z^{-(M-3)/2})+...$$

Кожен з поліномів $A_1(z)$, $P_1(z)$, $Q_1(z)$ має такі самі корені, що і відповідні поліноми $A(z)$, $P(z)$, $Q(z)$, крім того виконується рівняння $A_1(z)=0,5(P_1(z)+Q_1(z))$. Оскільки всі корені поліному $A_1(z)$ знаходяться всередині одиничної окружності, то для будь-якого $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ цей поліном приймає певне значення (в загальному випадку комплексне), яке не дорівнює нулю. При зміні ω від 0 до π точка $A(\mathrm{Re}\{A_1(\omega)\};\ \mathrm{j}\mathrm{Im}\{A_1(\omega)\})$ на площині комплексної змінної описує певну неперервну криву, яка не проходить через початок координат і є амплітудно-фазовою характеристикою поліному $A_1(z)$ [16] (тільки на відміну від [16], в даному випадку образом уявної осі jω є одинична окружність).

Далі, для поліномів $P_1(z)$, $Q_1(z)$ для будь-якого $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ маємо такі вирази відносно нормованої частоти ω:

$$P_1(\omega) = 2\,\mathrm{j}\left(\sin\frac{\omega(M+1)}{2} + p_1\sin\frac{\omega(M-1)}{2} + p_2\sin\frac{\omega(M-3)}{2} + \ldots\right),$$

$$Q_1(\omega) = 2\left(\cos\frac{\omega(M+1)}{2} + q_1\cos\frac{\omega(M-1)}{2} + q_2\cos\frac{\omega(M-3)}{2} + \ldots\right).$$

Таким чином, поліном $P_1(\omega)$ завжди приймає тільки уявні значення (зауважимо, що для непарного M коефіцієнт $p_{(M+1)/2} = a_{(M+1)/2} - a_{(M+1)/2} = 0$), а поліном $Q_1(\omega)$ завжди приймає тільки дійсні значення. В силу того, що $A_1(\omega) = 0{,}5(P_1(\omega) + Q_1(\omega))$ будемо мати:

$$A_1(\omega) = \left(\cos\frac{\omega(M+1)}{2} + q_1\cos\frac{\omega(M-1)}{2} + q_2\cos\frac{\omega(M-3)}{2} + \ldots\right) +$$

$$+\,\mathrm{j}\left(\sin\frac{\omega(M+1)}{2} + p_1\sin\frac{\omega(M-1)}{2} + p_2\sin\frac{\omega(M-3)}{2} + \ldots\right).$$

Таким чином, $\mathrm{Re}\{A_1(\omega)\} = Q_1(\omega)/2$, $\mathrm{Im}\{A_1(\omega)\} = P_1(\omega)/2$.

Розглянемо поведінку аргументу комплексного значення $A_1(\omega)$ — тобто кута між радіус-вектором $\overrightarrow{OA} = (\mathrm{Re}\{A_1(\omega)\};\ \mathrm{j}\mathrm{Im}\{A_1(\omega)\})$ і віссю абсцис або, іншими словами, фазової характеристики $\varphi_{A1}(\omega)$ поліному $A_1(\omega)$. Оскільки

$$A_1(\omega) = \prod_{i=1}^{M} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1)/2M}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - |z_{ai}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{ai}}\right) = |A_1(w)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{A1}(\omega)},$$

то фазова характеристика $\varphi_{A1}(\omega)$ є такою:

$$\phi_{A1}(\omega) = \sum_{i=1}^{M}\left(\mathrm{Arg}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - |z_{ai}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{ai}}\right) - \frac{\omega(M-1)}{2M}\right) = \sum_{i=1}^{M}\theta_i(\omega),$$

де

$$\theta_i(\omega) = \mathrm{Arg}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - |z_{ai}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{ai}}\right) - \frac{\omega(M-1)}{2M}, \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Зауважимо, що у двох останніх виразах мається на увазі головне значення аргументу, тобто кут, який лежить в інтервалі]-π; π]. і може бути визначеним через функцію арктангенсу так:

$$\mathrm{Arg}(x + \mathrm{j}y) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, \quad y \ge 0 \\ \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, \quad y < 0 \\ \lim\limits_{x \to 0_{+0}}\left(\mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right), & x = 0, \quad y \ne 0 \end{cases},$$

де

$$\begin{cases} x = \cos(\omega) - |z_{ai}|\cos(\phi_{ai}) \\ y = \sin(\omega) - |z_{ai}|\sin(\phi_{ai}) \end{cases}.$$

Тоді, враховуючи що $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\mathrm{Arg}(x + \mathrm{j}y)\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\mathrm{arctg}(y/x)\right)$, похідна кожної складової $\theta_i(\omega)$ фазової характеристики $\varphi_{A1}(\omega)$ по ω є такою:

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i(\omega)}{\mathrm{d}\omega} =$$

$$= \frac{\cos(\omega)(\cos(\omega) - |z_{ai}|\cos(\phi_{ai})) + \sin(\omega)(\sin(\omega) - |z_{ai}|\sin(\phi_{ai}))}{((\cos(\omega) - |z_{ai}|\cos(\phi_{ai}))^2 + (\sin(\omega) - |z_{ai}|\sin(\phi_{ai}))^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2M} =$$

$$= \frac{1 - |z_{ai}|\cos(\omega - \phi_{ai})}{1 - 2|z_{ai}|\cos(\omega - \phi_{ai}) + |z_{ai}|^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2M} =$$

$$= \frac{1 + |z_{ai}|^2}{2(|z_{ai}| - \cos(\omega - \phi_{ai}))^2 + 2\sin(\omega - \phi_{ai})^2} + \frac{1}{2M} > 0$$

Оскільки $\mathrm{d}\theta_i(\omega)/\mathrm{d}\omega > 0$, то і $\mathrm{d}\phi_{A1}(\omega)/\mathrm{d}\omega > 0$. Тобто функція фазової характеристики монотонно зростає, а радіус-вектор $\overrightarrow{OA}$ монотонно обертається в додатному напрямку (проти стрілки годинника). При такому монотонному оберті амплітудно-фазова характеристика, яка задається параметричним рівнянням $A_1(\omega) = Q_1(\omega)/2 + \mathrm{j}P_1(\omega)/2 = x + \mathrm{j}y$, де $x = Q_1(\omega)/2$, $y = P_1(\omega)/2$, послідовно перетинає осі координат.

При зміні ω від 0 до π амплітудно-фазова характеристика спочатку перетинає вісь абсцис, $\phi_{A1}(0) = 0$. Дійсно, підстановка значення ω = 0 у вираз для $\theta_i(\omega)$ дає таке: $\theta_i(0) = \mathrm{Arg}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0} - |z_{ai}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{ai}}\right) =$

$$= \mathrm{Arg}\left(1 - |z_{ai}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{ai}}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{-\mathrm{Im}\{z_{ai}\}}{1 - \mathrm{Re}\{z_{ai}\}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, M,$$

а через те, що корені z_{ai} є або дійсними, $\mathrm{Im}\{z_{ai}\} = 0$, або комплексно-спряженими (тобто розташовані симетрично відносно дійсної осі), $\mathrm{Im}\{z_{ai}\} = -\mathrm{Im}\{z_{ai}^*\}$, то сумарний аргумент φ_{A1} для ω = 0, буде дорівнювати нулю.

Наступною віссю, яку буде перетинати амплітудно-фазова характеристика буде вісь ординат, потім знову вісь абсцис, і так далі.

Те, яку вісь буде перетинати амплітудно-фазова характеристика в останній раз залежить від значення M. Дійсно, підстановка ω = π у вираз для $\theta_i(\omega)$ дає таке:

$$\theta_i(\pi) = \mathrm{Arg}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} - |z_{ai}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{ai}}\right) - \frac{\pi(M-1)}{2M} =$$

$$= \mathrm{Arg}\left(-1 - |z_{ai}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{ai}}\right) - \frac{\pi(M-1)}{2M} =$$

$$= \mathrm{arctg}\left(\frac{-\mathrm{Im}\{z_{ai}\}}{-1 - \mathrm{Re}\{z_{ai}\}}\right) + \pi - \frac{\pi(M-1)}{2M}, \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Оскільки корені z_{ai} є або дійсними $\mathrm{Im}\{z_{ai}\} = 0$, або комплексно-спряженими (симетричними відносно дійсної осі), $\mathrm{Im}\{z_{ai}\} = -\mathrm{Im}\{z_{ai}^*\}$, то

$$\mathrm{arctg}\left(\frac{-\mathrm{Im}\{z_{ai}\}}{-1 - \mathrm{Re}\{z_{ai}\}}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\{z_{ai}\}}{1 + \mathrm{Re}\{z_{ai}\}}\right) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\{z_{ai}^*\}}{1 + \mathrm{Re}\{z_{ai}^*\}}\right),$$

а сумарний аргумент φ_{A1} для ω = π, буде визначатися так: $\phi_{A1}(\pi) = \pi M - \pi(M-1)/2 = \pi(M+1)/2$.

У випадку парного M амплітудно-фазова характеристика останній раз перетне вісь ординат.

У випадку непарного M амплітудно-фазова характеристика останній раз перетне вісь абсцис.

В обох випадках, при зміні ω від 0 до π кількість усіх перетинів дорівнює M+2 (що відповідає M уявним кореням для ω∈]0, π[і 2 дійсним кореням для ω = 0 і ω = π), а при зміні ω від 0 до 2π кількість усіх перетинів дорівнює 2M+3 (що відповідає M парам комплексно-спряжених уявних коренів для ω∈]0, π[та ω∈]π, 2π[і 3

дійсним кореням для $\omega = 0$, $\omega = \pi$ і $\omega = 2\pi$). Дійсно, підстановка значення $\omega = 2\pi$ у вираз для $\theta_i(\omega)$ дає таке:

$$\theta_i(2\pi) = \mathrm{Arg}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi} - \left|z_{ai}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{ai}}\right) - \frac{2\pi(M-1)}{2M} =$$

$$= \mathrm{Arg}\left(1 - \left|z_{ai}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{ai}}\right) - \frac{2\pi(M-1)}{2M} =$$

$$= \mathrm{arctg}\left(\frac{-\mathrm{Im}\{z_{ai}\}}{1-\mathrm{Re}\{z_{ai}\}}\right) + 2\pi - \frac{2\pi(M-1)}{2M}, \quad i = 1, 2, ..., M .$$

Знов таки, враховуючи те, що кількість комплексно-спряжених коренів z_{ai} парна, то їх внесок в сумарний аргумент φ_{A1} для $\omega = 2\pi$ дорівнює нулю, а остаточне значення фазової характеристики буде таким: $\phi_{A1}(2\pi) = 2\pi M - 2\pi(M-1)/2 = 2\pi(M+1)/2$.

Якщо при ω_i амплітудно-фазова характеристика перетинає вісь абсцис, то $P_1(\omega_i)=0$, і навпаки, якщо $P_1(\omega_i)=0$, то амплітудно-фазова характеристика перетинає вісь абсцис.

Аналогічно, значення ω_i, при яких $Q_1(\omega_i)=0$, — це в точності такі значення параметру, при яких амплітудно-фазова характеристика перетинає вісь ординат, і навпаки, якщо при ω_i амплітудно-фазова характеристика перетинає вісь ординат, то $Q_1(\omega_i)=0$.

Таким чином, значення ω_i при яких амплітудно-фазова характеристика перетинає осі координат є коренями поліномів $P_1(\omega)$ і $Q_1(\omega)$. Тоді значення $z_i = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_i}$ є коренями поліномів $P(z)$ і $Q(z)$, при цьому ніякі два сусідніх кореня не є коренями одного того самого поліному.

Якщо M парне, то поліном $P(z)$ має дійсний корінь $z_{p0}=+1$, а поліном $Q(z)$ має дійсний корінь $z_{q(M+1)}=-1$. Якщо M непарне, то поліном $P(z)$ має два дійсних кореня $z_{p0}=+1$ і $z_{p(M+1)}=-1$, а поліном $Q(z)$ дійсних коренів не має.

Більш того, справедливо таке співвідношення (якщо M парне):

$$0 = \omega_0 < \omega_{q_1} < \omega_{p_1} < \omega_{q_2} < \omega_{p_2} < ... < \omega_{q_{M/2}} < \omega_{p_{M/2}} < \omega_{M+1} = \pi ,$$

або таке співвідношення (якщо M непарне):

$$0 = \omega_0 < \omega_{q_1} < \omega_{p_1} < \omega_{q_2} < \omega_{p_2} < ...$$

$$... < \omega_{q_{(M-1)/2}} < \omega_{p_{(M-1)/2}} < \omega_{q_{(M+1)/2}} < \omega_{M+1} = \pi .$$

Теорема доведена.

4. Посилання

[1] Soong F.K., Yuang B.-h. Line spectrum pair (LSP) and speech data compression. Proc. ICASSP-84 // IEEE Int. Conf. on Acoust., and Signal Process., San Diego, Calif., 19-21 March, 1984. — V. 1. — P. 1.10.1 — 1.10.4.

[2] Коротаев Г.А. Анализ и синтез речевого сигнала методом линейного предсказания. — Зарубежная радиоэлектроника, 1990, N3.

[3] Коротаев Г.А. Некоторые аспекты линейного предсказания при анализе и синтезе речевого сигнала. — Зарубежная радиоэлектроника, 1991, N7.

[4] Коротаев Г.А. Эффективный алгоритм кодирования речевого сигнала на скорости 4,8 кбит/с и ниже. — Зарубежная радиоэлектроника, 1996, N3.

[5] Воробьев В.И., Иванов В.Н., Улахович Д.А. Спектральные пары в линейном предсказании // Радиоэлектроника. — 1991. — N12. — С. 32—37. (Изв. высш. учеб. заведений).

[6] Пономарев Е.П., Дудин В.И. Исследование точности и помехоустойчивости методов квантования и цифрового представления частных корреляций и линейных спектральных частот // Радиоэлектроника. — 1991. — N12. — С. 42—47. (Изв. высш. учеб. заведений).

[7] Иванов В.Н., Ланнэ А.А., Прокопенко В.Ю. Чувствительность спектральных пар // Радиоэлектроника. — 1991. — N12. — С. 37—42. (Изв. высш. учеб. заведений).

[8] Павлов О.И. Прямое П-преобразование в линейном предсказании речи // Радиоэлектроника. — 2000. — N12. — С. 53 — 66. (Изв. высш. учеб. заведений).

[9] Павлов О.И. Алгоритм быстрого прямого П-преобразования и особенности его математического аппарата // Радиоэлектроника. — 2001. — N2.— С. 61 — 73. (Изв.высш.учеб.заведений).

[10] Павлов О.И. Обратное П-преобразование в линейном предсказании речи // Радиоэлектроника. — 2001. — N1. — С. 61 — 73. (Изв. высш. учеб. заведений).

[11] Павлов О.И. Алгоритм быстрого обратного П-преобразования // Радиоэлектроника. — 2001. — N8.— С. 67 — 77. (Изв.высш.учеб.заведений).

[12] Павлов О.И. Свойства линейных спектральных частот высших порядков // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2001. Вып. 117. С. 62 — 64.

[13] Павлов О.И. Межкадровая интерполяция спектральной огибающей речевого сигнала в пространстве линейных спектральных частот наивысшей регрессии // Радиоэлектроника. — 2008. — N4.— С. 56 — 69. (Изв.высш.учеб.заведений).

[14] Павлов О.І., Стасевич П.А., Тертичний Г.М. Оцінка ефективності кодування спектральної обвідної мовленнєвих сигналів в просторах лінійних спектральних параметрів найвищої регресії методом кластерного аналізу // Праці 9-ої Всеукраїнської міжнародної конференції “Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів”, стор. 189—192 , Київ, 2008.

[15] Павлов О.І., Бондаренко А.С. Розпізнавання сигналів фонендоскопії в просторі лінійних спектральних параметрів найвищої регресії // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2010. — № 5. — С. 5—10.

[16] Постников М.М. Устойчивые многочлены. — М.: Наука, 1981, 176 с.