Характеристики точності алгоритмів цифрового аналізу тональних та політональних сигналів

І.А. Безвербний

Інститут кібернетики ім. Глушкова НАН України
gdan@bigmir.net

АНОТАЦІЯ

В роботі розглянуто набір споріднених між собою методів тонального аналізу, які дозволяють точно визначати частотно-фазові параметри сигналів, що складаються з гармонічних складових. Методи отримані на основі аналітичних співвідношень, тому обчислення відбувається з машинною помилкою. Завданням роботи є визначення цієї помилки та оптимальних параметрів апаратури з обмеженою розрядністю.

1. ВСТУП

Найскладнішим питанням тонального аналізу є частотний аналіз. Оскільки, частотні характеристики сигналу найповніше відображує частотний спектр, аналіз тонального сигналу відбувається за допомогою дискретного перетворення Фур'є (ДПФ). Однак ДПФ має суттєвий недолік. У разі розбіжності частоти тону аналізованого сигналу з дискретною шкалою ДПФ відбувається розмиття спектра. В результаті сигнал не може бути точно ідентифікований на осі частот. Для вирішення цієї проблеми в сучасній літературі [1-3] пропонується збільшувати дискретну шкалу. Однак, такий підхід не дозволяє остаточно вирішити проблему.

2. АПРІОРНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТНО-ФАЗОВИХ ПАРАМЕТРІВ ТОНАЛЬНИХ СИГНАЛІВ

Внаслідок перекриття амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) фільтрів гребінки ДПФ від кожного пелюстка ДПФ з'являється відповідна кількість відгуків. У роботі такий недолік ДПФ перетворено на корисне явище, що дозволяє шляхом розгляду відношення двох відгуків сусідніх фільтрів гребінки ДПФ

$$K_i = \frac{A(\omega_i)}{A(\omega_{i+1})} \qquad (1)$$

точно визначати частоту сигналу. Такий підхід не потребує визначення всього спектра, для аналізу достатньо лише комплексних значень двох спектральних характеристик для демодуляції одного тону. Таким чином, невідомі параметри сигналу визначаються за допомогою нелінійної системи рівнянь, випадковими параметрами яких є дискретні значення АЧХ відфільтрованого сигналу. Автоматизований розв'язок такої системи рівнянь (аналітично або за допомогою відомих чисельних методів [1-3]) реалізовано у вигляді алгоритму, який є частиною програмного забезпечення спеціально спроектованих засобів аналізу тональних сигналів.

2.1. Метод частотної демодуляції тонального сигналу

Однотональний аналіз передбачає, що розглядається обмежений за часом тональний сигнал постійної амплітуди, частоти і початкової фази. Завданням методу частотно-фазового аналізу є визначення невідомих частоти та початкової фази тонального сигналу. Сигнал проходить процедуру дискретизації, результатом якої є масив з n даних. Згідно робіт [4-6], система рівнянь

$$\begin{cases} \omega^{\text{вх}} = \arccos\dfrac{B(\omega_i) - K_i \cdot R_{1,2}(\omega_i)\cdot C(\omega_i)}{1 - K_i \cdot R_{1,2}(\omega_i)}; \\ \theta^{\text{вх}} = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\left(\omega^{\text{вх}}/2\right)\cdot \operatorname{Im}\left(A(\omega_i)\right)}{P_i - \operatorname{Re}\left(A(\omega_i)\right)}; \end{cases} \qquad (2)$$

дозволяє отримати шукані значення частотно-фазових параметрів апріорно визначеного тонального сигналу. Визначення невідомих частоти $\omega^{\text{вх}}$ і фази $\theta^{\text{вх}}$ відбувається згідно алгоритму:

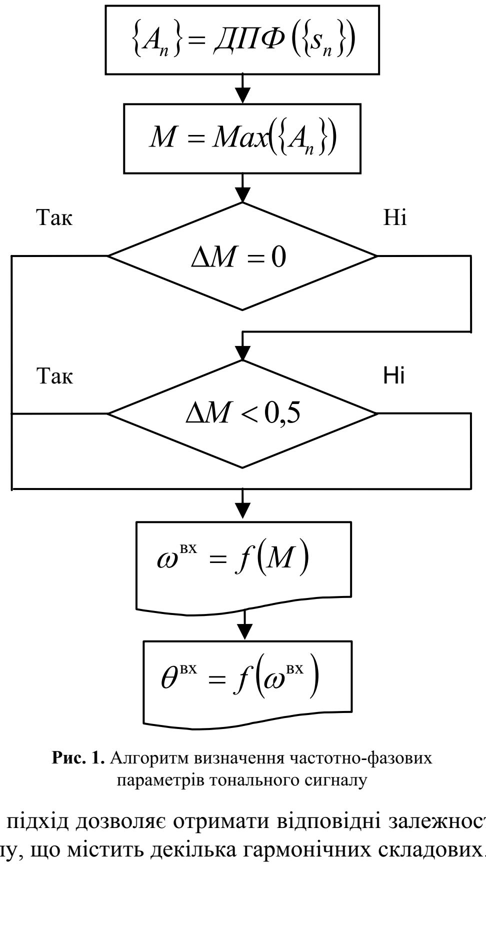

Рис. 1. Алгоритм визначення частотно-фазових параметрів тонального сигналу

Такий підхід дозволяє отримати відповідні залежності для сигналу, що містить декілька гармонічних складових.

2.2. Частотно-фазова демодуляція бітонального сигналу

Метод бітонального частотно-фазового аналізу розроблено на основі чисельно-аналітичного методу демодуляції однотонального сигналу. На відміну від методу демодуляції однотонального сигналу, цей метод є ітераційним і передбачає поетапне визначення невідомих частот і фаз вхідного сигналу. Бітональний частотно-фазовий аналіз полягає у тому, що розглядається обмежений за часом бітональний сигнал постійної амплітуди, частоти та початкової фази. Завданням частотного аналізу є визначення невідомих частот $\omega_1^{\text{вх}}$ і $\omega_2^{\text{вх}}$, а фазового аналізу – невідомих початкових фаз $\theta_1^{\text{вх}}$ і $\theta_2^{\text{вх}}$ кожного з двох тонів. Як і у випадку з однотональним сигналом, аналіз відбувається за рахунок дискретизованого масиву з n даних.

$$\begin{cases} \omega_{1,2}^{\text{вх}} = \arccos\dfrac{B(\omega_{i,k}) - K_{i,k}(\omega_{2,1}^{\text{вх}},\ \theta_{2,1}^{\text{вх}})\cdot R_{1,2}(\omega_{i,k})\cdot C(\omega_{i,k})}{1 - K_{i,k}(\omega_{2,1}^{\text{вх}},\ \theta_{2,1}^{\text{вх}})\cdot R_{1,2}(\omega_{i,k})}; \\ \theta_{1,2}^{\text{вх}} = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}(\omega_{1,2}^{\text{вх}}/2)}{\operatorname{tg}(\omega_{i,k}/2) - P_{i,k}(\omega_{2,1}^{\text{вх}},\ \theta_{2,1}^{\text{вх}})}; \end{cases} \tag{3}$$

Вирішення відбувається за допомогою «процесу» Зейделя. Рівняння слід привести до вигляду, в якому кожне з невідомих буде представлено через інші невідомі:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \varphi_1(v_n, x_n, y_n, z_n); \\ x_{n+1} = \varphi_2(v_{n+1}, x_n, y_n, z_n); \\ y_{n+1} = \varphi_2(v_{n+1}, x_{n+1}, y_n, z_n); \\ z_{n+1} = \varphi_2(v_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}, z_n); \end{cases} \tag{4}$$

де n - номер ітерації.

У загальному випадку збіжність відбувається за число ітерацій менше за 20 [7].

2.3. Частотно-фазова демодуляція політонального сигналу

Метод розроблено на основі чисельно-аналітичного методу демодуляції бітонального сигналу. Політональний частотно-фазовий аналіз полягає у тому, що розглядається обмежений за часом політональний сигнал постійної амплітуди, частоти та початкової фази. Завданням аналізу є визначення невідомих частот $\omega_1^{\text{вх}} \ldots \omega_m^{\text{вх}}$ і невідомих початкових фаз $\theta_1 \ldots \theta_m$ кожного з m тонів. Обчислення відбуваються з огляду на дискретизований масив з n даних. Як і у випадку з бітональним сигналом, задача розв'язується за рахунок побудови і вирішення системи з $2\cdot m$ нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \ldots \\ \omega_i^{\text{вх}} = \arccos\dfrac{B(\omega_i) - K_1\cdot R_{1,2}(\omega_i)\cdot C(\omega_i)}{1 - K_1\cdot R_{1,2}(\omega_i)}; \\ \ldots \\ \theta_i^{\text{вх}} = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}(\omega_i^{\text{вх}}/2)}{\operatorname{tg}(\omega_i/2) - P_i}; \\ \ldots \end{cases} \tag{5}$$

Розв'язок такої системи рівнянь реалізується за допомогою «процесу» Зейделя. Для типового випадку відбувається розв'язок за число ітерацій менше за 400 [8].

Оскільки даний метод не обмежений кількістю тонів у сигналі, він розглядається як основа методу уточнення дискретного спектра низькочастотного сигналу, що містить кількість частот меншу за $(N-1)/2$, що є необхідною вимогою теореми Котельникова.

3. АНАЛІЗ РОЗРЯДНОСТІ АЛГОРИТМУ ДЛЯ ЕОМ З ФІКСОВАНОЮ КОМОЮ

В роботах [9-11]. розглядається розрахунок необхідного запасу розрядної сітки Δn для нерекурсивних алгоритмів, тобто визначення кількості додаткових розрядів, необхідних для збільшення розрядності вхідних даних під час обчислення результату із заздалегідь визначеною помилкою. Згідно з цим підходом, у випадковому машинному операнді

$$\hat{x}_{n+m} = 0, b_1, \ldots, b_n, a_1, \ldots, a_m \quad , \tag{6}$$

з яким здійснюються обчислення, відкидаються m молодших розрядів з подальшим округленням. В результаті такої процедури отримується новий операнд $\hat{x}_n = 0, b_1, \ldots, (b_n + a_1)$. Тоді

$$\hat{x}_{n+m} = \hat{x}_n + \Delta\hat{x} \quad . \tag{7}$$

Розрядність вхідних даних може бути обчислена за формулою

$$\Delta\hat{x} = 2^{-(n_x+1)}\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot 2^{-i} > 2^{-(n_x+1)}\sum_{i=1}^{m} 2^{-i} \quad , \tag{8}$$

звідки

$$n_x < \log_2 \frac{\sum_{i=1}^{m} 2^{-i}}{2\cdot\Delta\hat{x}} \quad , \tag{9}$$

де n_x — розрядність вхідного параметра,

В такому випадку розрядність результату обчислення

$$n = n_x + \Delta n \quad . \tag{10}$$

Визначення Δn відбувається за допомогою формули

$$D[\Delta\hat{z}_м] \le 2\delta \cdot D[\Delta\hat{z}_c] \quad , \tag{11}$$

де:

δ — певна мала величина, на яку збільшується середньоквадратичне значення спадкової, за умови рівного нулеві математичного сподівання, повної машинної помилки;

$$\Delta\hat{z}_c = \frac{\partial\hat{F}}{\partial\hat{x}}\cdot\Delta\hat{x} \quad \text{— спадкова помилка;} \tag{12}$$

$$\Delta\hat{z}_м = \frac{\partial\hat{F}}{\partial\hat{k}}\cdot\Delta\hat{k}_n + \Delta\hat{\zeta} \quad \text{— машинна помилка;} \tag{13}$$

$$D[\Delta\hat{z}_м] = \left[\frac{\partial\hat{F}}{\partial\hat{x}}\right]^2 \cdot D[\Delta\hat{x}] \tag{14}$$

— дисперсія машинної помилки;

$$D[\Delta\hat{z}_c] = \left[\frac{\partial\hat{F}}{\partial\hat{k}}\right]^2 \cdot D[\Delta\hat{k}] + D[\Delta\hat{\zeta}] \tag{15}$$

— дисперсія спадкової помилки;

$\hat{F}(\hat{x}_n)$ — функціональний оператор перетворення інформації в машині.

3.1. Характеристики точності чисельно-аналітичних методів частотно-фазового аналізу тональних сигналів

Частотно-фазовий аналіз, що проводиться на ЕОМ з плаваючою комою на базі наведених методів, дозволяє отримати результат з дуже малою помилкою. Однак, дешеві сигнальні процесори, що використовують принцип роботи з фіксованою комою, цілком придатні для роботи з низькочастотними однотональними сигналами. На підтвердження цього нижче розглянуто розрахунок необхідної розрядності ЕОМ з фіксованою комою для найпростішого випадку – методу частотно-фазового аналізу однотонального сигналу. Попередньо приймається, що тригонометричні та обернені тригонометричні функції визначаються за допомогою високоточного методу, побудованого на основі відомих методів обчислення елементарних функцій [12-14], тому спадкову помилку можна розглядати рівною нулеві.

3.1.1. Функціональний оператор частотного аналізу

$$F(\hat{x})=\frac{N}{2\cdot\pi}\cdot\frac{d-\hat{x}\cdot g}{1-\hat{x}\cdot h}\quad, \tag{16}$$

де

$\hat{x}=k\cdot\hat{K}$, k — коефіцієнт масштабування,

d, g, h — константи, що містяться в пам'яті машини.

В такому випадку $\Delta\hat{x}=\Delta\hat{K}\cdot\hat{k}+\Delta\hat{k}\cdot\hat{K}+\Delta\hat{\zeta}$,

а помилка на виході

$$\Delta\hat{z}=-\frac{N}{2\cdot\pi}\cdot\frac{-\frac{g}{1-\hat{x}\cdot h}+\frac{(d-\hat{x}\cdot g)\cdot h}{(1-\hat{x}\cdot h)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{d-\hat{x}\cdot g}{1-\hat{x}\cdot h}\right)^2}}\cdot\Delta\hat{x}+\Delta\hat{\zeta}_1\quad, \tag{17}$$

Таким чином, знаходиться мінімальне значення необхідного запасу розрядної сітки:

$$\Delta n\geq\frac{1}{2}\cdot\log_2\left(\frac{R}{S}\right)\quad\text{, де,} \tag{18}$$

$$R=\left(\frac{N}{2\pi}\cdot\frac{-\frac{g}{1-\hat{x}_{\min}\cdot h}+\frac{(d-\hat{x}_{\min}\cdot g)\cdot h}{(1-\hat{x}_{\min}\cdot h)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{d-\hat{x}_{\min}\cdot g}{1-\hat{x}_{\min}\cdot h}\right)^2}}\right)^2+1\quad, \tag{19}$$

$$S=2\cdot\delta\cdot\left(\frac{N}{2\pi}\cdot\frac{-\frac{g}{1-\hat{x}_{\min}\cdot h}+\frac{(d-\hat{x}_{\min}\cdot g)\cdot h}{(1-\hat{x}_{\min}\cdot h)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{d-\hat{x}_{\min}\cdot g}{1-\hat{x}_{\min}\cdot h}\right)^2}}\right)^2 \tag{20}$$

Тоді загальна кількість розрядів дорівнює $n>\log_2\frac{\sum_{i=1}^{m}2^{-i}}{2\cdot\Delta\hat{x}}+\frac{1}{2}\cdot\log_2\left(\frac{R}{S}\right)$.

3.1.2. Функціональний оператор фазового аналізу

$$F(\hat{x})=\frac{u\cdot\mathrm{Im}(\hat{x})}{v\cdot\mathrm{Re}(\hat{x})}\quad, \tag{21}$$

де $\hat{x}=k\quad\hat{K}$, k — коефіцієнт масштабування,

u, v — константи, що містяться в пам'яті машини.

Помилка на виході

$$\Delta\hat{z}\;\frac{u\cdot\Delta\hat{x}}{v\cdot\mathrm{Re}(\hat{x})\cdot\left(1+\frac{u^2\cdot\mathrm{Im}(\hat{x})}{v^2\cdot\mathrm{Re}(\hat{x})}\right)}-\frac{u\cdot\mathrm{Im}(\hat{x})\cdot\Delta\hat{x}}{v\cdot\mathrm{Re}(\hat{x})^2\cdot\left(1+\frac{u^2\cdot\mathrm{Im}(\hat{x})}{v^2\cdot\mathrm{Re}(\hat{x})}\right)}+\Delta\hat{\zeta}_1\quad. \tag{22}$$

Таким чином, мінімальне значення необхідного запасу розрядної сітки може прийняти одне з двох наступних виразів:

$$\Delta n_1\geq\frac{1}{2}\cdot\log_2\left(\frac{R_1}{S_1}\right)\quad\text{, де} \tag{23}$$

$$R_1=\left(\frac{u}{v\cdot\mathrm{Re}(\hat{x})\cdot\left(1+\frac{u^2\cdot\mathrm{Im}(\hat{x})_{\max}}{v^2\cdot\mathrm{Re}(\hat{x})}\right)}-\frac{u\cdot\mathrm{Im}(\hat{x})_{\max}}{v\cdot\mathrm{Re}(\hat{x})^2\cdot\left(1+\frac{u^2\cdot\mathrm{Im}(\hat{x})_{\max}}{v^2\cdot\mathrm{Re}(\hat{x})}\right)}\right)^2+1 \tag{24}$$

$$S_1=2\cdot\delta\cdot\left(\frac{u}{v\cdot\mathrm{Re}(\hat{x})\cdot\left(1+\frac{u^2\cdot\mathrm{Im}(\hat{x})_{\max}}{v^2\cdot\mathrm{Re}(\hat{x})}\right)}-\frac{u\cdot\mathrm{Im}(\hat{x})_{\max}}{v\cdot\mathrm{Re}(\hat{x})^2\cdot\left(1+\frac{u^2\cdot\mathrm{Im}(\hat{x})_{\max}}{v^2\cdot\mathrm{Re}(\hat{x})}\right)}\right)^2 \tag{25}$$

Тоді загальна кількість розрядів дорівнює

$$n>\log_2\frac{\sum_{i=1}^{m}2^{-i}}{2\cdot\Delta\hat{x}}+\frac{1}{2}\cdot\log_2\left(\frac{R_1}{S_1}\right)\quad. \tag{26}$$

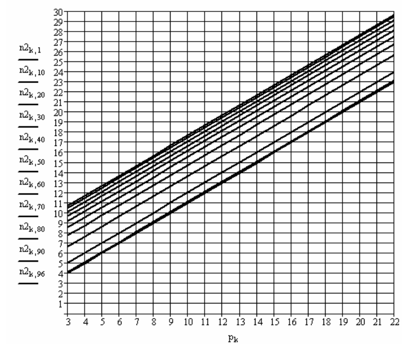

Рис. 2. Залежність вихідної розрядності обчислень n (вісь ординат) від заданої вхідної розрядності p (вісь абсцис) підчас частотного аналізу залежно від параметра K, $K=1,10,20,30,40,50,60,70,80,90,99$

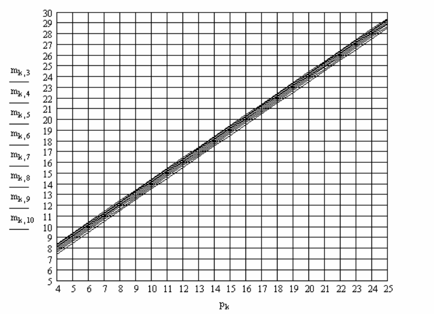

Рис. 3. Залежність вихідної розрядності обчислень n (вісь ординат) від заданої вхідної розрядності p (вісь абсцис) підчас фазового аналізу залежно від параметра K, $K=1,10,20,30,40,50,60,70,80,90,99$

4. ПІДСУМОК

Отримані розрахунки показують, що розрядність 16 біт дозволяє отримувати результат з помилкою $\Delta\hat{z} < 0{,}01$, тобто досягати практично ідеальної точності. Також, з кожного графіка на Рисс. 2 і 3 можна бачити, що розрядність не повинна бути меншою за 6 біт, бо в іншому разі точне обчислення по всьому набору констант u, v та d, g, h не забезпечується.

Таким чином, може бути розроблено контролер аналогової апаратури, що має в своєму складі стандартний набір цифрових приладів таких як постійний запам'ятовальний пристрій, що містить програму, інтерфейсну частину, що містить 24-розрядне сігма-дельта АЦП та пов'язує контролер з іншими складовими і системою управління приймального пристрою, фільтр низьких частот призначений для відрізання високих частот тонального сигналу, а також власне сигнальний процесор з частотою дискретизації 16 кГц. тоді як час обробки сигналу 2 мкс.

1. На основі розрахунку розрядності необхідної для отримання вихідного результату з заданою високою точністю доведено, що дешеві сигнальні процесори з фіксованою комою цілком придатні до використання з метою частотного і фазового аналізу низькочастотних тональних сигналів.

2. Виявлено, що для спеціальних (неуніверсальних) систем для сигналів із заздалегідь заданими параметрами вхідного сигналу може бути використана розрядна сітка менше 16 біт. Інакше кажучи, система демодуляції може бути побудована за допомогою ще дешевшої елементної бази. Також можуть бути реалізовані можливості щодо мінімізації системи.

3. Встановлено, що методи частотного і фазового аналізу низькочастотних однотональних сигналів для ЕОМ з фіксованою комою не вимагають високої кількості, але вимагають високої точності щодо масиву вибірок вхідного сигналу.

4. Виявлено, що обчислення характеристик точності і розрядності вихідного результату методів частотного і фазового аналізу однотональних сигналів для ЕОМ з фіксованою комою дозволяють отримувати результат з вихідною помилкою $\Delta\hat{z} < 0{,}01$, тобто досягати ідеальної точності, з розрядністю 16 біт.

5. Таким чином показано, що може бути обрана відповідна цифрова апаратура цифро-аналогового перетворення. АЦП, що використовують сигма-дельта перетворення, не розраховані на високу частоту дискретизації, однак дозволяють отримувати дані з високим розрішенням, а саме 16-24 біт. Такі АЦП цілковито задовольняють означеним вимогам.

5. ЛІТЕРАТУРА

[1] Jaine V.K. Точные измерения аналоговых сигналов методом быстрого преобразования Фурье с интерполяцией. / V.K. Jaine, W.L. Collins, D.C. Davis // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement - 1979. – Vol. 28 - № 2. - С. 113-122.

[2] Offelli C. Interpolation techniques for real-time multifrequency waveform analysis / C. Offelli, D. Petri // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 1990. - №39. – С. 106-110.

[3] Zhu L.-M. Noise influence on estimation of signal parameter from the phase difference of discrete Fourier transforms. / L.-M. Zhu, H.-X. Li, H. Ding, Y.-L. Xiong // IEEE Mechanical Systems and Signal Processing. – 2002. - №16. – С. 991-1004.

[4] Семотюк М.В. Численно-аналитический метод спектрального анализа тональных сигналов / М.В. Семотюк // УСіМ. – 2001. - №1. - С. 36-42.

[5] Безвербний І.А. Частотний демодулятор з використанням дискретного перетворення Фур'є / Безвербний І.А. // Комп'ютерні засоби, мережі та системи [Зб. наук. праць / ред. Романов В.О. та ін.]. - К. :Інститут Кібернетики, 2004. - 163 с., С.72-79.

[6] Безвербний І.А. Чисельно-аналітичний метод цифрового фазового аналізу однотональних сигналів / Безвербний І.А. // Комп'ютерні засоби, мережі та системи [Зб. наук. праць / ред. Романов В.О. та ін.]. - К. :Інститут Кібернетики, 2004. - 160 с., С.41-47.

[7] Безвербний І.А. Рекурсивний метод частотнофазового аналізу двотонального частотно-маніпульваного сигналу / Безвербний І.А. // Математичні машини і системи. – 2006. - №4. - С. 164-173.

[8] Безвербний І.А. Чисельно-аналітичний метод демодуляції тональних сигналів / Безвербний І.А. // УСіМ. – 2005. - №4. - С. 19-25.

[9] Точность вычислительных устройств и алгоритмов / [Соренков Э.И., Телига А.И., Шаталов А.С.]; под ред. А.С. Шаталова. - М. : Машиностроение, 1976. - 200 с.

[10] Желнов Ю.А. Точностные характеристики управляющих машин / Ю.А. Желнов. - М. : Энергоатомиздат, 1983. - 136 с.

[11] Иванов В.В. Общая схема оценки полной погрешности / В.В. Иванов. // Точность и надежность кибернетических систем [Зб. наук. праць / ред. Доступов Б.Г, Верлань А.Ф.]. - К. : Наукова думка, 1970, - 176 с. С. 12-22.

[12] Люстерник Л.А. Математический анализ. Вычисление элементарных функций / Л.А. Люстерник, О.А. Червоненкис, А.Р. Янпольский. - М. : ГИФМЛ, 1963. - 248 с.

[13] Байков В.Д. Аппаратурная реализация элементарных функций в ЦВМ / В.Д. Байков В.Б. Смолов. - Л. : ЛГУ, 1975. - 96 с.

[14] Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. - М. : Мир, 1980. - с.280