

# Обробка нормального білого шуму в методах узагальненого $Q$ – перетворення зображення

Ю.Ф. Кутаєв<sup>1</sup>, Л. І. Тимченко<sup>11</sup>, Р.В. Макаренко<sup>11</sup>, Н.І. Кокряцька<sup>11</sup>

<sup>1</sup>«ГУП НПО Астрфизика» Росія, м. Москва

<sup>11</sup>Телекомунікаційні технології та автоматика

Державний економіко-технологічний університет транспорту, Україна, м. Київ

E-mail:timchen@list.ru

## 1. ABSTRACT

This paper examines the choice of teaching criteria of correlation-extreme measuring device of coordinates, using the methods of generalize  $Q$ -transformation of images. The size of local different threes hold during filtration of normal white noise is offered as a criterion of teaching.

## 2. ВСТУП

Сучасні радіотехнічних системи різного призначення характеризуються роботою в складній заводській обстановці. При проектуванні систем зв'язку стикаються з задачею виявлення сигналів в шумах. Фізичний зміст кореляційної обробки при цьому полягає в суміщенні зображень (сигналів).

## 3. Навчання по локально різницевого порогу при фільтрації нормального білого шуму в методах узагальненого $Q$ -перетворення зображень

Метою даної статті є аналіз процесу навчання корелятора з передобробленням зображення по методу узагальненого  $Q$  –препарата УОП, який проводить вибір величини  $\psi_{\text{онт}}$  локального різницевого порогу (ЛРП), при цьому мінімізує середню величину відліків рангової взаємної кореляційної функції (РВФК) еталонного і поточного зображень, які і реалізує нормальний білий шум.

Графік щільності вірогідності  $P(u)$  розподілення амплітуди білого шуму приведено на рис. 1

$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{u^2}{2 \cdot \sigma^2}} \quad (1)$$

де  $\sigma$  - середнє квадратичне відхилення (СКВ) амплітуди шумового сигналу.

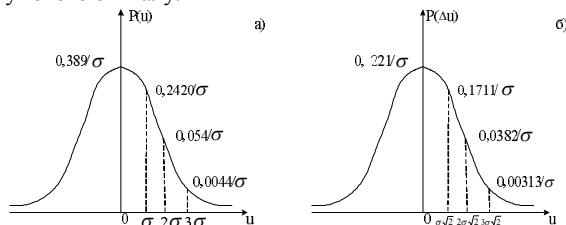


Рисунок 1: Графіки щільності вірогідності розподілення амплітуди білого шуму (а) і щільності вірогідності розподілення різниці відліків білого шуму (б)

Зауважимо, що (1) справедливо для опису шуму каналу передавання телевізійного зображення або шуму телевізійного фотоприймача, але не може застосовуватись для опису одно полярного сигналу від випадкового фонового зображення з нормальним законом розподілення щільності вірогідності яскравості.

Квантування сигналу різницевого сигналу

$$\Delta u_{i,j} = u_{i,j} - u_{i+r_x, j+r_y}, \text{ де } (r_x, r_y) = \vec{r} - \text{ранг УОП-та, на } m_{zp}$$

рівнів квантування призводить до заміни безперервної функції розподілення  $P(\Delta u)$ , не обмеженої по

протяжності, ґраткову функцію  $\rho_p(\Delta u_n)$ , де  $\Delta u_n = \frac{\Delta u}{\sqrt{2} \cdot \sigma}$ ,

яка обмежена (рис. 1) за протяжністю числом  $m_{zp}$ , яке

пов'язано з довірливим інтегралом  $2 \cdot k_\sigma \cdot \sigma \cdot \sqrt{2}$  і

довірливою вірогідністю  $P_{\text{доок}_\sigma}$  наступними виразами:

$$m_{zp} \geq \text{INT} \left[ \frac{1}{1 - P_{\text{доок}_\sigma}} + 0,5 \right], \quad (2)$$

$$P_{\text{доок}_\sigma} = 2 \int_0^{k_\sigma \sqrt{2} \sigma} \rho(\Delta u) d\Delta u = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma \sqrt{2}} \int_0^{k_\sigma \sqrt{2} \sigma} e^{-\frac{\Delta u^2}{2(\sigma \sqrt{2})^2}} d\Delta u = \quad (3)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{k_\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 2\Phi_0(k_\sigma).$$

Функціональна залежність  $m_{zp}(P_{\text{доок}_\sigma})$  в випадку рівності в (2) відображена в табл.1.

Таблиця 1: Функціональна залежність  $m_{zp}(P_{\text{доок}_\sigma})$

$k_\sigma$	1	2								3			4
$P_{\text{доок}_\sigma}$	0,6827	0,9375	0,9545	0,9688	0,9844	0,9922	0,9961	0,9973	0,9980	0,999	0,9999	0,9999	0,9999
$m_{zp}$	4	16	22	32	64	128	256	371	512	1024	10000	15773	
$m'_{zp}$	8	32	44	64	128	256	512	742	1024	2048	2000	31546	

Препарування слідує за квантуванням, тому (2) має вид

$$m'_{zp} \geq 2\text{INT} \left[ \frac{1}{1 - P_{\text{доок}_\sigma}} + 0,5 \right] = 2m_{zp} \quad (4)$$

Кількість відліків  $m_f$  поточного одновимірного шумового зображення  $F(i, j)$  визначається наступним чином:

$$m_f \geq 2INT \left[ \frac{1}{1-P_{\text{ооока}}} + 0,5 \right] - r \quad (5)$$

де  $r$  – ранг (УОП-та) зображення.

Нехай  $m_g^r$  – довжина УОП – та одновимірного еталонного шумового зображення  $G(i', j')$

$$m_g^r = m_g^r + r, \quad (6)$$

при цьому  $m_g^r = m_{g,0} + m_{g,+} + m_{g,-}$ , де  $m_{g,0}$ ,  $m_{g,+}$ ,  $m_{g,-}$  – числа ненульових відліків нульового, позитивного і негативного УОП – ов еталонного шумового зображення.

Розглянемо загальний випадок  $P_0 \neq P_n = \frac{1-P_0}{2}$ ,

застосуємо той факт, що максимум  $P_{H1}$  при варіюванні набору  $(m_{g,0}, m_{g,+}, m_{g,-})$  має місце при  $m_{g,0} = m_g P_0 m_g^0$ ,

$$m_{g,+} = m_{g,-} = m_g \frac{(1-P_0)}{2} = m_g^+ = m_g^-$$

$$P_{H1} = \sum_{m=1}^{m_g} m \sum_{m_{1,0}, m_{1,+}, m_{1,-}} \binom{m_{g,0}}{m_{1,0}} \binom{m_{g,+}}{m_{1,+}} \binom{m_{g,-}}{m_{1,-}} P_0^{m_{1,0}} \left( \frac{1-P_0}{2} \right)^{m-m_{1,0}} \times (P_0 + P_n)^{m_{g,0}-m_{1,0}} \times (P_0 + P_n)^{m_{g,-}-m_{1,-}}, \quad (7)$$

де  $m_g = m_{g,0} + m_{g,+} + m_{g,-}$ ,  $m = m_{1,0} + m_{1,+} + m_{1,-}$ ,  $0 \leq m_{1,0} \leq m_{g,0}$ , тобто  $m_{1,0} = 0$ ,  $m_{g,0}$ , аналогічно  $m_{1,+} = 0$ ,  $m_{g,+}$  і  $m_{1,-} = 0$ ,  $m_{g,-}$ .

На рис.2. приведено якісна залежність при фіксованому  $m_g$ .

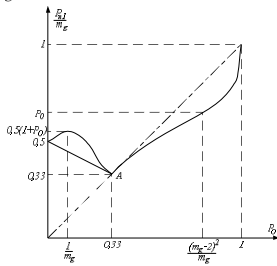


Рисунок 2: Графік функціональної залежності  $P_{H1}(\psi_H)$

Можно показати, що поблизу точки А графік близький до асимптот  $0,5m_g(1-P_0)$  і  $m_g P_0$  (рис.2) зліва і праворуч від цієї точки відповідно

$$P_{H1} \approx \begin{cases} 0,5m_g(1-P_0) = m_g P_H, & \text{при } (0,33 - \varepsilon, 0,33), \\ m_g P_0, & \text{при } (0,33, 0,33 + \varepsilon), \end{cases} \quad (8)$$

де  $\varepsilon > 0$  і  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Зведемо формули для обчислення  $P_{H1}$  в табл.2.

Таблиця 2: Формули для обчислення  $P_{H1}$  і  $P_0$

$P_0$	0	$0 < P_0 \ll P_n$ $P_0 = \frac{1}{m_g}$	$P_0 = P_n = \frac{1}{3}$	$\frac{P_n \ll P_0 < 1}{P_0 = (m_g - 2)/m_g}$	1
$P_{H1}$	$\frac{m_g}{2}$	$\frac{(m_g^2 + 1)}{2m_g}$ $m_g \frac{(1 + P_0^2)}{2}$ $m_g \frac{(1 + P_0)}{2}$	$m_g(1 - P_0)/2$  $m_g P_0$	$\frac{(m_g - 2)^2}{m_g}$  $m_g P_0^2$	0

Умова  $P_0 = P_n = \frac{1}{3}$  для точки екстремуму А на рис.

2, при якій  $m_g^0 = m_g^+ = m_g^- = m_g^r = \frac{m_g}{3}$ , співпадає з

умовою максимуму сумарного абсолютного рангового запасу [1] для еталонного зображення, причому в показано, що при максимумі цього запасу забезпечується максимальне загострення піку сумарної автокореляційної функції (САКФ) еталонного зображення і покращує умови кореляційного виявлення еталонного зображення на складному фоні або допускається велика збіжність еталонного і фонових зображення.

З (7) легко бачити, що при тій же умові  $P_0 = P_n$  для  $P_{H1}$  справедливо

$$P_{H1}^r = \frac{\sum_{\tau=0}^{m_f-r} Q_{fg}^r(\tau)}{m_f} \approx \frac{\sum_{\tau=0}^{m_f-r} Q_{fg}^r(\tau)}{3^{m_g}} \quad (9)$$

де  $Q_{fg}^r(\tau)$  – рангова взаємкореляційна функція (РВКФ) еталонного і поточного зображення [1],  $\tau$  – параметр зміщення еталонного зображення відносно поточного зображення.

Побудова алгоритму процесу навчання по ЛРП можливо при застосуванні (9)

$$\psi_H = \begin{cases} \left(1 - \frac{2P_{H1}}{m_g}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \psi_H, & \text{при } \sum_{\tau} Q_{fg}^r(\tau) \leq 0,33 \sum_{\tau} Q_{fg}^r(\tau), \\ \frac{P_{H1}}{m_g} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \text{при } \sum_{\tau} Q_{fg}^r(\tau) \leq 0,33 \sum_{\tau} Q_{fg}^r(\tau), \end{cases} \quad (10)$$

звідки для  $n$ -го циклу процесу навчання отримемо

$$\Delta \psi_H^{(n+1)} = \begin{cases} -\frac{2\Delta P_{H1}^{(n)}}{m_g} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \text{при } \sum_{\tau} Q_{fg}^{r(n)}(\tau) \leq 0,33 \sum_{\tau} Q_{fg}^{r(n)}(\tau), \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( -\frac{\Delta P_{H1}^{(n)}}{m_g} + 1 \right), & \text{при } \sum_{\tau} Q_{fg}^{r(n)}(\tau) \leq 0,33 \sum_{\tau} Q_{fg}^{r(n)}(\tau), \end{cases} \quad (11)$$

$$\Delta P_H^{(n)} = P_{H1}^{(n)} = P_{H1}^{(n)} - \frac{m_g}{3}, \quad (12)$$

$$\psi_H^{(n+1)} = \psi_H^{(n)} + \Delta \psi_H^{(n+1)}, \quad (13)$$

$$\psi_H^{(0)} = \tilde{\psi}_{H, \text{оом}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (14)$$

Блок-схема алгоритму процесу навчання, заснованого на обчисленні РВКФ УКП-та шумового зображення поточного кадру фотоприймача і згенерованого УКП-та еталонного шумового зображення, приведена на рис.3

Інший варіант алгоритму на рис.4, має переваги в тому що процес навчання по ЛРП єдино подібний, але складний в реалізації і його можна суттєво спростити.

Спрощення основане на тому що для поточного шумового зображення має місце  $m_{f,0} = m_f \cdot P_0$

$$0,5(m_{f,+} + m_{f,-}) = m_f \left( \frac{1-P_0}{2} \right) = m_f P_n \quad (15)$$

при цьому (15) відповідає виразу (8) для  $P_{H1}$ , або покласти, що  $m_g^r = m_f^r$  – довжина еталонного зашумленого зображення.

Підставивши в (15)

$$m_f \approx \left( \frac{1}{1-P_{\text{ооока}}} \right) + r \approx \frac{1}{1-P_{\text{ооока}}} \approx m_f^r, \quad (16)$$

$$P_0 \equiv \begin{cases} 0,5 \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \psi_H \right), & \text{при } \psi_H \in (\psi_{H,omm} - \varepsilon, \psi_{H,omm}], \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \psi_H, & \text{при } \psi_H \in [\psi_{H,omm}, \psi_{H,omm} + \varepsilon), \end{cases} \quad (17)$$

де  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , отримуємо

$$\Delta \psi_H = \begin{cases} \sqrt{2\pi} \Delta m_{f,0}^r (1 - P_{доок_\sigma}), & \text{при } \Delta m_{f,0} > 2\varepsilon, \\ -\sqrt{\frac{\pi}{2}} m_{f,0}^r (1 - P_{доок_\sigma}), & \text{при } \Delta m_{f,0} < -\varepsilon, \end{cases} \quad (18 \text{ а,б})$$

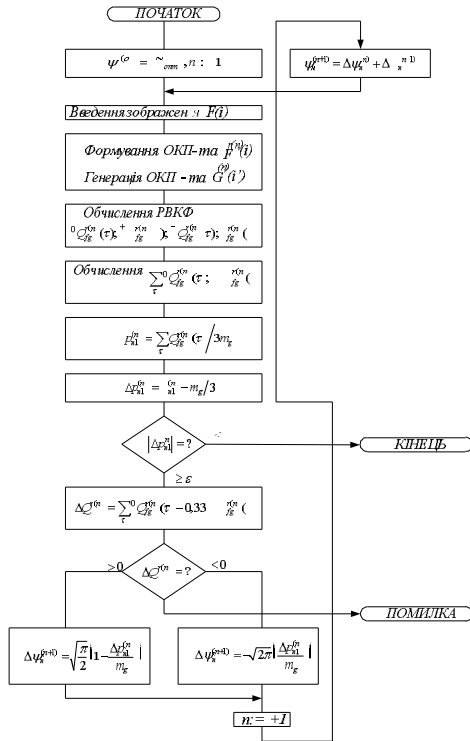


Рисунок. 3: Блок-схема алгоритму процесу навчання, заснованого на обчислюванні РВКФ ОКП-та шумового зображення поточного кадру (поточної стрічки) фотоприймача і згенерованого ОКП-та еталонного шумового зображення.

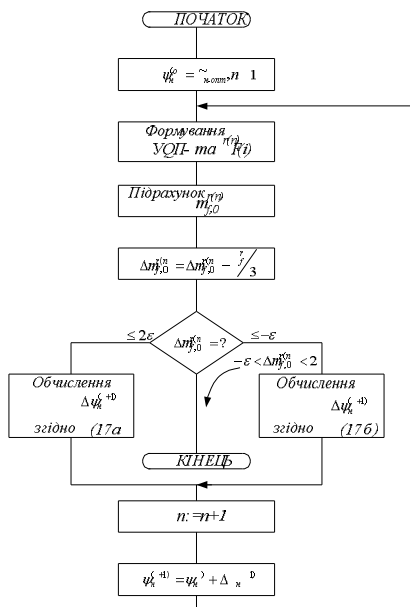


Рисунок. 4: Схема алгоритму процесу навчання

Основна перевага даного алгоритму – гранична простота, так як він не потребує обрахування РВКФ і може бути сумісний з виведенням і препаруванням кадру поточного зображення.

Повернемося до вибору початкового значення ЛРП (14). Застосовувати умову  $\psi_H^{(0)} = \tilde{\psi}_{H,omm} = 0,33\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  не зовсім коректно, оскільки справедливо для нормованого порогу  $\psi_H = \Delta U / \sigma\sqrt{2}$ , тоді як реальне препарування здійснюється відносно порогу

$$\psi = \psi_H \sigma \sqrt{2} \quad (19)$$

для отримання, якого необхідно вимірювання або знання дисперсії  $\sigma^2$  вхідного або  $2\sigma^2$  різницевого шумового зображення.

Нехай сигнал поточного зображення  $F(i)$  являє собою реалізацію нормального білого шуму. Тоді для суми  $m_f$  відліків  $F(i)$  справедливо

$$-\frac{k_\sigma^\sigma}{\sqrt{m_f}} \leq \sum_{i=0}^{m_f-1} f_i \leq \frac{k_\sigma^\sigma}{\sqrt{m_f}},$$

де  $k_\sigma = \arg \left[ \Phi_0(k_\sigma) = P_{доок}/2 = (m_f - 1)/2m_f \right]$ ,

$$\sigma \geq \frac{\sum_{i=0}^{m_f-1} f_i \sqrt{m_f}}{k_\sigma}, \quad (20)$$

Іншу, більш просту обчислювальну оцінку  $\sigma$  можна отримати з виразу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} m_f \approx \sum_{i=0}^{m_f} P_i^0, \quad (21)$$

де

$$P_i^0 = \begin{cases} 0, & \text{при } f_i = 0, \\ 1, & \text{при } f_i \neq 0. \end{cases} \quad (22)$$

звідси

$$\sigma \approx \frac{m_f}{\sqrt{2\pi} \sum_{i=0}^{m_f} P_i^0}. \quad (23)$$

Простота виразу (23) досягається тим, що сума  $\sum_{i=0}^{m_f} P_i^0$  дорівнює числу нульових відліків шумового зображення.

Меншу похибку можна отримати, якщо визначити  $\sigma$  з рівняння

$$m_f \left( 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) = \sum_{i=0}^{m_f} P_i^+ + \sum_{i=0}^{m_f} P_i^- = n^+ + n^-, \quad (24)$$

Гірше, ніж (20), тобто оцінка  $\sigma$  по вибіркового середньому значенню відліків цього зображення, так як легко показати, що при  $n^+ \approx n^- \approx m_f/2$

$$-\frac{k_\sigma \sigma \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{n^+}{n} + \frac{n^-}{n}}} \leq f_{cp} \leq \frac{k_\sigma \sigma \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{n^+}{n} + \frac{n^-}{n}}}. \quad (24)$$

Звідси при одних і тих же  $k_\sigma$ ,  $\sigma$ ,  $m_f$ ,  $f_{cp}$  має місто  $\sim$  у  $\sqrt{2}$  рази більший розкид, ніж середне

вибіркове значення поточного шумового зображення, не кажучи вже про значному ускладненні алгоритму обчислення оцінки  $\sigma$ .

Оцінки (20), (23), (24) і (24) для випадку різницевого зображення приймає наступний вид відповідно:

$$\sigma_{\Delta} \geq \left| \sum_i \Delta f_i^r \right| \sqrt{m_f k_{\sigma}}, \quad (25)$$

$$\sigma \approx \frac{m_f}{\sqrt{2\pi}} \sum_i \Delta P_i^0,$$

$$m_f \left( 1 - \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right) = \sum_i P_i^+ + \sum_i P_i^- = n^+ + n^-, \quad (26)$$

$$-\frac{k_{\sigma} \sigma \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{n^+ + n^-}{2}}} \leq \Delta f_{cp} \leq \frac{k_{\sigma} \sigma \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{n^+ + n^-}{2}}}, \quad (27)$$

Розглянемо питання формування середньої оцінки  $\tilde{\Delta f}^r$ , яка забезпечує максимальне спрощення обчислення порога  $\psi^{(0)}$ , при цьому, як і раніше

$$\psi^{(0)} \approx \psi_{onm} = \psi_{H, onm} \sigma_{\Delta} = \tilde{\Delta f}^r. \quad (28)$$

Згідно [8] для випадкової величини  $\Delta f^r$  с нормальним розподіленням щільності вірогідності  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{\Delta} = M |\Delta f^r|$ , звідки

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{\Delta} = M \Delta f^r + M \left| \Delta f^r \right|, \quad (29)$$

$$\Delta f^r = \text{sgn} \Delta f^r, \quad (30)$$

$$\Delta f^r = \text{sgn}(-\Delta f^r).$$

Підставивши (30), (29) в (28), отримаємо:

$$\tilde{\Delta f}^r = \frac{1}{2} \left\{ M \left[ \Delta f^r \text{sgn} \Delta f^r \right] \right\} + \left\{ M \left[ \Delta f_i^r \text{sgn}(-\Delta f_i^r) \right] \right\} = (31)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum_i \Delta f_i^r \text{sgn} \Delta f_i^r}{\sum_i \text{sgn} \Delta f_i^r} + \frac{\left| \sum_i \Delta f_i^r \text{sgn}(-\Delta f_i^r) \right|}{\sum_i \text{sgn}(-\Delta f_i^r)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum_i^+ \Delta f_i^r}{n^+} + \frac{\left| \sum_i^- \Delta f_i^r \right|}{n^-} \right\},$$

Таким чином, процес навчання ЛРП зводиться до знаходження середнього  $\tilde{\Delta f}^r$  модуля вибірових середніх значень позитивних і негативних різниць в різницевому шумовому або фоновому зображенні і встановленню ЛРП  $\psi = \tilde{\Delta f}^r$ . При цьому, враховується стаціонарність шуму у сусідніх кадрах зображення, для економії пам'яті знаходження оцінки  $\tilde{\Delta f}^r$  доцільно сумішати з введеннями поточного кадру зображення, а поріг  $\psi = \tilde{\Delta f}^r$  застосувати при перед обробленням за методом УОП наступних за цих кадрів (кількість яких визначається часом стаціонарності шуму або фону відповідно).

### 3. ВИСНОВКИ

1. Доведено, що:

- залежність  $P_{H1}(P_0)$  середньої величини відліків

рангової РВКФ ОКП-ів еталонного і поточного зображень, являє собою реалізацію нормального білого шуму, від вірогідності  $P_0$  формування відліків нульового ОКП-та, в свою чергу залежний від ЛРП  $\psi$ , має чітко виражений екстремум (мінімум) в точці  $P_0 = P_{\infty} = 0,33$ ;

-  $P_{H1}(P_0)$  - екстремум  $P_{H1}(P_0)$  відповідає

рівності  $m_g^0 = m_g^+ = m_g^- = \frac{m_g}{3}$  чисел одиничних відліків зображень, при цьому величина екстремуму  $P_{H1}(P_0)$

дорівнює одній третині від загальної кількості відліків ОКП-та еталонного зображення;

- залежність  $P_{H1}(P_0)$  в області екстремуму  $P_0 = P_{\infty}$

близька до асимптот  $P_{H1}(P_0) = m_g P_0$  і

$$P_{H1}(P_0) = 0,5 m_g (1 - P_0);$$

- в області екстремуму  $P_0 = P_{\infty}$  залежності  $P_{H1}(\psi)$

близькі до асимптот  $P_{H1}(\psi) = 0,5 m_g (1 - \psi \sqrt{2/\pi})$  і

$$P_{H1}(\psi) = m_g \sqrt{2/\pi};$$

- для екстремуму залежностей  $P_{H1}(P_0)$  або  $P_{H1}(\psi)$

величина  $\psi_{H, onm}$  нормована відносно СКВ  $\sigma_{\Delta}$  ЛРП

складає  $0,33 \sqrt{\pi/2}$  - СКО різницевого шумового

зображення;

2. Розроблені алгоритми процесу навчання, які мінімізують середню величину відліків РВКФ еталонного і поточного шумових зображень, передоброблених по методу ОКП. Один алгоритм засновано на обчислюваннях РВКФ і потребує малих змін роботи ОКП – корелятора. Інший алгоритм, більш простий в реалізації, який

засновано на підрахунку кількості  $m_g^0$  одиничних відліків ОКП-та поточного зображення, відрізняється простою реалізацією, сумісний з введенням і препаруванням поточного зображення.

3. Розроблено метод оцінки СКО  $\sigma_{\Delta}$ , який необхідний для отримання абсолютної величини оптимального ЛРП  $\psi_{onm} = \psi_{H, onm} \sigma_{\Delta}$  і його регулювання в процесі навчання.

4. Показана оцінка  $\tilde{\Delta f}^r \approx \psi_{onm}$ , яка потребує мінімальних обчислень і дорівнює середньому модулю вибірових середніх значень позитивна і негативна різниці поточного зображення.

5. Досліджено вплив довірливої вірогідності процесу навчання на вибір основних параметрів перед обробленням: довжини препарованих зображень, величини ЛРП.

### 4. ЛІТЕРАТУРА

- [1] Корреляционный анализ изображений на основе применения метода S-препарирования. – Киев: Наукова думка, 2009. – 156 с. ISBN 978-966-00-0923-2