Формалізований вибір масштабного рівня вейвлет-перетворення при контурному аналізі зображень

Світлана Антощук, Анатолій Ніколенко

Кафедра інформаційних систем ОНПУ
svetlana_onpu@mail.ru

Анотація

Запропоновані математичні моделі при аналізі інтегрального розподілу енергії вейвлет-перетворення по масштабам безперервного вейвлет-перетворення. Створена методика формалізованого вибору масштабного рівня безперервного вейвлет-перетворення при контурному аналізі зображень.

1. Вступ

Один з перспективних підходів до визначення характеристик об'єктів на зображенні ґрунтується на результатах мультимасштабного контурного аналізу, який може проводитися з різною детальністю залежно від завдання, що вирішується системою розпізнавання. Для мультимасштабного контурного аналізу використовують безперервне вейвлет-перетворення (ВП) [1].

Безперервне ВП для вирішення задачі виділення контурів об'єктів володіє рядом важливих властивостей, а саме [1, 2]:

− завдяки частотно-селективним властивостям дозволяє регулювати детальність об'єктів;

− завадостійкість методу виділення контурів зростає із збільшенням масштабного рівня безперервного ВП;

− при збільшенні масштабного рівня перетворення розширюється просторова локалізація об'єктів.

Для реалізації мультимасштабного контурного аналізу вейвлет-функції (ВФ) повинні забезпечувати з регульованою детальністю підкреслення перепадів інтенсивності об'єктів (та/або підоб'єктів) залежно від масштабного рівня s ВП (тобто від різної роздільної здатності). Це забезпечується дійсними ВФ у вигляді непарних симетричних вейвлет-функцій $\psi(x)=-\psi(-x)$, що мають компактний або ефективний носій.

Але не дивлячись на велику кількість публікацій, які присвячені вейвлет-аналізу сигналів та зображень, невирішеним лишається питання формалізованого вибору необхідної базисної функції та потрібного масштабного рівня ВП. Тому представляється актуальним та доцільним вирішення задачі обґрунтованого вибору необхідного масштабного рівня ВП. У роботі запропоновано для цього використовувати властивості інтегрального розподілу енергії ВП за масштабами (ІРЕМ) ВП [3,4].

2. Аналіз базисних функцій ВП

Безперервне ВП функції $f(t)$ при дійсних ВФ визначається виразом [1]:

$$WF(x,s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-x}{s}\right)dt \quad , \tag{1}$$

де $\psi(t,s)=\psi\left(\frac{t-x}{s}\right)$ - базисна вейвлет функція, що має одиничну норму для усіх масштабів s; x – параметр зсуву.

Проведено аналіз наступних базисних функцій [2]:

– Хаара

$$\psi(x,s)=\begin{cases}0, & |x|>s;\\ sign(x), & |x|\le s\end{cases}; \tag{2}$$

– Гауса

$$\psi(x,s)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{x}{s}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right); \tag{3}$$

– «розщеплена» функція Гауса

$$\psi(x,s)=\frac{sign(x)}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right); \tag{4}$$

– функція ГВП:

$$\psi(x,s)=\begin{cases}0, & |x|>\gamma s;\\ -\dfrac{1}{1-\dfrac{x+1}{s}}, & -\gamma s\le x\le -\varepsilon;\\ 0, & -\varepsilon<t<\varepsilon;\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{s}}, & \varepsilon\le x\le\gamma s,\end{cases} \tag{5}$$

де ε , γ – деякі параметри перетворення.

Ці функції можуть використовуватися як базисні, оскільки задовольняють необхідним вимогам (локалізації, допустимості, осциляції і обмеженості) [1,2].

Для оцінки частотно-селективних властивостей базисних функцій (2-5) проведено аналіз їх амплітудно-частотних характеристик.

Перетворення Фур'є «розщепленої» функції Гауса (4) з урахуванням її непарності визначається таким чином:

$$\hat{\psi}(\omega,s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sign\,(x)}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2s^2}\right)}\cdot e^{-j\omega x}=$$

$$=-j\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2s^2}}\sin(\omega x)dx\,. \qquad (6)$$

З урахуванням співвідношення

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}\sin(\omega x)dx=e^{-\frac{\omega^2}{4}}\int_{0}^{\frac{\omega}{2}}e^{z^2}dz \qquad (7)$$

одержано

$$\hat{\psi}(\omega,s)=-j\frac{2s}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{(\omega s)^2}{2}}\int_{0}^{\frac{\omega s}{\sqrt{2}}}e^{z^2}dz\,. \qquad (8)$$

Модуль АЧХ

$$\left|\hat{\psi}(\omega,s)\right|=\frac{2s}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{(\omega s)^2}{2}}\int_{0}^{\frac{\omega s}{\sqrt{2}}}e^{z^2}dz \qquad (9)$$

має екстремум в точці $\omega_{extr}\approx\frac{1{,}31}{s}$.

Таким чином, значення частоти у точці екстремуму зменшується обернено пропорційно масштабному рівню ВП, що вказує на частотно-селективні властивості ВФ на основі «розщепленої» функції Гауса.

Аналогічно проведено аналіз частотних-селективних властивостей базисних функцій (2)-(5). Значення частоти у точці екстремуму для всіх функцій визначається залежністю

$$\omega_{extr}=\frac{k}{s}\,, \qquad (10)$$

де k – деяка константа, що залежить від типу ВФ (табл.1).

Таблиця 1: Частотно-селективні властивості ВФ

Вейвлет-функція	Модуль АЧХ	ω_{extr}
Хаара	$\dfrac{4\sin^2\frac{\omega s}{2}}{\omega}$	$\dfrac{2.33}{s}$
Гауса	$\omega s^2 e^{-\frac{\omega^2 s^2}{2}}$	$\dfrac{1}{s}$
«Розщеплена» функція Гауса	$\dfrac{2s}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{(\omega s)^2}{2}}\int_{0}^{\frac{\omega s}{\sqrt{2}}}e^{z^2}dz$	$\dfrac{1.31}{s}$
Функція ГВП	$2s\int_{\varepsilon}^{\gamma s}\dfrac{\sin(\omega x)}{s+x-1}dx$	$\dfrac{2.84}{\gamma s}$

Таким чином, ВФ відрізняються своїми частотно-селективними властивостями, що необхідно враховувати при їх виборі для реалізації мультимасштабного контурного аналізу зображень.

3. Інтегральний розподіл енергії ВП за масштабами

Для локалізації об'єктів на основі контурного аналізу застосовують обробку зображення за рядками (стовпцями), що дозволяє обробляти функцію інтенсивності як одномірний сигнал. Слід відзначити, що існує певний клас зображень, в яких модель окремого рядка (стовпця) може представлятися у вигляді квазіперіодичної послідовності (наприклад, зображення, що містять символьну інформацію) [5]:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{i=N}1\left(t-x_0-(i-1)T-\sum_{k=2}^{i}\varepsilon_{Tk}\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{i=N}1\left(t-x_0-(i-1)T-\sum_{k=2}^{i}\varepsilon_{Tk}-d-\xi_i\right)\,, \qquad (11)$$

де N – кількість прямокутних імпульсів послідовності;
$1(t)$ – функція Хевісайда;
x_0 – координата першого імпульсу;
ε_{Tk} и ξ_i – випадкові зміни періоду T та тривалості d імпульсу відповідно.

З метою спрощення аналізу будемо вважати, що імпульси такої квазіперіодичної послідовності мають одиничну амплітуду, постійний період T і тривалість d.

Знайдемо функцію ІРЕМ ВП квазіперіодичного сигналу $f(t)$ [3,4]

$$En(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|WF(x,s)\right|^2dx\,. \qquad (12)$$

Для спрощення аналітичних викладок подальший аналіз безперервного ВП $WF(x,s)$ буде проводитись у частотній області, використовуючи Фур'є-образ $W\hat{F}(\omega,s)$.

З урахуванням властивостей перетворення Фур'є вираз (1) має вигляд:

$$W\hat{F}(\omega,s)=\Phi(f(x))\cdot\Phi(\psi(t,s))=\hat{F}(\omega)\cdot\hat{\psi}(\omega,s),$$

де Φ – оператор перетворення Фур'є,

$\hat{F}(\omega),\hat{\psi}(\omega,s)$ Фур'є-образи функцій $f(x)$ і $\psi(x,s)$ відповідно.

Функція ІРЕМ в частотній області з урахуванням Фур'є-образу $W\hat{F}(\omega,s)$ вейвлет-перетворення $WF(x,s)$ визначається в загальному випадку

$$E_N(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|W\hat{F}(\omega,s)\right|^2d\omega.$$

Тоді з урахуванням парності підінтегрального виразу і характеру функції, яка описує послідовність прямокутних імпульсів, отримаємо

$$E_N(s)=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left|\hat{\psi}(\omega,s)\right|^2\frac{\sin^2\frac{\omega d}{2}\sin^2\frac{N\omega T}{2}}{\omega^2\sin^2\frac{\omega T}{2}}d\omega$$

.

Можна отримати аналітичні вирази для функції ІРЕМ при конкретних значеннях N.

Для $N = 1$ (модель рядки з одним об'єктом):

$$E_1(s)=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left|\hat{\psi}(\omega,s)\right|^2\frac{\sin^2\frac{\omega d}{2}^2}{\omega^2}d\omega=I_0.$$

Аналогічно для $N = 2$

$$E_2(s)=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left|\hat{\psi}(\omega,s)\right|^2\frac{\sin^2\frac{\omega d}{2}\sin^2\omega T}{\omega^2\sin^2\frac{\omega T}{2}}d\omega=2I$$

де $I_1=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left|\hat{\psi}(\omega,s)\right|^2\frac{\sin^2\frac{\omega d}{2}}{\omega^2}\cos\omega T d\omega.$

При узагальненні отриманих математичних виразів при різних значеннях довжин послідовності N з урахуванням наступного позначення

$$I_i=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left|\hat{\psi}(\omega,s)\right|^2\frac{\sin^2\frac{\omega d}{2}}{\omega^2}\cos(i\omega T)d\omega,$$

отримана таблиця, що дозволяє представити ІРЕМ ВП у вигляді

$$E_N(s)=\sum\alpha_i I_i\ ,$$

де α_i – деякі коефіцієнти.

Таблиця 2: Коефіцієнти функції ІРЕМ

$E_N(s)=\sum\alpha_i I_i$					
N	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4
	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4
1	1				
2	2	2			
3	3	4	2		
4	4	6	4	2	
5	5	8	6	4	2

Аналіз отриманих коефіцієнтів дозволив отримати математичний опис ІРЕМ ВП квазіперіодичних послідовностей імпульсів, що мають довжину N, у вигляді

$$E_N(s)=NI_0+2\sum_{i=1}^{N-1}(N-i)I_i\qquad .$$

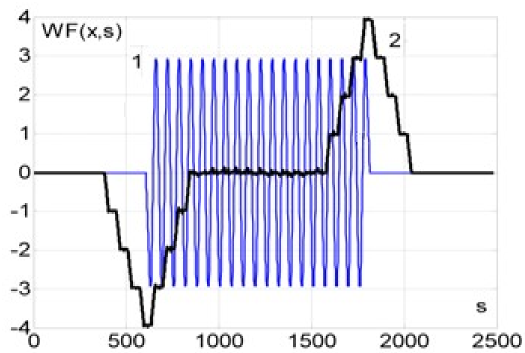
Отриманий вираз справедливий для дійсних симетричних непарних вейвлет-функцій. Знайдені аналітичні вирази для ІРЕМ основних ВФ з урахуванням відносного масштабу $z=\frac{s}{T}$ та коефіцієнта заповнення $k=\frac{d}{T}$.

4. Моделювання та аналіз одержаних результатів

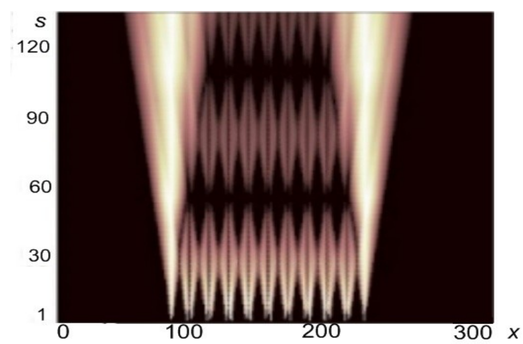
Проведено комп'ютерне моделювання з використанням чисельних методів для розрахунку ІРЕМ (рис. 1). Моделювання проводилось для моделі рядка з символами ($N = 19$).

Аналіз ВП рядка символів (як при ВФ Гауса, так і ВФ Хаара) показує, що на низьких масштабних рівнях підкреслюються перепади інтенсивності на границях окремих символів (крива 1 – рис. 1, а та рис. 2, а), а на високих – перепади на границі всього надпису у рядку (крива 2 – рис. 1, а та рис. 2, а).

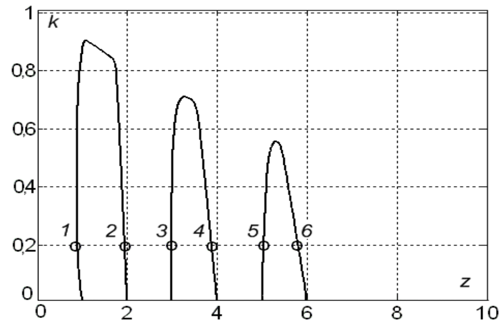
Виконано аналіз на екстремум отриманих аналітичних виразів для $f(x)$. Показано, що функція ІРЕМ носить багатоекстремальний характер для ВФ з негладкими передавальними характеристиками, такими як ВФ Хаара, ГВП (рис. 1, г) і одноекстремальний характер для ВФ з гладкими передавальними характеристиками, наприклад, ВФ Гауса (рис. 2, г).



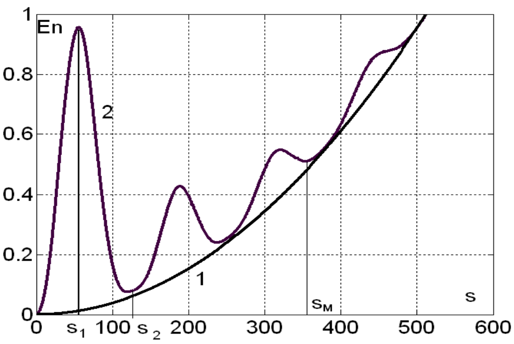
а)



б)

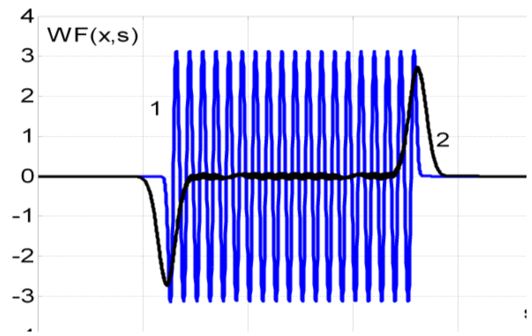


в)

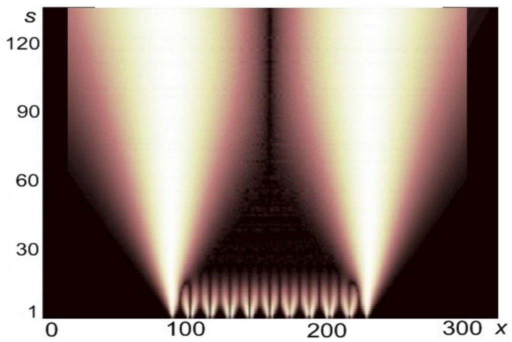


г)

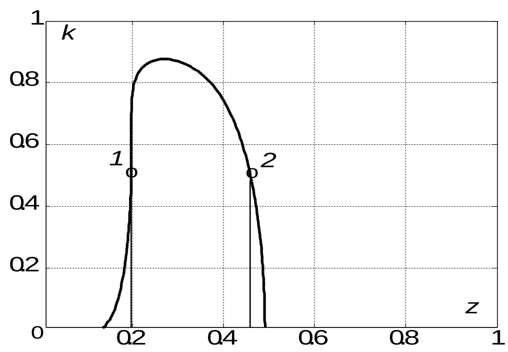
Рис.1: Результати моделювання НВП Хаара: ВП для моделі рядка на двох масштабах (а), за усіма масштабами (б), залежність координат екстремумів (в) і вид ІРЕМ при k = 0.2 (г)



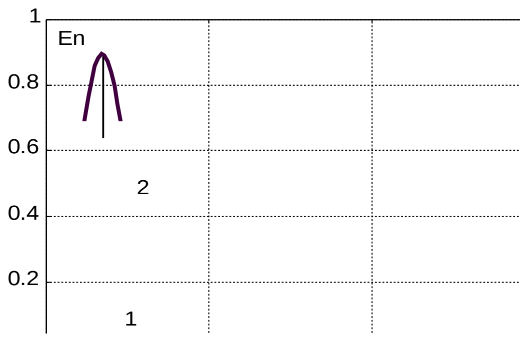
а)



б)



в)



г)

Рис.2: Результати моделювання ВП Гауса: ВП для моделі рядка на двох масштабах (а), за усіма масштабами (б), залежність координат екстремумів (в) і вид ІРЕМ при k = 0.5 (г)

У першому випадку кількість екстремумів залежить від кількості імпульсів N у послідовності та коефіцієнта заповнення. Для кожного N існує таке максимальне значення, після якого екстремальність не спостерігається, ІРЕМ набуває монотонно зростаючого характеру. Точка першого максимуму ІРЕМ відповідає резонансному масштабу ВФ, при якому підкреслюються границі об'єктів з найбільшою детальністю. Координати подальших точок максимуму відповідають зміні ступеню підкреслення границь об'єктів або зміні детальності. Точка останнього мінімуму на ІРЕМ відповідає масштабу $s_м$ ВФ, при якому послідовність сприймається як єдиний об'єкт, тобто підкреслюється границя усієї послідовності. Функції Гауса мають більш сильні згладжуючі властивості, що не дозволяє змінювати ступінь підкреслення при зміні детальності аналізу.

На основі встановленої залежності ІРЕМ запропонована методика формалізованого вибору масштабного рівня ВП, яка може бути застосована при локалізації символьної інформації (СІ) на зображенні. Вона полягає в наступному:

– проводиться ВП вихідного зображення по рядках (або стовпцями);

– обчислюється функція ІРЕМ ВП і проводиться її аналіз:

- по положенню першого максимуму ІРЕМ визначається потрібний масштабний рівень ВП ВФ для локалізації окремих символів СІ;
- по положенню останньої точки перегину ІРЕМ визначається масштаб ВП для локалізації області СІ.

5. Висновки

Запропоновані математичні моделі та методика дозволять обгрунтовано вибирати вид вейвлет функції і автоматично визначати потрібний масштаб, забезпечивши цілеспрямований вибір параметрів обробки при знаходженні просторових властивостей як окремих об'єктів, так і областей при інтерпретації зображення з метою отримання його абстрактного опису.

6. Література

[1] Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Малла. — М.: Мир, 2005. — 671 с.

[2] Антощук С.Г. Анализ базисных функций вейвлет-преобразования при мультимасштабном контурном представлении изображений / С.Г. Антощук, А.А. Николенко, Е.В. Ткаченко // Електромашинобудування та електрообладнання. — 2009. — Вип. 72. — С. 15 — 19.

[3] Короновский А.А. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения / А.А. Короновский, А.Е. Храмов — М. : Физматлит, 2003. — 176 с.

[4] Антощук С.Г., Интегральное распределение энергии по масштабам вейвлет-преобразования при анализе изображений / С.Г. Антощук, А.А. Николенко //Радіоелектронні та комп'ютерні системи. – Харків «ХАІ», 2010, № 7 (48). – С. 236 –241

[5] Использование вейвлет-преобразования при локализации последовательностей символов / [С.Г. Антощук, А.А. Николенко, Е.В. Ткаченко, О.Ю. Бабилунга] // Искусственный интеллект. — 2009. — № 4. — С. 23 — 29.