

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

Юзефович Р.М.¹, Яворський І.М.^{1,2}, Мацько І.Й.¹, Кравець І.Б.¹

¹Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАН України, Львів
вул. Наукова 5, м. Львів, 79601

Тел.: +38 096 3 733 744, факс: +38 032 263 33 55

Ел. пошта: abzac@ipm.lviv.ua, iavor@ipm.lviv.ua, ivanmatsko@ipm.lviv.ua, kravets@ipm.lviv.ua

² Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща
Алея проф. С. Каліського, 7, Бидгощ, Польща, 85796

Тел.: +48 523 408 378, факс: +48 523 408 808

Ел. пошта: abzac@o2.pl, javor@atr.bydgoszcz.pl

Анотація

Розглянуто результати досліджень оцінки найменших квадратів математичного сподівання періодично нестационарних випадкових процесів – математичної моделі стохастичних коливань. Проведено аналіз формул, що визначають статистичні характеристики оцінки. Наведено приклади аналізу типових процесів.

Ключові слова: періодично корельовано випадкові процеси (ПКВП), математичне сподівання, кореляційна функція, оцінки найменших квадратів, зміщення, дисперсія.

THE INVESTIGATION OF LEAST SQUARES ESTIMATES OF PERIODICALLY CORRELATED RANDOM PROCESSES CHARACTERISTICS

Yuzefovych R.M.¹, Javorskyj I.M.^{1,2}, Matsko I.Y.¹, Kravets I.B.¹

¹ Karpenko Physico-mechanical institute NAS Ukraine, Lviv
Naukova str., 5, Lviv, 79601

Тел.: +38 096 3 733 744, fax: +38 032 263 33 55

E-mail: abzac@ipm.lviv.ua, iavor@ipm.lviv.ua, ivanmatsko@ipm.lviv.ua, kravets@ipm.lviv.ua

² Telecommunication Institute of University of Technology and Life Science, Poland
Al. Prof. S.Kaliskiego, 7, Bydgoszcz, Poland, 85796

Тел.: +48 523 408 378, fax: +48 523 408 808

E-mail: abzac@o2.pl, javor@atr.bydgoszcz.pl

Abstract

The investigation results of mean least square estimate for periodically nonstationary processes – mathematical model of stochastic oscillations – are considered. The formulas for estimate statistical characteristics are analyzed. The examples of typical processes analysis are shown.

Keywords: periodically correlated random processes (PCRP), mean, correlation function, least squares estimate, bias, variance.

ВСТУП

Періодично нестационарні випадкові процеси (ПНВП) є математичною моделлю широкого кола фізичних явищ [1-4]. Врахування властивостей періодичної корельованості сигналів, що використовуються в телекомунікації, телеметрії дозволяє більш

ефективно вирішувати задачі їх аналізу, перетворення та обробки. Досліджуючи, наприклад, сигнали вібрації, і проводячи їх аналіз, можна підвищити ефективність діагностики, в тому числі виявляти дефекти механізмів вже на ранніх стадіях їх розвитку [5, 6].

ВЛАСТИВОСТІ ОЦІНОК МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Математичне сподівання ПНВП $m(t) = E\xi(t)$, E – оператор усереднення за густиною імовірності, а також кореляційна функція $b(t, u) = E\dot{\xi}(t)\dot{\xi}(t+u)$, $\dot{\xi}(t) = \xi(t) - m(t)$, є періодичними функціями часу t і тому можуть бути подані у вигляді рядів Фур'є

$$m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k e^{ik\omega_0 t}, \quad b(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(u) e^{ik\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

де T – період. Метою кореляційного статистичного аналізу є оцінювання за експериментальними даними функцій $m(t)$ і $b(t, u)$. Для такого оцінювання використовують когерентний [7] і компонентний [8] методи. Компонентні оцінки визначаються через оцінки коефіцієнтів Фур'є відповідних характеристик. Для визначення останніх може бути використаний метод найменших квадратів.

Даний метод полягає на знаходженні таких значень цих величин, при яких мінімальними стають середньоквадратичні відхилення

$$F_1(\hat{m}_0, \hat{m}_1^c, \dots, \hat{m}_{N_1}^c, \hat{m}_1^s, \dots, \hat{m}_{N_2}^s) = \int_0^\theta [\xi(t) - \hat{m}(t)]^2 dt, \quad (1)$$

$$F_2[\hat{B}_0(u), \hat{B}_1^c(u), \dots, \hat{B}_{N_1}^c(u), \hat{B}_1^s(u), \dots, \hat{B}_{N_2}^s(u)] = \int_0^\theta [\eta(t, u) - \hat{b}(t, u)]^2 dt,$$

при цьому

$$\eta(t, u) = [\xi(t) - \hat{m}(t)][\xi(t+u) - \hat{m}(t+u)],$$

$$\hat{m}(t) = \hat{m}_0 + \sum_{k=1}^{N_1} (\hat{m}_k^c \cos k\omega_0 t + \hat{m}_k^s \sin k\omega_0 t), \quad (2)$$

$$\hat{b}(t, u) = \hat{B}_0(u) + \sum_{k=1}^{N_1} [\hat{B}_k^c(u) \cos k\omega_0 t + \hat{B}_k^s(u) \sin k\omega_0 t].$$

Оскільки квадратичні форми, побудовані на основі других частинних похідних функціоналів F_1 і F_2 є додатньо визначеними, то точки екстремумів, які знаходяться як розв'язки систем лінійних рівнянь

$$\frac{\partial F_1}{\partial \hat{m}_0} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \hat{m}_k^c} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \hat{m}_k^s} = 0, \quad k = \overline{1, N_1}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \hat{B}_0(u)} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \hat{B}_l^c(u)} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \hat{B}_l^s(u)} = 0, \quad l = \overline{1, N_2}, \quad (4)$$

є точками мінімумів. Після обчислення похідних система рівнянь (4) набуває вигляду:

$$\mathbf{M}\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{m}}, \quad (5)$$

$$\text{де } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & c_{01} & \dots & c_{0N_1} & a_{01} & \dots & a_{0N_1} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1N_1} & a_{11} & \dots & a_{1N_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N_1 0} & c_{N_1 1} & \dots & c_{N_1 N_1} & a_{N_1 1} & \dots & a_{N_1 N_1} \\ a_{01} & a_{11} & \dots & a_{N_1 1} & s_{11} & \dots & s_{1N_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{0N_1} & a_{1N_1} & \dots & a_{N_1 N_1} & s_{N_1 1} & \dots & s_{N_1 N_1} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \hat{m}_0 \\ \hat{m}_1^c \\ \vdots \\ \hat{m}_{N_1}^c \\ \hat{m}_1^s \\ \vdots \\ \hat{m}_{N_2}^s \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \bar{m}_0 \\ \bar{m}_1 \\ \vdots \\ \bar{m}_{N_1} \\ \bar{m}_{N_1+1} \\ \vdots \\ \bar{m}_{2N_1} \end{bmatrix},$$

$$c_{lk} = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \cos l\omega_0 t \cos k\omega_0 t dt,$$

$$s_{lk} = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \sin l\omega_0 t \sin k\omega_0 t dt,$$

$$a_{lk} = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \cos k\omega_0 t \sin l\omega_0 t dt,$$

$$\bar{m}_0 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) dt, \quad \bar{m}_l = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \cos l\omega_0 t dt,$$

$$\bar{m}_{l+N_1} = \int_0^\theta \xi(t) \sin l\omega_0 t dt. \quad (6)$$

Розв'язок системи (5) визначає оцінки компонентів $\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{M}^{-1}\hat{\mathbf{m}}$. Якщо $\theta = NT$, то $c_{lk} = s_{lk} = a_{lk} = 0$, $k \neq l$, а $c_{kk} = s_{kk} = \frac{1}{2}$, $a_{kk} = 0$.

Такими ж будуть і граничні значення цих величин при $\theta \rightarrow \infty$. Тоді матриця \mathbf{M} стає діагональною, а оцінки компонентів визначаються формулами

$$\hat{m}_0 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) dt,$$

$$\hat{m}_l^c = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \cos l\omega_0 t dt,$$

$$\hat{m}_l^s = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \sin l\omega_0 t dt,$$

тобто співпадають з компонентними [9].

Оскільки обернена матриця $\mathbf{M}^{-1} = \frac{[A_{ik}]^T}{|\mathbf{M}|}$, де $[A_{ik}]^T$ – транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів m_{ik} матриці \mathbf{M} , а $|\mathbf{M}|$ – її визначник, то

$$\hat{m}_k = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \sum_{l=0}^{2N_1} \bar{m}_l A_{l+1, k+1}. \quad (7)$$

Математичне сподівання оцінки (7) дорівнює

$$E\hat{m}_k = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \sum_{l=0}^{2N_1} E\bar{m}_l A_{l+1, k+1}.$$

Враховуючи співвідношення

$$\sum_{j=1}^{2N_1+1} m_{jk} A_{jl} = \begin{cases} |\mathbf{M}|, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases}$$

приходимо до висновку, що оцінки найменших квадратів компонентів m_0 , m_k^c і m_k^s для довільних θ є незміщеними: $E\hat{m}_k^c = m_k^c$, $E\hat{m}_k^s = m_k^s$. З незміщеності оцінок \hat{m}_0 , \hat{m}_k^c і \hat{m}_k^s впливає незміщеність оцінки математичного сподівання (2).

Для знаходження дисперсії цієї статистики, враховуючи (7), подамо її у вигляді

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \sum_{l=0}^{2N_1} \bar{m}_l f_l(t),$$

де

$$f_l(t) = A_{l+1,1} + \sum_{k=1}^{N_1} \begin{pmatrix} A_{l+1,K+1} \cos k\omega_0 t + \\ + A_{l+1,K+N_1+1} \sin k\omega_0 t \end{pmatrix} = \sum_{k=-N_1}^{N_1} C_{lk} e^{ik\omega_0 t},$$

при цьому

$$C_{l0} = A_{l+1,1}, C_{lk} = \frac{1}{2} (A_{l+1,K+1} - iA_{l+1,K+N_1+1}), C_{l,-k} = \bar{C}_{lk}^*.$$

Тут “ $\bar{}$ ” – знак спряження. Тоді

$$\begin{aligned} D[\hat{m}(t)] &= E[m(t) - \hat{m}(t)]^2 = \\ &= \frac{1}{|\mathbf{M}|^2} \sum_{l,r=0}^{2N_1} R_{\bar{m}_l \bar{m}_r} f_l(t) f_r(t), \end{aligned}$$

де $R_{\bar{m}_l \bar{m}_r}$ – кореляції між випадковими величинами \bar{m}_l і \bar{m}_r : $R_{\bar{m}_l \bar{m}_r} = E(\bar{m}_l - E\bar{m}_l)(\bar{m}_r - E\bar{m}_r)$. При $l=r$ це будуть їх дисперсії: $R_{\bar{m}_l \bar{m}_l} = D_{\bar{m}_l}$.

Виходячи із співвідношень (6), знаходимо

$$R_{\bar{m}_l \bar{m}_r} = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b(t, s-t) \begin{Bmatrix} \cos l\omega_0 t & \cos r\omega_0 s \\ \sin l\omega_0 t & \sin r\omega_0 s \end{Bmatrix} dt ds.$$

Ці величини прямує до нуля при $\theta \rightarrow \infty$ і виконується гранична рівність

$$\lim_{|\theta| \rightarrow \infty} b(t, u) = 0. \quad (8)$$

Остання є достатньою умовою слушності оцінки найменших квадратів математичного сподівання ПКВП.

ОЦІНКИ ХАРАКТЕРИСТИК МОДУЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ

Конкретизуємо отримані результати для випадку, коли $\xi(t) = \xi_c(t) \cos \omega_0 t + \xi_s(t) \sin \omega_0 t$. Оцінки \hat{m}_c і \hat{m}_s знаходяться як точки мінімуму функціоналу

$$\hat{F}(\hat{m}_c, \hat{m}_s) = \int_0^\theta (\xi(t) - \hat{m}_c(t) \cos \omega_0 t - \hat{m}_s(t) \sin \omega_0 t)^2 dt,$$

і є розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \hat{m}_c c_{11} + \hat{m}_s a_{11} = \bar{m}_1, \\ \hat{m}_c a_{11} + \hat{m}_s s_{11} = \bar{m}_2, \end{cases}$$

де

$$\bar{m}_1 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \cos \omega_0 t dt, \quad \bar{m}_2 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \sin \omega_0 t dt,$$

тобто

$$\hat{m}_c = \frac{1}{|\mathbf{M}|} (\bar{m}_1 s_{11} - \bar{m}_2 a_{11}),$$

$$\begin{aligned} \hat{m}_s &= \frac{1}{|\mathbf{M}|} (\bar{m}_2 c_{11} - \bar{m}_1 a_{11}), \\ |\mathbf{M}| &= c_{11} s_{11} - a_{11}^2. \end{aligned}$$

Легко перекоонатися, що ці оцінки є незміщеними для довільних θ :

$$\begin{aligned} E\hat{m}_c &= \frac{1}{|\mathbf{M}|} \left[\frac{c_{11}}{\theta} \int_0^\theta (m_c(t) \cos \omega_0 t + m_s(t) \sin \omega_0 t) \cos \omega_0 t dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_{11}}{\theta} \int_0^\theta (m_c(t) \cos \omega_0 t + m_s(t) \sin \omega_0 t) \sin \omega_0 t dt \right] = \\ &= \frac{m_c}{|\mathbf{M}|} (c_{11} s_{11} - a_{11}^2) = m_c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\hat{m}_s &= \frac{1}{|\mathbf{M}|} \left[\frac{c_{11}}{\theta} \int_0^\theta (m_c(t) \cos \omega_0 t + m_s(t) \sin \omega_0 t) \sin \omega_0 t dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_{11}}{\theta} \int_0^\theta (m_c(t) \cos \omega_0 t + m_s(t) \sin \omega_0 t) \cos \omega_0 t dt \right] = \\ &= \frac{m_s}{|\mathbf{M}|} (c_{11} s_{11} - a_{11}^2) = m_s. \end{aligned}$$

Оцінку математичного сподівання подамо у вигляді

$$\hat{m}(t) = \sum_{l=0}^2 \bar{m}_l f_l(t), \quad (9)$$

де

$$f_l(t) = A_{l1} \cos \omega_0 t + A_{l2} \sin \omega_0 t = \sum_{k=-1}^1 C_{lk} e^{ik\omega_0 t}.$$

Очевидно, що

$$A_{11} = s_{11}, A_{12} = -a_{11}, A_{21} = -a_{11}, A_{22} = c_{11}.$$

Тоді дисперсія оцінки (9) найменших квадратів

$$\begin{aligned} D[\hat{m}(t)] &= \gamma_0 + \gamma_2 e^{i2\omega_0 t} + \gamma_{-2} e^{-i2\omega_0 t} = \\ &= \gamma_0 + \gamma_2^c \cos 2\omega_0 t + \gamma_2^s \sin 2\omega_0 t, \quad (10) \end{aligned}$$

при цьому

$$\gamma_0 = \frac{1}{2|\mathbf{M}|^2} \left[(a_{11}^2 + s_{11}^2) D_{\bar{m}_1} - \right. \\ \left. - 2a_{11} (c_{11} + s_{11}) R_{\bar{m}_1 \bar{m}_2} + (a_{11}^2 + c_{11}^2) D_{\bar{m}_2} \right], \quad (11)$$

$$\gamma_2^c = \frac{1}{2|\mathbf{M}|^2} \left[(s_{11}^2 - a_{11}^2) D_{\bar{m}_1} + \right. \\ \left. + 2a_{11} (c_{11} - s_{11}) R_{\bar{m}_1 \bar{m}_2} + (a_{11}^2 - c_{11}^2) D_{\bar{m}_2} \right], \quad (12)$$

$$\gamma_2^s = -\frac{1}{|\mathbf{M}|^2} \left[a_{11} s_{11} D_{\bar{m}_1} - \right. \\ \left. - (a_{11}^2 + c_{11} s_{11}) R_{\bar{m}_1 \bar{m}_2} + a_{11} c_{11} D_{\bar{m}_2} \right]. \quad (13)$$

Дисперсія компонентної оцінки

$$\begin{aligned} \hat{m}(t) &= \left[\frac{2}{\theta} \int_0^\theta \xi(s) \cos \omega_0 s ds \right] \cos \omega_0 t + \\ &\quad + \left[\frac{2}{\theta} \int_0^\theta \xi(s) \sin \omega_0 s ds \right] \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

також має вигляд (10), але тепер

$$\gamma_0 = 2(D_{\bar{m}_1} + D_{\bar{m}_2}), \quad \gamma_2^c = 2(D_{\bar{m}_1} - D_{\bar{m}_2}), \quad \gamma_2^s = 4R_{\bar{m}_1 \bar{m}_2}. \quad (14)$$

Дисперсії випадкових величин \bar{m}_1 і \bar{m}_2 та їх кореляція визначаються співвідношеннями:

$$D_{\bar{m}_1} = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b(t, s-t) \cos \omega_0 t \cos \omega_0 s dt ds ,$$

$$D_{\bar{m}_2} = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b(t, s-t) \sin \omega_0 t \sin \omega_0 s dt ds ,$$

$$R_{\bar{m}_1 \bar{m}_2} = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b(t, s-t) \cos \omega_0 t \sin \omega_0 s dt ds .$$

Враховуючи подання [9] та інтегруючи по t отримуємо залежності дисперсій оцінки найменших квадратів (10) і компонентної оцінки математичного сподівання від кореляційних компонентів сигналу та довжин відрізка реалізації, що обробляється. На основі цих залежностей для заданих апроксимацій кореляційних компонентів можна бути обчислені конкретні числові значення дисперсій і виконано їх порівняльний аналіз (рис. 1-2).

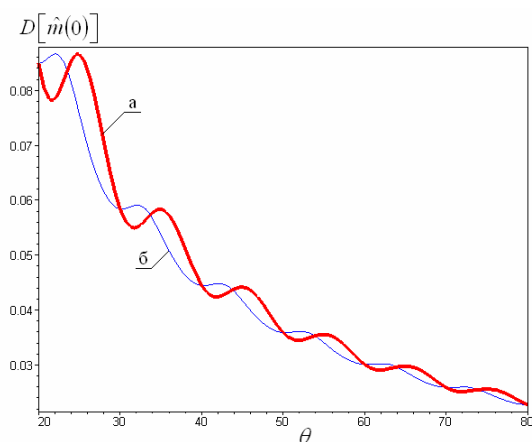


Рис. 1. Дисперсії оцінки найменших квадратів (а) і компонентної оцінки (б) математичного сподівання від кореляційних компонентів сигналу і довжин відрізка реалізації θ ($D_c = 0.5, D_s = 0.5, D_s = 0.2, \alpha_c = 0.9, \alpha_s = 0.9, \alpha_{cs} = 0.9, T = 20$).

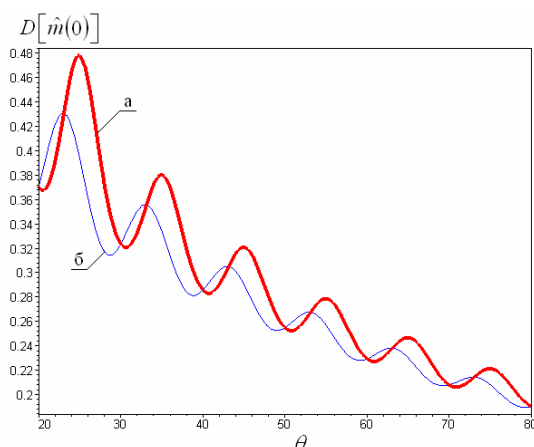


Рис. 2. Дисперсії оцінки найменших квадратів (а) і компонентної оцінки (б) математичного сподівання від кореляційних компонентів сигналу і довжин відрізка реалізації θ ($D_c = 0.5, D_s = 0.5, D_s = 0.2, \alpha_c = 0.05, \alpha_s = 0.05, \alpha_{cs} = 0.02, T = 20$).

ВИСНОВОК

Таким чином, оцінка математичного сподівання, що отримується за допомогою методу найменших квадратів, на відміну від компонентної оцінки, є незміщеною для довільних довжин відрізка реалізації θ . Це означає, що в цьому випадку відсутній ефект просочування. Дисперсія оцінки найменших квадратів в залежності від довжини θ і типу сигналу може бути як більшою, так і меншою від дисперсії компонентної. Конкретні її значення можуть бути обчислені на основі виведених формул для заданих апроксимаційних виразів кореляційних компонентів сигналу.

Наведені властивості оцінки найменших квадратів є особливо важливими при обробці реалізації, довжина яких містить мале число періодів сигналу. Статистичні характеристики оцінок збігаються, якщо $\theta \rightarrow \infty$. Зауважимо, що подібні властивості має оцінка кореляційної функції (3) у випадку, коли оцінка кореляційних компонентів знаходяться як розв'язки системи лінійних рівнянь (5).

ЛІТЕРАТУРА

1. Драган Я. П., Яворский И. Н. Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы. – К.: Наукова думка, 1982. – 246 с.
2. Cyclostationarity in Communications and Signal Processing // Ed. by Gardner W. A. – N. Y.: IEEE Press, 1994. – 504 p.
3. Gardner W. A., Napolitano A., Paura L. Cyclostationarity: Half a Century of Research // Signal Processing. – 2006. – 86. – P. 639-697.
4. Hurd H. L. and Miamee A. Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice. – New Jersey: A John Wiley & Sons, 2007. – 353 p.
5. Яворський І. М., Драбич О. П., Драбич П. П., Ісаєв І. Ю., Кравець І. Б., Михайлишин В. Ю., Стецько І. Г., Черчик Г. Т. Методи та нові технічні засоби вібродіагностики підшипникових вузлів та зубчастих передач // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – К.: Ін-т електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України. – 2006. – С. 52-56.
6. Яворський І. М., Драбич П. П., Ісаєв І. Ю., Кравець І. Б., Стецько І. Г., Черчик Г. Т., Мацько І. Й. Розробка інформаційно-вимірювальної системи для вібродіагностики підшипників великих стаціонарних агрегатів // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – К.: Ін-т електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України. – 2009. – С. 113-122.
7. Javorskyj I., Isayev I., Zakrzewski Z., Brooks S.P. Coherent covariance analysis of periodically correlated random process // Signal Processing. – 2007. – 87. – P. 13-32.
8. Javorskyj I., Isayev I., Majewski J., Yuzefovych R. Component covariance analysis for periodically correlated random process // Signal Processing. – 2010. – 90. – P. 1083-1102.