Метод наближення функцій однієї змінної, що мають розриви першого роду, розривними сплайнами

Ю.І. Першина

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
м. Харків, вул. Фрунзе, 21
yulia_pershina@mail.ru

Анотація

В роботі пропонується метод наближення розривної функції однієї змінної за допомогою розривного сплайну, використовуючи метод мінімакса. Метод пропонується використовувати для відновлення внутрішньої структури тіл, що мають об'єкти різної щільності. Наведено приклади.

1. Вступ

Задачі наближення розривних функцій виникають значно частіше, ніж задачі наближення неперервних функцій. Наведемо кілька прикладів. При дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок, печінка тощо мають різну щільність) [1]. При дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду при переході від однієї складової кори до іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо). Крім того, наведемо наступний приклад. В механіці твердого тіла однією із складних задач є задача дослідження тріщин у внутрішніх точках тіла, тобто таких включень у внутрішніх точках тіла , в яких відсутній матеріал, з якого складається тіло. Можна сказати, що таке тіло має внутрішню структуру, щільність якої є розривною: за межами тріщини одна щільність, в області, обмеженою стінками тріщини – інша щільність. Тому актуальною є розробка методів наближення розривних функцій.

2. Постановка задачі

Нехай задана функція однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ з розривами першого роду в точках $x_k,\ k=\overline{1,n}$. Ці точки розбивають інтервал $[a,b]$ на n частин. Таким чином, точки розриву співпадають з точками розриву функції $f(x)$. Наближувати функцію $f(x)$ будемо лінійним сплайном, який на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}],\ k=\overline{1,n-1}$ має наступний вигляд:

$$Sp_k(x,A) = A_{k,1}\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+2}} + A_{k,2}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k},\ k=\overline{1,n-1}, \quad (1)$$

де $A_{k,1}, A_{k,2}, k=\overline{1,n-1}$ – це параметри сплайну на k – му інтервалі.

Мета роботи: знайти такі параметри $A_{k,1}, A_{k,2}, k=\overline{1,n-1}$, щоб наближення було найкращим в тому чи іншому сенсі. Для розв'язання цієї задачі будемо користуватися методом мінімакса [2].

3. Опис методу наближення розривних функцій однієї змінної розривними сплайнами

В даній роботі сплайном найкращого наближення будемо вважати сплайн, який на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}],\ k=\overline{1,n-1}$ має найменше максимальне відхилення від наближуваної функції $f(x)$.

Теорема 1. Якщо на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}],\ k=\overline{1,n-1}$ невідомі параметри матриці А знаходити з умови

$$\max_{1\le k\le n-1}\left| f(x) - Sp_k(x,A)\right| \to \min_A, \quad (2)$$

то отримаємо розривний сплайн найкращого наближення.

Доведення витікає з того, що кожний з елементів, який треба мінімізувати, дорівнює максимальному відхиленню наближуючого сплайна від функції $f(x)$. Тому при знаходженні параметрів з умови (2), отримаємо $A_{k,1}, A_{k,2}$, які забезпечують найменше відхилення.

Теорема 2. Якщо наближувана функція $f(x)$ є розривною кусково-лнійною функцією з точками розриву $x = x_k,\ k=\overline{1,n}$ і наближуємо її кусково-лінійним розривним спдайном $Sp(x,A)$, що визначається формулами (1) і невідомі параметри-елементи матриці А знаходимо з умови (2), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто

$$Sp(x,A) = f(x).$$

Доведення. Нехай функція $f(x)$ на k -ому інтервалі має вигляд

$$f_k(x,B) = B_{k,1}\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+2}} + B_{k,2}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k},\ k=\overline{1,n-1}$$

Розглянемо максимум різниці функції $f(x)$ на наближуваного сплайна (1) на k -тому інтервалі

$$\max_{x\in[x_k,x_{k+1}]}\left| f(x) - Sp_k(x,A)\right| =$$

$$\max_{x\in[x_k,x_{k+1}]}\{\left| f(x_k+0) - Sp_k(x_k+0,A)\right|,$$
$$\left| f(x_{k+1}-0) - Sp_k(x_{k+1}-0,A)\right|\} =$$

$$= \max_{x\in[x_k,x_{k+1}]} \{|B_{1,k} - A_{1,k}|, |B_{2,k} - A_{2,k}|\}.$$

Знайдемо мінімум отриманого максимуму

$$\min \max_{x\in[x_k,x_{k+1}]} \{|B_{1,k} - A_{1,k}|, |B_{2,k} - A_{2,k}|\}.$$

Звідси витікає, що

$$|B_{1,k} - A_{1,k}| = 0, |B_{2,k} - A_{2,k}| = 0 \Rightarrow B_{1,k} = A_{1,k}, B_{2,k} = A_{2,k}.$$

Теорема доведена.

Точки розриву функції збігаються з точками розриву наближуючого сплайна і найкраще наближення сплайна до функції проводимо аналітично. На кожному із інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайна від функції, яке буде дорівнювати одному із значень:

$$J_{[x_k,x_{k+1}]}(A) = \max_{[x_k,x_{k+1}]} \{| f_k(x_k) - Sp_k(x_k, A)|, | f_k(x_{k+1}) - Sp_k(x_{k+1}, A)|, \quad (3)$$
$$| f_k(c_2) - Sp_k(c_1, A)|,...,| f_k(c_m) - Sp_k(c_m, A)|\}$$

де $c_l, l = \overline{1,m}$ – стаціонарні точки функції $J_k(x, A) = f_k(x) - Sp_k(x, A)$ на інтервалі $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$.

А потім знаходимо мінімум від отриманого максимуму по всіх інтервалах:

$$W = \min_{1\le k\le n-1} (J_{[x_k,x_{k+1}]}(A)) = \min_{1\le k\le n-1} (\max_{a\le x\le b} | f(x) - Sp_k(x, A)|)$$

Отримаємо матрицю W, яка і представляє собою шукану матрицю параметрів $A_{k,1}, A_{k,2}, k = \overline{1, n-1}$

4. Приклади

Приклад 1. Нехай задана функція $f(x)$ на інтервалі $[-1,1]$ з однією точкою розриву $x = 0$ першого роду (рис.1)

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ x-1, & 0 < x \le 1 \end{cases}.$$

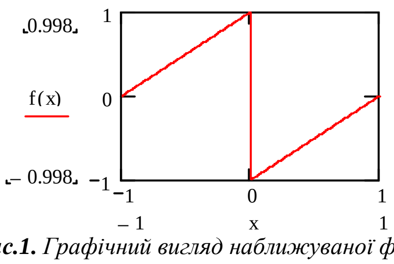

Рис.1. *Графічний вигляд наближуваної функції*

Обираємо вузли сплайна: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

Наближуємо функцію $f(x)$ сплайном вигляду:

$$Sp(x, A) = \begin{cases} A_{1,1}\dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} + A_{1,2}\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x_1 < x < x_2 \\ A_{2,1}\dfrac{x - x_3}{x_2 - x_3} + A_{2,2}\dfrac{x - x_2}{x_3 - x_2}, & x_2 < x < x_3 \end{cases}$$

У даному прикладі точка розриву $x = 0$ збігається з точкою розриву наближуючого сплайна і найкраще наближення сплайна до функції проводимо аналітично. На кожному із інтервалів $[-1,0]$ та $[0,1]$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайна від функції $f(x)$ за наступним алгоритмом: оскільки і сплайн і наближуюча функція на кожному інтервалі є прямими, то максимальне значення відхилення буде дорівнювати одному з двох значень

$f(0-0) - Sp(0-0)$ та $f(-1) - Sp(-1)$ на інтервалі $[-1,0]$

$f(0+0) - Sp(0+0)$ та $f(1) - Sp(1)$ на інтервалі $[0,1]$

Таким чином, задача зводиться до знаходження таких значень параметрів А, при яких буде виконуватись

$$\max_{[-1,0]} \{ f(0-0) - Sp(0-0), f(-1) - Sp(-1)\} \to \min_A$$

$$\max_{[0,1]} \{ f(0+0) - Sp(0+0), f(1) - Sp(1)\} \to \min_A$$

В цьому прикладі сплайн буде мати вигляд

$$Sp(x, A) = \begin{cases} -A_{1,1}x + A_{1,2}(1+x), & -1 < x < 0 \\ -A_{2,1}(x-1) + A_{2,2}x, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Абсолютне відхилення сплайна $Sp(x, A)$ від функції $f(x)$ дорівнює:

$$J(x, A) = | f(x) - Sp(x, A)| = \begin{cases} |x+1 - A_{1,1}x - A_{1,2}(1+x)|, & -1 \le x < 0 \\ |x-1 + A_{1,2}(x-1) - A_{2,2}x|, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Згідно формули (3) від цієї функції знайдемо максимум по x.

$$JM(A) = \max_{x\in[-1,1]} (J(x, A)) = \begin{cases} \max\{|-A_{1,1}|, |1 - A_{1,2}|\}, \\ \max\{|-1 - A_{2,1}|, |-A_{2,2}|\} \end{cases}$$

Таким чином, задача звелась до знаходження параметрів сплайна - елементів матриці А, які забезпечують мінімум серед двох величин

$$\min_A JM(A) = \min_A\{\max\{|-A_{1,1}|, |1 - A_{1,2}|\}, \max\{|-1 - A_{2,1}|, |-A_{2,2}|\}\}.$$

В результаті отримаємо таку матрицю А:

$$A = W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто найкраще наближення заданої функції в прикладі 1 буде мати вигляд:

$$Sp(x, W) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x_1 < x < x_2 \\ \dfrac{-x + x_3}{x_2 - x_3}, & x_2 < x < x_3 \end{cases}$$

Ми отримали точний вираз функції $f(x)$, тобто

$$Sp(x,W) = f(x)\,,$$

що підтверджує викладену вище теорію.

Приклад 2. Нехай задана функція $f(x)$ на інтервалі $[-1,1]$ з двома точками розриву першого роду (рис.2)

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le -0.5 \\ x, & -0.5 < x \le 0.5 \\ x-1. & 0.5 < x \le 1 \end{cases}$$

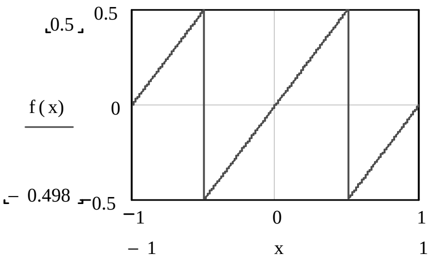

Рис.2. *Графічний вигляд наближуваної функції*

Обираємо вузли: $x_1 = -1,\, x_2 = -0.5, x_3 = 0.5,\, x_4 = 1$.

Наближуємо функцію $f(x)$ сплайном вигляду:

$$Sp(x,A) = \begin{cases} A_{1,1}\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2} + A_{1,2}\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1 \le x < x_2 \\ A_{2,1}\dfrac{x-x_3}{x_2-x_3} + A_{2,2}\dfrac{x-x_2}{x_3-x_2}, & x_2 \le x < x_3 \\ A_{3,1}\dfrac{x-x_4}{x_3-x_4} + A_{3,2}\dfrac{x-x_3}{x_4-x_3}, & x_3 \le x \le x_4 \end{cases},$$

Тобто сплайн для прикладу 2 буде мати вигляд:

$$Sp(x,A) = \begin{cases} -A_{1,1}(2x+1) + A_{1,2}(2x+2), & -1 \le x < -0.5 \\ -A_{2,1}(x-0.5) + A_{2,2}(x+0.5), & -0.5 \le x < 0.5 \\ -A_{3,1}(2x-2) + A_{3,2}(2x-1), & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

Як і в прикладі 1 максимальне значення абсолютного відхилення функції від сплайна буде досягатися на кінцях інтервалів.

Абсолютне відхилення сплайна $Sp(x,A)$ від функції $f(x)$ буде мати вигляд:

$$J(x,A) = \left| f(x) - Sp(x,A) \right| =$$

$$= \begin{cases} \left| x+1+A_{1,1}(2x+1) - A_{1,2}(2x+2) \right|, & x \in [-1,-0.5) \\ \left| x+A_{1,2}(x-0.5) - A_{2,2}(x+0.5) \right|, & x \in [-0.5, 0.5) \\ \left| x-1+A_{3,1}(2x-2) - A_{3,2}(2x-1) \right|, & x \in [0.5,1] \end{cases}.$$

Знайдемо максимальне значення по x відхилення отриманого абсолютного відхилення на кожному з інтервалів згідно формули (3)

$$JM(A) = \max_{x \in [-1,1]} (J(x,A)) = \begin{cases} \max\{\left|-A_{1,1}\right|, \left|0.5 - A_{1,2}\right|\}, \\ \max\{\left|-0.5 - A_{2,1}\right|, \left|0.5 - A_{2,2}\right|\} \\ \max\{\left|-0.5 - A_{3,1}\right|, \left|-A_{3,2}\right|\} \end{cases}$$

Тепер знаходимо мінімум від отриманих максимумів.

$$\min_A JM(A) = \min_A\{\max\{\left|-A_{1,1}\right|, \left|0.5 - A_{1,2}\right|\},$$

$$\max\{\left|-0.5 - A_{2,1}\right|, \left|0.5 - A_{2,2}\right|\}, \max\{\left|-0.5 - A_{3,1}\right|, \left|-A_{3,2}\right|\}\}$$

В результаті отримаємо таку матрицю A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто найкраще наближення заданої функції в прикладі 2 буде мати вигляд:

$$Sp(x,A) = \begin{cases} 0.5\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1 < x < x_2 \\ -0.5\dfrac{x-x_3}{x_2-x_3} + 0.5\dfrac{x-x_2}{x_3-x_2}, & x_2 < x < x_3 \\ -0.5\dfrac{x-x_4}{x_3-x_4}, & x_3 < x < x_4 \end{cases}.$$

Як і в прикладі 1, ми отримали точний вираз функції $f(x)$

$$Sp(x,W) = f(x)\,,$$

що підтверджує викладену вище теорію.

Приклад 3.

Нехай задана функція $f(x)$ на інтервалі $[-\pi,\pi]$ з двома точками розриву першого роду, яка не є лінійною (рис.3)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(x+\pi), & -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ \sin(x), & -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{2}{\pi}(x-\pi), & -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

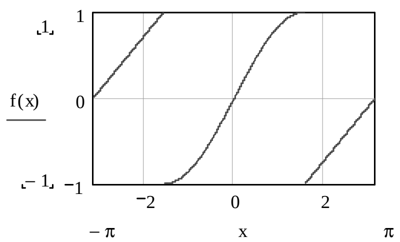

Рис.3. *Графічний вигляд наближуваної функції*

Обираємо вузли: $x_1 = -\pi,\, x_2 = -\dfrac{\pi}{2}, x_3 = \dfrac{\pi}{2}, x_4 = \pi$.

Наближуємо сплайном такого ж вигляду як і в прикладі 2. Тобто наближуючий сплайн в цьому прикладі буде мати вигляд:

$$Sp(x,A) = \begin{cases} -A_{1,1}\dfrac{2x+\pi}{\pi} + 2A_{1,2}\dfrac{x+\pi}{\pi}, & -\pi \le x < -\dfrac{\pi}{2} \\ -A_{2,1}\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{\pi} + A_{2,2}\dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ -2A_{3,1}\dfrac{x-\pi}{\pi} + A_{3,2}\dfrac{2x-\pi}{\pi}, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases},$$

Абсолютне відхилення сплайна $Sp(x,A)$ від функції $f(x)$ буде мати вигляд:

$$J(x,A)=\left|f(x)-Sp(x,A)\right|=$$

$$=\begin{cases}\left|\dfrac{2}{\pi}(x+\pi)+A_{1,1}\dfrac{2x+\pi}{\pi}-2A_{1,2}\dfrac{x+\pi}{\pi}\right|, & x\in\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \left|\sin(x)+A_{2,1}\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{\pi}-A_{2,2}\dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right|, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \left|\dfrac{2}{\pi}(x-\pi)+2A_{3,1}\dfrac{x-\pi}{\pi}-A_{3,2}\dfrac{2x-\pi}{\pi}\right|, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}\qquad(4)$$

Знайдемо максимальне значення по x отриманої абсолютної різниці на кожному з інтервалів:

1. На інтервалі $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ будемо користуватися формулою (3), як і в попередніх прикладах:

$$JM1(A)=\max_{x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)}(J(x,A))=\max\{\left|-A_{1,1}\right|,\left|1-A_{1,2}\right|\}.$$

2. Розглянемо інтервал $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Нехай $g(x)=\sin(x)$ на цьому інтервалі наближується лінійною функцією $y=ax$ (рис.4).

Розглянемо різницю функції та наближуючого сплайну: $h(x)=\sin x-ax$. Максимум від цієї функції може досягатися на кінцях інтервалу та в точці екстремуму. Знайдемо цю точку.

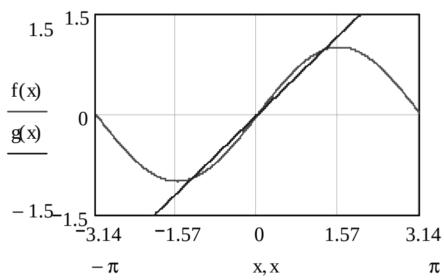

Рис.4. *Наближення функції $f(x)$ функцією $y=ax$.*

$$h'(x)=0\Rightarrow\cos x-ax=0\Rightarrow x=\pm\arccos(a)$$

Розглянемо максимум різниці $h(x)$:

$$\max_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}(\left|h(x)\right|)=$$

$$=\max\{\left|\sin(\arccos a)-a\cdot\arccos a\right|,\left|a\frac{\pi}{2}-1\right|\}=$$

$$=\max\{\left|\sqrt{1-a^2}-a\cdot\arccos a\right|,\left|a\frac{\pi}{2}-1\right|\}=\left|a\frac{\pi}{2}-1\right|$$

Тобто на інтервалі $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ максимальне значення по x абсолютної різниці наближуваної функції $f(x)$ і сплайна $Sp(x,A)$ (4) буде мати вигляд:

$$JM2(A)=\max_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}(J(x,A))=$$

$$=\max_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\left|\sin(x)+A_{2,1}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\pi}-A_{2,2}\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right|=$$

$$=\max\{\left|-1-A_{2,1}\right|,\left|1-A_{2,2}\right|\}$$

3. На інтервалі $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ максимальне значення відхилення (4) буде мати вигляд:

$$JM3(A)=\max_{x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]}(J(x,A))=\max\{\left|-1-A_{3,1}\right|,\left|-A_{3,2}\right|\}.$$

Тепер знаходимо мінімум від отриманих максимумів.

$$\min_A JM(A)=\min\{JM1(A),JM2(A),JM3(A)=$$

$$=\min_A\{\max\{\left|-A_{1,1}\right|,\left|1-A_{1,2}\right|\},$$

$$\max\{\left|-1-A_{2,1}\right|,\left|1-A_{2,2}\right|\},\max\{\left|-1-A_{3,1}\right|,\left|-A_{3,2}\right|\}\}$$

В результаті отримаємо таку матрицю А:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Тобто найкраще наближення заданої функції в прикладі 3 буде мати вигляд:

$$Sp(x,A)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}(x+\pi), & -\pi\le x<-\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{2x}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{2}{\pi}(x-\pi), & \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$$

5. Висновки

Таким чином, в роботі запропонований метод, за допомогою якого можна наблизити функцію однієї змінної з розривами першого роду розривним лінійним сплайном. В подальшому планується узагальнити цей метод на випадок, коли вузли сплайна не співпадають з точками розриву функції $f(x)$.

Як вже зазначалося, цей метод можна буде використати для відновлення внутрішньої структури об’єктів, що мають різну щільність, в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

6. Література

[1] Литвин О.М., Литвин О.О. Про один метод розв’язання 3D задачі комп’ютерної томографії // Тезисы докладов Международной конференции АППММ’06. — Харків: ІПМАШ ім. А.М. Підгорного. — 2006. — С.18.

[2] В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. Введение в минимакс. — Москва: Наука, 1972. — 368с.