Алгоритм бінаризації зображень з урахуванням напівтонів

Андрій Верченко

Кафедра моделювання складних систем
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
verchenko@unicyb.kiev.ua

Анотація

Розглянуто варіаційний підхід до розв'язування задачі сегментації (бінаризації) зображення на два класи. Досліджується випадок апроксимації інтенсивності зображення в межах кожного з сегментів в параметричному класі площин, що дає можливість ефективно бінеризувати зображення з напівтонами. Для цього, на основі функціоналу Мамфорда-Шаха виписуються необхідні умови оптимальності, які, в даному випадку, можна представити у виді диференціального рівняння в частинних похідних. Запропоновано варіант чисельної апроксимації даного рівняння, алгоритм реалізовано та апробовано на ряді штучних та реальних зображень.

1. Опис моделі

Задача сегментації (кластеризації) зображення на регіони та їх границі − є важливою проблемою теорії обробки зображень. Класичні алгоритми пропонують розбиття вхідного зображення $u_0(x):\Omega\to\Re$, $\Omega\subset\Re^2$ на відкриті регіони (сегменти) Ω_i, $i=1,..,N$ та множину K границь між сегментами:

$$\bigcup_i \Omega_i = \Omega\setminus \mathrm{K}\ ,\ \Omega_i\bigcap\Omega_j=\varnothing\ \ \forall i,j=1,..,N;\ i\neq j\ .$$

Тоді в кожному Ω_i поверхня $u_0(x)$ апроксимується деяким постійним значенням u_i, $i=1,..,N$ [1]. В зображеннях з напівтонами (Рис. 1а−3а) такий підхід не дасть бажаного результату (Рис. 1б−3б), тому пропонується розглядати на кожному сегменті Ω_i апроксимацію площинами виду

$$u(x)=(a_i,b_i)\cdot x+c_i\ \ \forall x\in\Omega_i,\ i=1,..,N\ ,$$

де (a_i,b_i,c_i) − невідомі параметри. Розглядатимемо тут найпростіший випадок бінаризації зображення, для якого $N=2$.

Мамфорд і Шах [2] для розв'язування такої задачі запропонували мінімізувати функціонал виду:

$$F^{MS}(u,\mathrm{K})=\int_\Omega |u(x)-u_0|^2dx+\vartheta\int_{\Omega\setminus\mathrm{K}}|\nabla u|^2dx+\mu\int_{\mathrm{K}}d\mathrm{H}^1\to\inf_{u,\mathrm{K}}, \qquad (1)$$

де $\vartheta,\mu>0$ − задані вагові множники, H^1 − одновимірна Хаусдорфова міра в $\Re^2$ [2].

Для розв'язування задачі (1) пропонується використовувати метод множин рівня (level set approach) [3,4], для цього введемо функцію $\phi:\Omega\to\Re$ таку, що $\phi(x)>0\ \ \forall x\in\Omega_1$, $\phi(x)<0\ \ \forall x\in\Omega_2$ та $\phi(x)=0\ \forall x\in\mathrm{K}$. Використовуючи функцію Хевісайда:

$$H(z)=\begin{cases}1, \textit{ якщо } \mathrm{z}\geq 0\\ 0, \textit{ якщо } \mathrm{z}<0\end{cases},$$

сегментоване зображення $u(x)$ можна представити у виді:

$$u(x)=((a_1,b_1)\cdot x+c_1)H(\phi(x))+((a_2,b_2)\cdot x+c_2)(1-H(\phi(x))),\ \forall x\in\Omega\ . \qquad (2)$$

Тоді (1) можна переписати у виді:

$$F(\phi,a_i,b_i,c_i)=\int_\Omega |u_0(x)-((a_1,b_1)\cdot x+c_1)|^2H(\phi(x))dx+\int_\Omega |u_0(x)-((a_2,b_2)\cdot x+c_2)|^2(1-H(\phi(x)))dx+$$
$$+\vartheta\int_\Omega (a_1^2+b_1^2)H(\phi(x))dx+\vartheta\int_\Omega (a_2^2+b_2^2)(1-H(\phi(x)))dx+\mu\int_\Omega |\nabla H(\phi)|dx\to\inf_{\phi,a_i,b_i,c_i}. \qquad (3)$$

Тут перші два терми відповідають за близькість апроксимації функції $u_0(x)$ площинами (2), наступні два − за гладкість $u(x)$ всередині областей Ω_1 та Ω_2, а останній − за довжину границі K між Ω_1 та Ω_2.

Щоб виписати рівняння Ейлера-Лагранжа для варіаційної задачі (3), будемо розглядати регуляризовану версію функції H, яку позначимо через H_ε ($\varepsilon\to 0$). По аналогії з [4,5], візьмемо

$$H_\varepsilon(z)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{\pi}\arctan(\frac{z}{\varepsilon})\right)\cdot$$

Введемо також функцію $\delta_\varepsilon(z)=H'_\varepsilon$, тоді регуляризований функціонал (3) матиме вигляд:

$$F_\varepsilon(\phi,a_i,b_i,c_i)=\int_\Omega |u_0(x)-((a_1,b_1)\cdot x+c_1)|^2H_\varepsilon(\phi)dx+\int_\Omega |u_0(x)-((a_2,b_2)\cdot x+c_2)|^2(1-H_\varepsilon(\phi))dx+$$
$$+\vartheta\int_\Omega (a_1^2+b_1^2)H_\varepsilon(\phi)dx+\vartheta\int_\Omega (a_2^2+b_2^2)(1-H_\varepsilon(\phi))dx+\mu\int_\Omega \delta_\varepsilon(\phi(x))|\nabla\phi(x)|\,dx\to\inf_{\phi,a_i,b_i,c_i}, \qquad (4)$$

де враховано, що $|\nabla H\phi|=\delta(\phi(x))\cdot|\nabla\phi(x)|$.

Зафіксувавши параметри a_i,b_i,c_i ($i=1,2$), можна виписати рівняння Ейлера-Лагранжа для $\phi(x)$. Параметризуючи напрямок спуску за допомогою штучного часу $t\geq 0$, рівняння для $\phi(t,x)$ можна

представити у вигляді [4−6]:

$$\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}=\delta_\varepsilon(\phi)\left[\mu\cdot div\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)-\left|u_0(x)-\left((a_1,b_1)\cdot x+c_1\right)\right|^2+\right.$$

$$\left.+\left|u_0(x)-\left((a_2,b_2)\cdot x+c_2\right)\right|^2-\vartheta(a_1^2+b_1^2)+\vartheta(a_2^2+b_2^2)\right],$$

$$\forall(t,x)\in(0,\infty)\times\Omega, \qquad (5)$$

з початковою умовою

$$\phi(0,x)=\phi_0(x),\ x\in\Omega,$$

де $\phi_0(x)$ − початкове наближення контуру.

При заданому в момент часу t контурі $\phi(t,x)$ − невідомі параметри $a_1=a_1(t,\phi)$, $b_1=b_1(t,\phi)$, $c_1=c_1(t,\phi)$ визначаються із рівнянь:

$$\begin{cases} a_1\int\limits_\Omega(x_1^2+\vartheta)H(\phi)dx+b_1\int\limits_\Omega x_1x_2H(\phi)dx+ \\ \qquad +c_1\int\limits_\Omega x_1H(\phi)dx=\int\limits_\Omega x_1u_0(x)H(\phi)dx, \\ a_1\int\limits_\Omega x_1x_2H(\phi)dx+b_1\int\limits_\Omega(x_2^2+\vartheta)H(\phi)dx+ \\ \qquad +c_1\int\limits_\Omega x_2H(\phi)dx=\int\limits_\Omega x_2u_0(x)H(\phi)dx, \\ a_1\int\limits_\Omega x_1H(\phi)dx+b_1\int\limits_\Omega x_2H(\phi)dx+ \\ \qquad +c_1\int\limits_\Omega H(\phi)dx=\int\limits_\Omega u_0(x)H(\phi)dx. \end{cases} \qquad (6)$$

Коефіцієнти a_2, b_2, c_2 − шукаються з системи, аналогічної (6) при формальній заміні в (6) $H(\phi)$ на $\left(1-H(\phi)\right)$.

2. Чисельна реалізація моделі

Нехай h − просторовий крок (як правило, для растрових зображень $h=1$), Δt − крок по часу. Нехай (x_i,y_i) − дискретні точки (пікселі) на прямокутній області Ω ($i=1,..,W$, $j=1,..,H$; W,H − відповідно ширина та висота зображення) і $u_{ij}\approx u(x_i,y_j)$, $\phi_{ij}^n\approx\phi(n\Delta t,x_i,y_j)$, $n\ge 0$. В нашому випадку візьмемо $\Delta t=0.1$, $\mu=1$, $\vartheta=10$, $\varepsilon=0.075$. Покладемо $n=0$ і будемо стартувати з заданого початкового контуру ϕ_{ij}^0. Для кожного n та ϕ_{ij}^n застосуємо наступні різницеві апроксимації [5,6]:

$$(\phi_{ij}^n)_x=(\phi_{i+1,j}^n-\phi_{i-1,j}^n)/(2h);$$

$$(\phi_{ij}^n)_y=(\phi_{i,j+1}^n-\phi_{i,j-1}^n)/(2h);$$

$$(\phi_{ij}^n)_{xx}=(\phi_{i+1,j}^n-2\phi_{ij}^n+\phi_{i-1,j}^n)/h^2;$$

$$(\phi_{ij}^n)_{yy}=(\phi_{i,j+1}^n-2\phi_{ij}^n+\phi_{i,j-1}^n)/h^2;$$

$$(\phi_{ij}^n)_{xy}=\frac{2\phi_{ij}^n+\phi_{i+1,j+1}^n+\phi_{i-1,j-1}^n+\phi_{i+1,j}^n-\phi_{i-1,j}^n-\phi_{i,j+1}^n-\phi_{i,j-1}^n}{2h^2};$$

$$div\left(\frac{\nabla\phi_{ij}^n}{|\nabla\phi_{ij}^n|}\right)=\frac{(\phi_{ij}^n)_{xx}+(\phi_{ij}^n)_{yy}}{|\nabla\phi_{ij}^n|}-\frac{(\phi_{ij}^n)_x^2\cdot(\phi_{ij}^n)_{xx}+(\phi_{ij}^n)_y^2\cdot(\phi_{ij}^n)_{yy}}{\left(\sqrt{(\phi_{ij}^n)_x^2+(\phi_{ij}^n)_y^2}\right)^3}.$$

Тоді з (5) маємо:

$$\phi_{ij}^{n+1}=\phi_{ij}^n+\Delta t\cdot\delta_\varepsilon(\phi_{ij}^n)\cdot\left[\mu\cdot div\left(\frac{\nabla\phi_{ij}^n}{|\nabla\phi_{ij}^n|}\right)-\right.$$

$$-\left|u_0(x_i,y_j)-(a_1x_i+b_1y_j+c_1)\right|^2+\left|u_0(x_i,y_j)-(a_2x_i+b_2y_j+c_2)\right|^2-$$

$$\left.-\vartheta(a_1^2+b_1^2)+\vartheta(a_2^2+b_2^2)\right],\quad n=0,1,... \qquad (7)$$

В якості критерію зупинки пропонується використовувати обмеження по кількості ітерацій ($n\le 100$) а також близькість функціоналу (4) на двох сусідніх ітераціях (зупиняємось, якщо $\left|F_\varepsilon\left(\phi^{n+1}\left((n+1)\Delta t,x\right)\right)-F_\varepsilon\left(\phi^n\left(n\Delta t,x\right)\right)\right|<$ $<0.05\cdot\left|F_\varepsilon\left(\phi^{n+1}\left((n+1)\Delta t,x\right)\right)\right|$).

Алгоритм (7) реалізовано у програмному середовищі C++Builder 6.0 і апробовано на ряді штучних та реальних зображень. Результати роботи методу представлено нижче (Рис. 1−3), а в Табл.1 для Рис. 1в)−1з) приведено значення функціоналу (4) та параметрів оптимізації на проміжних ітераціях.

Дані розробки проводились в рамках проектів Студентської Лабораторії з інформатики компанії International Land Systems (ILS), Inc. (USA), що створена при кафедрі моделювання складних систем факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

3. Обговорення результатів

Запропонований підхід бінаризації зображень можна розповсюдити і на випадок $N>2$ класів. Для цього, наприклад в [7] пропонується вводити до розгляду m - рівнів (тоді в (3) замість перших двох доданків матимемо m -доданків з відповідними модифікаціями виразів всередині функцій Хевісайда [7]) або за рахунок введення двох або більше функцій $\phi_i(x)$ [7]. Роботи в цьому напрямку (для випадку зображень з напівтонами) планується продовжувати в подальшому.

4. Висновки

Розглянуто задачу сегментації (бінаризації) на два класи у випадку зображень з напівтонами. Для такої постановки пропонується апроксимувати інтенсивність зображення в межах кожного з сегментів в параметричному класі площин (на відміну від класичної бінаризації, коли розглядається апроксимація в класі кусково-постійних функцій). Для розв'язку такої задачі пропонується мінімізувати функціонал Мамфорда-Шаха. Використовуючи метод множин рівня та відповідну регуляризацію функцій, що входять в підінтегральні вирази, виписуються необхідні умови оптимальності, які, в даному випадку, представляють собою рівняння Ейлера-Лагранжа в частинних похідних. Запропоновано варіант чисельної апроксимації отриманого рівняння, алгоритм реалізовано та апробовано на ряді синтетичних та реальних зображень.

5. Література

[1] Верченко, А.П., Кириченко, Н.Ф. и Лепеха, Н.П., "Рекуррентные средства кластеризации в применении к задачам сегментации изображений", *Проблемы управления и информатики*, №2, 2005, pp.62–71.

[2] Mumford, D. and Shah, J., "Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems", *Comm. Pure Appl. Math.*, 42, 1989, pp.577−685.

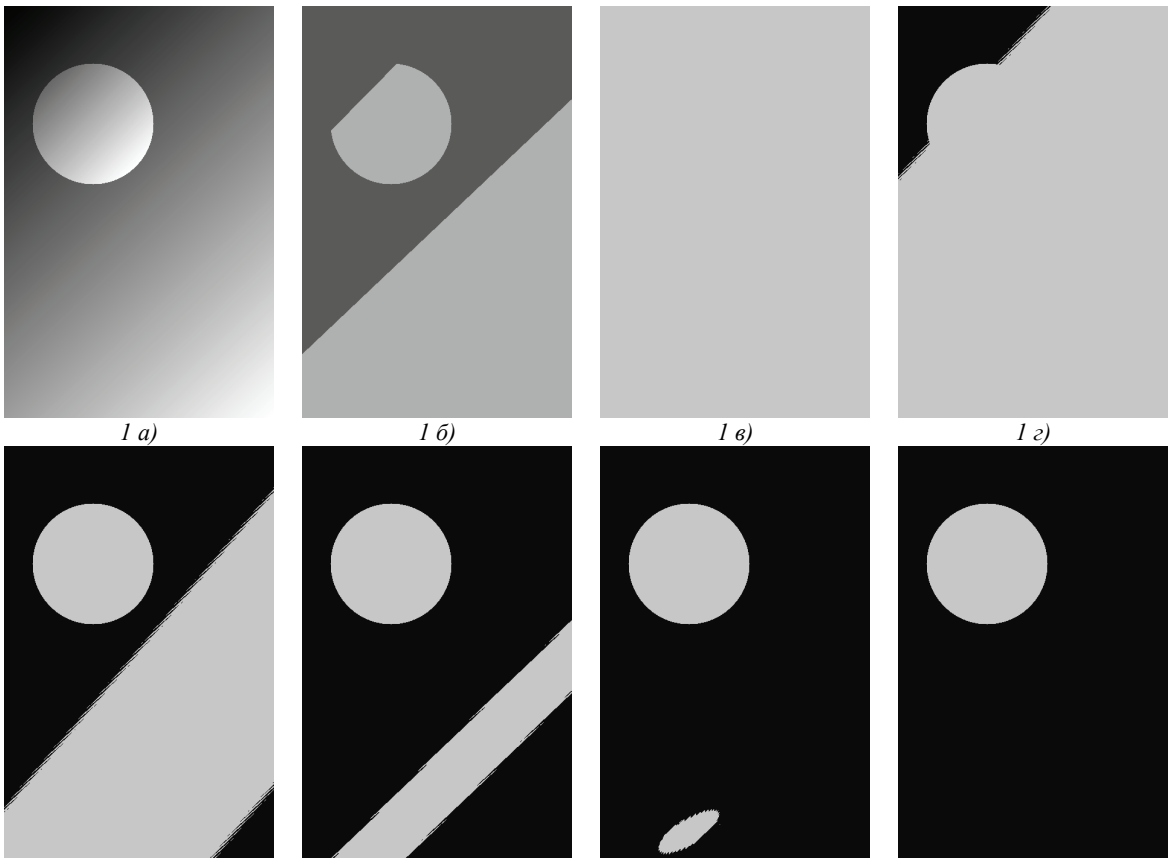
[3] Zhao, H.-K., Chan, T., Merriman, B. and Osher, S., "A variational level set approach to multiphase motion", *J. Comput. Phys*., vol.127, 1996, pp.179–195.

[4] Chan, T.F. and Vese, L.A., "Active Contours Without Edges", *IEEE Transactions on Image Processing*, 10, 2001, pp.266–277.

[5] Tanushev, N.M. and Vese, L.A., "A piecewise-constant binary model for electrical impedance tomography", *Inverse Problems and Imaging (IPI)*, Vol. 1, Num. 2, May 2007, pp.423−435.

[6] Rudin, L.I., Osher, S. and Fatemi, E., "Nonlinear total variation based noise removal algorithms", *Physica D*, vol. 60, 1992, pp.259−268.

[7] Chung, J.T. and Vese, L.A., *Image Segmentation Using a Multilayer Level-Set Approach*, UCLA CAM Report 03-53, Sept. 2003.



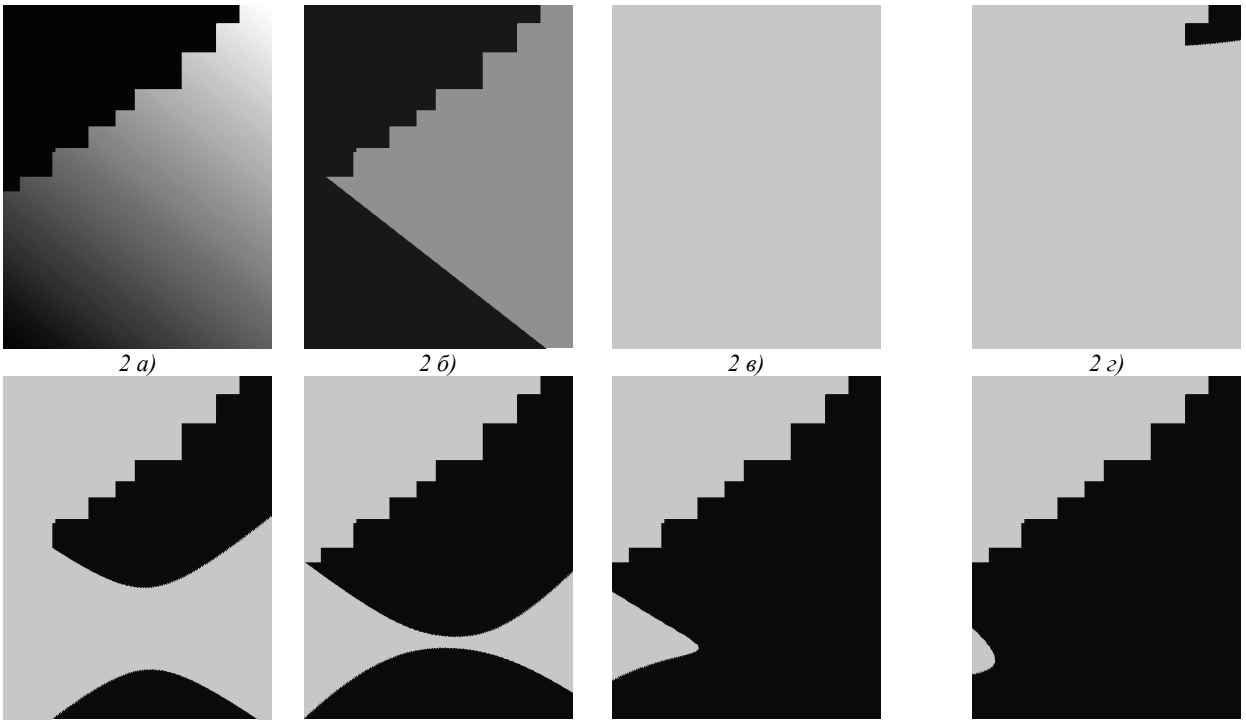
1 а) *1 б)* *1 в)* *1 г)*

1 д) *1 є)* *1 ж)* *1 з)*

Рисунок. 1: Бінаризація синтетичного зображення з напівтонами (*1а)*− вхідне зображення; *1б)*− результат бінаризації з кусково-постійною апроксимацією [4]; *1в)*− початковий контур $\phi_0(x):\Omega_1=\Omega,\ \Omega_2=\varnothing$; *1г)*− *1з)*− проміжні ітерації (див. Табл.1)).

Таблиця 1: Значення функціоналу та параметрів оптимізації на проміжних ітераціях для Рис. *1в)*−*1з)*

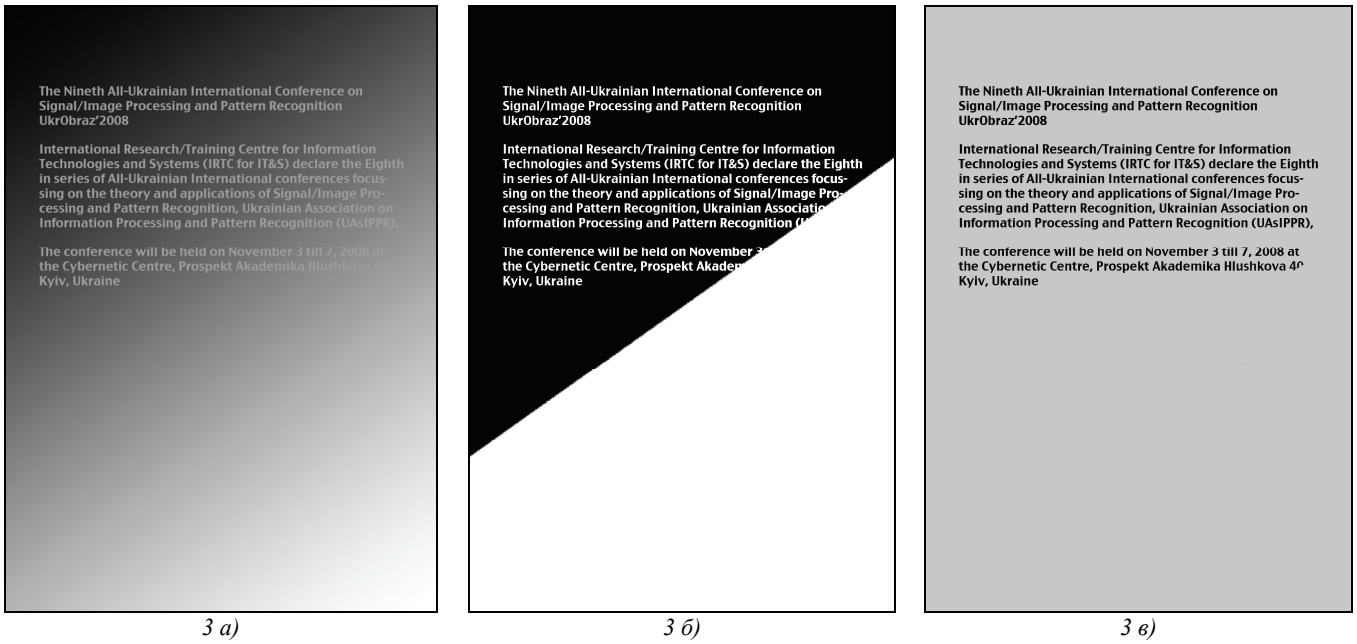
Рис.	№ ітерації	$F_\varepsilon(\circ)$	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2
1в)	0	288804237.3	0.175	0.175	32.266	0	0	0
1г)	11	201068747.5	0.061	0.076	122.152	0.218	0.231	-0.907
1д)	12	77820800.6	0.028	0.022	161.133	0.219	0.231	-0.948
1є)	14	45787914.7	0.072	0.011	160.634	0.219	0.231	-0.976
1ж)	19	25648802.2	0.445	0.131	84.973	0.219	0.231	-1.006
1з)	21	11939013.4	0.459	0.374	36.741	0.219	0.231	-1.030



2 а) *2 б)* *2 в)* *2 г)*

2 д) *2 є)* *2 ж)* *2 з)*

Рисунок. 2: Бінаризація синтетичного зображення з напівтонами (*2а)*− вхідне зображення; *2б)*− результат бінаризації з кусково-постійною апроксимацією [4]; *2в)*− початковий контур $\phi_0(x):\Omega_1=\Omega,\ \Omega_2=\varnothing$;
2г)−*2з)*− відповідно *7, 8, 14, 40, 42* ітерації).



3 а) *3 б)* *3 в)*

Рисунок. 3: Бінаризація текстового регіону (*3а)*− вхідне зображення; *3б)*− результат бінаризації з кусково-постійною апроксимацією [4]; *3в)*− результат бінаризації запропонованим методом).