Теоретико-груповий підхід до аналізу та синтезу складних зображень

Олег Березький

Факультет комп'ютерних інформаційних технологій
Тернопільського національного економічного університету
ob@tneu.edu.ua

Анотація

Запропоновано теоретико-груповий підхід до аналізу та синтезу складних зображень: симетричних та асиметричних, розроблено алгоритми синтезу і аналізу симетричних та асиметричних зображень. Такий підхід дозволяє з одного теоретичного підходу описувати, ефективно зберігати, аналізувати і синтезувати різні класи зображень. Для програмної реалізації запропонованих алгоритмів використано інтегроване середовище програмування Visual C++ Express Edition та відкриту бібліотеку функцій комп'ютерного зору OpenCV.

1. Вступ

Симетрія – це фундаментальна властивість природи [1]. Вона відіграє важливу роль в науці, техніці, мистецтві і інших видах інтелектуальної діяльності людей на протязі всієї історії людства. Симетрія вживається в широкому і вузькому значеннях. В широкому значенні симетрія – це краса, гармонія природи. В вузькому значенні, симетрія – це строге геометричне поняття. Симетричними в геометричному розумінні будуть фігури конгруентні або дзеркально рівні. Люди мають вроджену здатність виділяти симетрію. Для комп'ютерного зору задача аналізу і синтезу симетричних і асиметричних структур є не очевидною.

В загальному випадку алгоритми синтезу зображень можна розділити на два класи. Методи першого класу базуються на використанні зразка, який є текстурним елементом (растровим зображенням) [2]. Методи другого класу використовують функціональний (або процедурний) підхід до синтезу зображення [3]. Вони використовують функції (алгоритми, процедури) для побудови зображення. Характерним для них є використання певної моделі зображення.

Для аналізу складних зображень використовують різні класичні методи з теорії розпізнавання образів : статистичні і структурні [4], алгебраїчні і геометричні методи і методи, які базуються на нейронних мережах. Найбільш прийнятними методами для аналізу симетричних та асиметричних зображень, на наш погляд, є структурні, які використовують групи симетрії [].

В даній роботі пропонується теоретико-груповий підхід, який базується на теорії кристалографічних груп, що дозволяє з єдиних теоретичних позицій будувати алгоритми синтезу та аналізу складних зображень.

2. Основні положення теоретико-групового підходу

Група – це деяка множина *G*, разом з заданою на ній бінарною операцією (позначається, як правило, мультиплікативно: ((*g*,*h*)→*gh*), що задовольняє умови [6]:

1) (асоціативність): $(xy)z = x(yz)$;

2) (існування нейтрального елемента): існує $e \in G$: $ex = xe = x$;

3) (існування оберненого елемента): для кожного x існує x^{-1} такий, що $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

Дія групи на множині. Нехай *G* – група, *X* – множина. Дією (точніше, лівою дією) групи G на X називається відображення $\alpha : G \times X \to X$ (позначається $(g, y) \to gx$), що задовольняє умову: $(gh)x = g(hx)$.

Через GL_n позначають групу афінних перетворень *n*-вимірного евклідового простору R^n .

Кристалографічні групи [7] – це дискретні групи рухів евклідового простору, що мають обмежену фундаментальну область. Наведемо необхідні означення:

1) *G* називають групою рухів, якщо $\|x - y\| = \|gx - gy\|$ для кожного $g \in G$ і кожних $x, y \in \boldsymbol{R}^n$;

2) фундаментальна область – це підмножина $A \subseteq \boldsymbol{R}^n$, що задовольняє властивості:

(а) для кожного $x \in \boldsymbol{R}^n$ існує $a \in A$ і $g \in G$ такі, що $x = ga$;

(б) для кожних $x, y \in A$, $x \neq y$, і кожного $g \in G$ маємо $gx \neq y$.

Фундаментальну область *A* називають обмеженою, якщо

$$diamA = \sup\{\|x - y\| \,|\, x, y \in A\} < \infty .$$

Дискретність групи *G* означає наступне: існує *C* > 0 таке, що для кожного $x \in G$ і кожного $g \in G$, $g \neq e$,

$$\|x - gx\| > C .$$

Класифікація кристалографічних груп. Дві кристалографічні групи вважаються еквівалентними, якщо вони спряжені в групі GL_n . Іншими словами, $G_1 \sim G_2$, якщо існує $g \in GL_n$ таке, що

$$G_1 = gG_2g^{-1} .$$

Теорема [7]. В $\boldsymbol{R}^2$ існує 17 кристалографічних груп з точністю до еквівалентності.

Підгрупи. Нехай G – група. Підмножину $H \subseteq G$ називають підгрупою, якщо $gh \in H$, $g^{-1} \in H$, для кожних $g, h \in H$.

Підгрупу $H \subset G$ називають нормальною, якщо: для кожного $h \in H$ і кожного $g \in G$ маємо

$$g^{-1}hg \in H .$$

Центром групи *G* називають підгрупу H елементів, що комутують зі всіма іншими:

$$Z(G) = \{g \in G \,|\, gx = xg \text{ для кожного } x \in G\}.$$

Теорема [8]. Підгрупа паралельних переносів є нормальною підгрупою в кристалографічній групі *G*. Ця група рівна своєму централізаторові. Вона ізоморфна групі $\boldsymbol{Z}^n$ цілочисельних векторів в $\boldsymbol{R}^n$.

Для нормальної підгрупи $H \subset G$ розглянемо сім'ю суміжних класів, тобто сім'ю $\{gH \mid g \in G\}$. Якщо така сім'я скінчена, то підгрупу H називають підгрупою скінченного індексу в G.

Відомо, що підгрупа L трансляції (лінійних переносів) є скінченого індексу в кристалографічній групі G.

Отже, у кристалографічних групах смуги та площини можна виділити підгрупи трансляцій. Інша підгрупа в кожної групи називається рапортом.

Таким чином, кристалографічну групу G можна представити у вигляді напівпрямого добутку двох підгруп : підгрупи трансляцій і підгрупи рапорту, тобто $G = L \times H_R$.

3. Метод синтезу симетричних зображень

Складними, назвемо зображення, які володіють певною структурою і будуються на основі неструктурованих або менш структурованих зображень. До складних зображень будемо відносити класи плоских симетричних зображень, побудованих на основі груп симетрії на смузі та площині. Інший великий клас складних зображень представлено асиметричними зображеннями, які отримуються на основі симетричних [8].

Симетричне зображення – це зображення над яким виконано перетворення симетрії (ізометричне перетворення), тобто відображення зображення на себе, яке зберігає відстані між точками. Позначимо зображення через $\mathrm{Im}(x,y)$, де $\{(x,y) \mid 0 \le x \le N, 0 \le y \le K\}$ – координати двовимірної решітки – поля зору. Тоді

$$S(\mathrm{Im}(x,y)) = \mathrm{Ims}(x,y),\ \mathrm{Im}(x,y) = S^{-1}(\mathrm{Ims}(x,y)),$$

де S – перетворення симетрії, S^{-1} – зворотне перетворення симетрії.). Структурно симетричне зображення можна представити у вигляді елементарного (мінімального) рисунку над яким виконано перетворення, що породжують рапорт певної групи симетрії. Трансляції вздовж однієї, двох або трьох осей утворюють зображення, яке побудоване на основі конкретної групи симетрії смуги або площини. Узагальнена структура синтезу і аналізу складних зображень представлена на рис. 1.

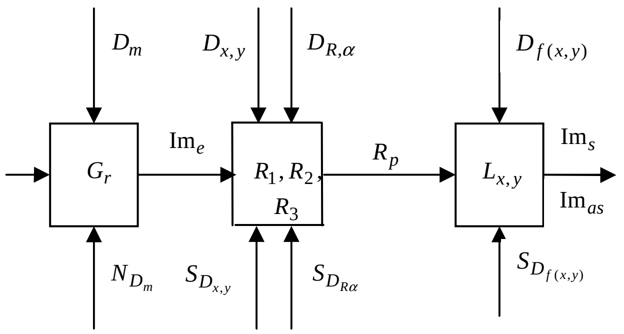

Рисунок 1: Узагальнена структура аналізу та синтезу складних зображень.

Метод синтезу базується на алгоритмах опису елементарних зображень, алгоритмах формування рапортів груп симетрії і їх трансляцій на смузі або площині [9].

Із рапорту $\mathrm{Rp}(x,y)$ можна виділити мінімальну за площею область, яку назвемо елементарним(мінімальним) зображенням.

Елементарне (мінімальне) зображення ($\mathrm{Ime}(x,y)$) – найменша несиметрична частина зображення, на основі якої будують рапорт за допомогою перетворень симетрії – відображень, поворотів, ковзних відображень. Отже, при синтезі симетричного зображення необхідно задати елементарне зображення, на основі якого синтезувати рапорт ("карту" групи) і зробивши паралельні переноси в одному або в двох напрямах (смуга, площина), отримати зображення певної групи симетрії [2].

Синтез симетричного зображення передбачає зберігання відстаней при перетворенні симетрії в рапорті і при його паралельних переносах. Рівняння породження симетричного зображення в операторній формі, яке випливає із приведеної структури, представимо наступним чином:

$$\mathrm{Ims}(x,y) = (G_r(\mathrm{Im}(x,y))Rp(x,y)L_{x,y},$$

де G_r - граматика опису елементарного рисунку, $L_{x,y}$ - оператор трансляцій вздовж осей OX та OY.

4. Метод синтезу асиметричних зображень

Для отримання асиметричних зображень використано симетричні із спотворенням параметрів формування їх складових.

Спотворення – це ціленаправлене неізометричне перетворення параметрів формування групи симетрії.

Спотворення може бути структурне і параметричне. Структурне спотворення змінює вид перетворення симетрії. Параметричне спотворення змінює лише значення параметрів (в допустимих межах) при зберіганні виду симетрії. Будемо розглядати лише параметричні спотворення. Введемо наступні види спотворень:

D_m – зміна масштабу елементарного рисунку (однорідне масштабування); D_x – зміщення по OX; D_y – зміщення по OY; $D_{R\alpha}$ – поворот на кут α; $D_{x,y}$ – зміщення вздовж осей OX і OY; D_{x,y,R_α} – зміщення вздовж осей OX та OY і поворот на кут α; D_{m,R_α} – зміна масштабу і поворот на кут α; D_γ – зміщення в напрямку $(\cos\gamma, \sin\gamma)$; D_{x,y,m,R_α} – зміщення вздовж осей OX та OY, зміна масштабу і поворот на кут α;

Асиметричне зображення $\mathrm{Imas}(x,y)$ – це зображення, над яким виконано перетворення, що не зберігає рівних відстаней між точками, тобто відстань між точками не є константою, а може бути задана в загальному випадку у вигляді функції. Тому введемо асиметрію першого виду при якій порушується ізометрія при паралельних переносах рапорту. Асиметрія другого виду передбачає зміну відстаней між елементарними рисунками при побудові рапорту. Асиметрія третього виду зберігає ізометрію при побудові рапортів і при їх трансляціях, але змінює (масштабує елементарне зображення). Крім цього можливі різні комбінації базових асиметричних структур, які дають можливість отримати різні класи складних зображень. Враховуючи введені спотворення рівняння породження асиметричного зображення можна представити так

$$\mathrm{Im\,as}(x,y) = (G_r(\mathrm{Im}(x,y))D_m)(Rp(x,y)D_{x,y}D_{R,\alpha})L_{x,y}D_{f(x,y)}.$$

Метод синтезу асиметричних зображень базується на алгоритмах синтезу симетричних зображень і алгоритмах спотворення параметрів формування груп симетрії.

5. Метод аналізу симетричних зображень

Оскільки підгрупи трансляцій ідентичні в кожній групі, то рапорт представляє собою набір породжуючи перетворень, які властиві конкретній групі симетрії.
Виділимо для кожної групи симетрії смуги та площини рапорти, які представимо у табличному вигляді (таблиця 1, таблиця 2). На основі виділених підгруп для груп симетрії площини та смуги опишемо алгоритми їх ідентифікації.
Початковими умовами для даних алгоритмів є такі:
Min - елементарний рисунок; Cer – ядро (незмінна частина матриці породжуючих перетворень),
Min_m, $m=4$ (для смуги), $m=6$ (для площини).
Алгоритм для ідентифікації груп смуги наступний.

1. Ідентифікуємо $m=4$ елементарних рисунків Min_i, $i=\overline{1,4}$.
2. Визначаємо ядро для Min_1 і Min_2.
3. Визначаємо ядро для Min_2 і Min_3.
4. Якщо $Cer_{12}=Cer_{23}$, то ідентифікуємо групи з множини $\{p1, pg, p1m, p2\}$
5. Якщо $Cer_{12}\neq Cer_{23}$, то визначаємо Cer_{34}
6. Якщо $Cer_{12}=Cer_{34}$, то ідентифікуємо групи з множини $\{pmg, pm, pmm\}$.
7. На основі знайдених ядер Cer_{12}, Cer_{23}, Cer_{34} ідентифікуємо конкретні групи.

Таблиця 1: Групи смуги

Назва групи	Рапорти груп смуги в матричному вигляді	
	I	II
$p1$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	
pg	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	
$p1m$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	
$p2$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	
pmg	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
pm	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
pmm	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Алгоритм ідентифікації груп площини такий.

1. Ідентифікуємо $m=6$ елементарних рисунків Min_i, $i=\overline{1,6}$.
2. Визначаємо ядро для Min_1 і Min_2.
3. Визначаємо ядро для Min_2 і Min_3.
4. Якщо $Cer_{12}=Cer_{23}$, то ідентифікуємо групи з множини $\{p1, p2, pg, cm\}$.
5. Якщо $Cer_{12}\neq Cer_{23}$, то визначаємо Cer_{34}

Таблиця 2: Групи площини

Назва групи	Рапорти груп площини в матричному вигляді		
	I	II	III
1	2	3	4
$p1$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$		
$p2$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$		
pm	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	
pg	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $m_1=-n_2$ або $m_2=-n_1$		
cm	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$		
pmg	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	
pgg	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	
cmm	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
$p4$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	
$p4m$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$p4g$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$	
$p3$	$\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$	
$p31m$	$\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$

6. Якщо $Cer_{12}=Cer_{34}$, то ідентифікуємо групи з множини $\{pm, pmm, pmg, p4, p4g, p3\}$.
7. Якщо $Cer_{12}\neq Cer_{34}$, то визначаємо Cer_{45}.
8. Якщо $Cer_{12}=Cer_{45}$, то ідентифікуємо групи з множини $\{cmm, p4m, p31m, p3m1, p6\}$.
9. Якщо $Cer_{12}\neq Cer_{45}$, то визначаємо Cer_{56}.
10. Якщо $Cer_{12}=Cer_{56}$, то ідентифікуємо групу $p6m$.
11. На основі знайдених ядер Cer_{12}, Cer_{23}, Cer_{34}, Cer_{45}, Cer_{56} ідентифікуємо конкретні групи.

У випадку аналізу асиметричних зображень необхідно провести нормалізацію елементарного рисунку, симетризацію зміщень і поворотів в рапорті і симетризацію відстаней між рапортами. Рівняння симетризування (приведення асиметричного зображення до симетричного) буде таке:

$$\mathrm{Ims}(x,y)=(G_r(\mathrm{Im}(x,y))D_m N_{D_m} Rp(x,y) D_{x,y} D_{R,\alpha} S_{D_{x,y}} \times$$

$$\times S_{D_{R,\alpha}} L_{x,y} D_{f(x,y)} S_{D_{f(x,y)}} .$$

Звідси $N_{D_m} = D_m^{-1}$ – нормалізація елементарного рисунку,

$S_{D_{x,y}} = D_{x,y}^{-1}$ – симетризація зміщень в рапорті,

$S_{D_{R,\alpha}} = D_{R,\alpha}^{-1}$ – симетризація поворотів в рапорті,

$S_{D_{f(x,y)}} = D_{f(x,y)}^{-1}$ – симетризація відстаней між рапортами.

6. Експериментальні результати

Для програмної реалізації алгоритмів синтезу і аналізу симетричних та асиметричних зображень використано інтегроване середовище програмування Visual C++ Express Edition 2005 та відкриту бібліотеку функцій комп'ютерного зору OpenCV версії 1.0 2006 р. На рис.2 зображено приклад синтезованого зображення групи смуги *pmm*. В результаті спотворення (зсуву елементарних рисунків і їх поворотів в межах рапорту і зміни відстаней між рапортами) отримуємо спотворене зображення (рис. 3).

Використовуючи алгоритми виділення характерних точок [10] (рис.4) знаходимо коефіцієнти афінних перетворень, на основі яких ідентифікуємо групу симетрії.

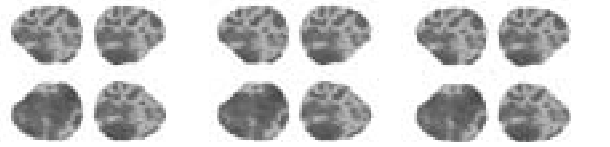

Рисунок 2: Синтезоване зображення групи *pmm*.

Рисунок 3: Спотворене зображення групи *pmm*.

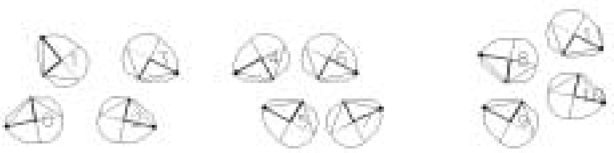

Рисунок 4: Результат аналізу спотвореного зображення групи *pmm*.

Величину сумарної абсолютної похибки коефіцієнтів перетворень знайдемо згідно виразу

$$\varepsilon_G = \sum_{i=1}^{6} \left| g_i - g_i^* \right| ,$$

де g_i - точне значення коефіцієнтів, g_i^* - обчислене значення коефіцієнтів

Графік залежності сумарної абсолютної похибки коефіцієнтів перетворень від величини спотворення приведений на рис. 5.

На графіку наведено: ε_{ad} сумарне значення абсолютної похибки по коефіцієнтам *a*, *d*, ε_{bc} сумарне значення абсолютної похибки по коефіцієнтам *b*, *c* та сумарне значення ε_{abcd} по всіх коефіцієнтах.

Як видно з наведеного графіка спотворення зміщення елементарного рисунку всередині рапорту майже не впливає на зміну кофіцієнтів *a*, *b*, *c*, *d*. Поворот елементарного рисунку рапорту суттєво впливає на значення коефіцієнтів *b*, *c* ніж *a*, *d*.

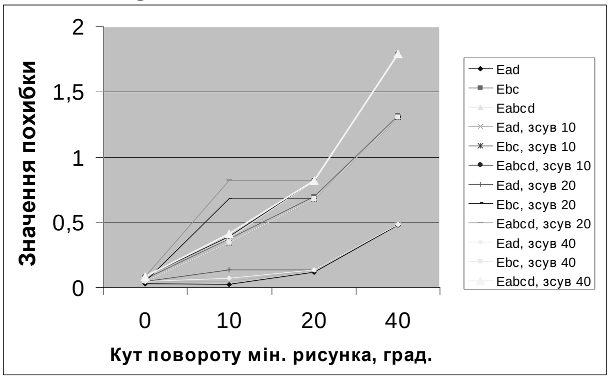

Рисунок 5: Оцінка абсолютної похибки коефіцієнтів перетворень при спотворенні групи *pmm*.

7. Висновки

Симетричні зображення володіють надлишковістю у своїй структурі. Тому запропонований опис дозволяє суттєво зменшити обсяги пам'яті для зберігання таких зображень і ефективного синтезу нових зображень.

Перспективних напрямком подальших досліджень є розробка методів і алгоритмів аналізу асиметричних зображень, приведення їх до відомих симетричних структур.

8. Література

[1] Шубников А.В., Копцик В.А. Симметрия в науке и искусстве. - М.: Наука, 1972. -339 с.

[2] Hertzmann et al "Image Analogies".//Proc. SIGGRAPH – 2001.

[3] F. Kenton Musgrave. The Synthesis and Rendering of Eroded Fractal Terrains //Computer graphics and interactive techniques – ACM Press, NY, USA, 1989. – P. 41-50.

[4] Шлезингер М., Главач В. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию.- Киев: Наукова думка, 2004.- С. 545.

[5] Y. Liu and R.T. Collins, "A Computational Model for Repeated Pattern Perception Using Frieze and Wallpaper Groups," Proc.Computer Vision and Pattern Recognition Conf.,pp537-544, http://www.ri.cmu.edu/pubs/pub_3302. html, June 2000.

[6] Голод П.І Симетрія та методи теорії груп у фізиці. – К.:Вид. дім. "Києво-Могилянська акад.", 2005.- 215 с.

[7] Гильберт Д.,Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия : Пер. с нем. – 3-е изд.- М.: Наука, 1981.- 344 с.

[8] О.М.Березький, Синтез та моделювання текстурних зображень на основі симетричного та асиметричного підходів Матеріали міжнародної конференції „Інтелектуальні системи прийняття рішень та прикладні аспекти інформаційних технологій" – Т.3. – Євпаторія, 2007. – С. 99-100.

[9] Грицик В.В., Березька К.М., Березький О.М. Моделювання та синтез складних зображень симетричної структури. –Львів.: В-во УАД-ДНДІІІ, 2005. – 140 с.

[10] Березский О.Н. Алгоритмы анализа и синтеза биомедицинских изображений Проблемы информатики и управления - 2007 - №2. - С.134-144.