Оптимальний вибір площин, на яких розміщені томограми, в комп'ютерній томографії

О. М. Литвин, Ю.І. Першина

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
м. Харків, вул. Фрунзе, 21
yulia_pershina@mail.ru

Анотація

Авторами булла розв'язана тривимірна задача відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що поступають з комп'ютерного томографу, за допомогою інтерфлетації функцій та мішаної апроксимації. В статті пропонується алгоритм оптимізації вибору площин, на яких розміщені томограми, що поступають з комп'ютерного томографу. Цей алгоритм використовує наближення об'єктів класичними кусково-сталими сплайнами.

1. Вступ

В останні роки виникло та інтенсивно розвивається, проникаючи в різні області знання людини, новий напрямок у науці – комп'ютерна томографія. В багатьох працях сучасних вчених з томографією пов'язується новий метод обчислювальної діагностики - метод комп'ютерної томографії (КТ) - чисельного відновлення функцій 2-х і більше змінних за відомими їх лінійними інтегралами (вздовж послідовності прямих), або площинними інтегралами (інтегралами по послідовності площин). Метод комп'ютерної (обчислювальної) томографії дозволяє за характеристиками, що пропускаються через досліджуваний об'єкт (трансмісійна томографія) або його власного (емісійна томографія) випромінювання, судити про внутрішню структуру, фізичний стан чи хімічний склад цього об'єкту.

Широко відомою томографія стала дякуючи появі та удосконаленню медичних томографів (в першу чергу – рентгенівських - РКТ) та тому, що у багатьох випадках результати, отримані з допомогою КТ, не можуть бути отримані ніякими іншими методами. Приблизно за 20 років було створено рентгенівські комп'ютерні томографи п'яти поколінь. Основоположну роль при їх створенні відіграє математичне проектування комп'ютерних томографів. При цьому використовується математичне моделювання їх вузлів а також сучасні методи оптимізації.

Сьогодні томографічні методи використовуються в медицині, астрономії, астрофізиці та фізиці атмосфери Землі, при діагностиці плазми, в радіолокації, оптиці, в геології, при аналізі теплообміну в поверхневому шарі океану, в геології, геофізиці, фізіології, при неруйнівному контролі якості об'єктів (дефектоскопії), мікроскопії та в ряді інших розділів науки і техніки (див. огляд цитованих праць).

В роботі [1] була розв'язана задача відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать на системі перерізаних площин з використанням інтерфлетації функцій. В роботі [2] розв'язувалася задача тривимірної комп'ютерної томографії з використанням мішаної апроксимації. Ці методи відрізняються високою точністю. У вказаних статтях вважалося, що томограми, які поступають з комп'ютерного томографу, розміщені на площинах, які рівновіддалені одна від одної.

В даній роботі пропонується метод оптимального вибору площин, на яких розміщені томограми. Методом, який пропонується, можна оптимально обирати площини, які, наприклад, перпендикулярні вісі Ох, для будь-яких тривимірних тіл, що описуються формулою $h(x,y,z) = f(x)g(y,z)$, де g – довільна функція, f – монотонна функція однієї змінної.

2. Відомі методи наближення функцій однієї змінної кусково-сталими сплайнами

2.1. Кусково-сталі сплайни однієї змінної інтерполяційного типу.

Існує три типи операторів наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями (сплайнами степеня 0) [3]-[6]. Найбільш простий з них - наближення операторами інтерполяційного типу, що замінюють на інтервалі розбиття $(\boldsymbol{t}_{k-1},\boldsymbol{t}_k)$ наближувану функцію $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}\in \boldsymbol{E}$ її значенням $\boldsymbol{g}\left(\frac{(\boldsymbol{t}_{k-1}+\boldsymbol{t}_k)}{2}\right)$ тобто

$$Sp\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right) = g\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right), \quad t_{k-1} < t < t_k,\ k=\overline{1,n}.$$

Ці сплайни мають таку похибку наближення:

$$e_{n,0,\infty}(g) \le M\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{\alpha}$$

$$\forall g \in Lip_M\alpha;\ \Delta = \max_{1\le k\le n}(t_k - t_{k-1}),$$

де

$$e_{n,0,\infty}(g) = \inf_{g_{n,0}\in S_{n,0}} \left\|g - g_{n,0}\right\|_{L_p[0,1]}$$

Функція g належить до класу Ліпшица $Lip_M\alpha, 0<\alpha\le 1$ з показником α, $g(t)\in Lip_M\alpha$ на відрізку $I=[a,b]$, якщо

$g \in Lip_M\alpha := \left\{g\in C[a,b] : \left|g(t)-g(t')\right| \le M\left|t-t'\right|^{\alpha},\ t, t'\in I\right\}$, $Lip_M\alpha := \bigcup_{M>0} Lip_M\alpha$. Простір $Lip_M\alpha$ є лінійним простором функцій з α-півнормою, яка визначається так:

$$|g|_{Lip_M\alpha} := \inf_M \left\{M \,|\, g\in Lip_M\alpha\right\},$$

або

$$g_{Lip_M\alpha[a,b]} = \inf_{x,y\in[a,b]} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^{\alpha}},\ 0<\alpha\le 1 .$$

2.2. Кусково-сталі сплайни однієї змінної з використанням середніх.

Ці оператори замінюють на інтервалі розбиття $(\boldsymbol{t_{k-1}},\boldsymbol{t_k})$ наближувану функцію $\boldsymbol{g(t)}$ її середнім значенням $\frac{1}{\boldsymbol{t_k}-\boldsymbol{t_{k-1}}}\int\limits_{\boldsymbol{t_{k-1}}}^{\boldsymbol{t_k}}\boldsymbol{g(t)dt}$ тобто

$$Sp(t)=\frac{1}{t_k-t_{k-1}}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} g(t)\,dt,\ t_{k-1}<t<t_k,\ k=\overline{1,n} .$$

Вони мають таку похибку наближення:

$$\|g-Sp\|_{L_\infty E}\le\omega(g,\Delta)_C \quad \forall g\in C(E),$$

$$\omega(g,\Delta)_{C(E)}=\max_{\substack{t',t\in E\\|t-t'|\le\Delta}}|g(t)-g(t')| .$$

Найпростіша оцінка отримується, якщо неперервна функція належить класу Ліпшица

$$\omega(g,\Delta)_C=M\Delta^{\alpha},\ 0<\alpha\le 1$$

2.3. Кусково-сталі сплайни однієї змінної з використанням медіан.

Це оператори *Sg(t)* нелінійного типу, що замінюють на інтервалі розбиття $(\boldsymbol{t_{k-1}},\boldsymbol{t_k})$ функцію $\boldsymbol{g(t)}$ її «медіаною»

$$\left[\max_{\boldsymbol{t_{k-1}}\le \boldsymbol{t}\le \boldsymbol{t_k}}\boldsymbol{g(t)}+\min_{\boldsymbol{t_{k-1}}\le \boldsymbol{t}\le \boldsymbol{t_k}}\boldsymbol{g(t)}\right]\frac{1}{2} .$$

Для похибки наближення функції $g(t)\in C(E)$ медіанами, виконується нерівність:

$$\max_{0\le t\le 1}|g(t)-Sg(t)|\le\max_{1\le k\le n}\max_{t_{k-1}\le t\le t_k}\left|g(t)-\frac{\max\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k}g(t)+\min\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k}g(t)}{2}\right|=$$

$$\max_{0\le t\le 1}|g(t)-Sg(t)|\le\max_{1\le k\le n}\left|\frac{\max\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k}g(t)-\min\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k}g(t)}{2}\right|=\frac{B}{2n},$$

де

$B=Var_{[0,1]}g=\max\limits_{0\le t\le 1}g(t)-\min\limits_{0\le t\le 1}g(t)$ - варіація g на [0,1].

2.4. Найкраще наближення кусково-сталими сплайнами однієї змінної з використанням медіан.

Це оператори *Sg(t)* нелінійного типу, що замінюють на інтервалі розбиття $(\boldsymbol{t_{k-1}},\boldsymbol{t_k})$ наближувану функцію $\boldsymbol{g(t)}$ її «медіаною» $\left[\max\limits_{\boldsymbol{t_{k-1}}\le \boldsymbol{t}\le \boldsymbol{t_k}}\boldsymbol{g(t)}+\min\limits_{\boldsymbol{t_{k-1}}\le \boldsymbol{t}\le \boldsymbol{t_k}}\boldsymbol{g(t)}\right]\frac{1}{2}$

причому вузли t_k вибираються так, щоб $\left[\max\limits_{\boldsymbol{t_{k-1}}\le \boldsymbol{t}\le \boldsymbol{t_k}}\boldsymbol{g(t)}+\min\limits_{\boldsymbol{t_{k-1}}\le \boldsymbol{t}\le \boldsymbol{t_k}}\boldsymbol{g(t)}\right]\frac{1}{2}=\gamma\forall\boldsymbol{k}$

Найкраще наближення кусково-сталими із використанням медіан дає таку оцінку похибки в нормі L_∞: $\|g-Sg\|_{L_\infty E}\le\frac{M}{2n}\quad\forall g\in C(E)$.

3. Наближення $g(x,y)\in C\left[E^2\right]$ кусково-сталими

3.1. Кусково-сталі сплайни двох змінних інтерполяційного типу

Існує п’ять типів операторів наближення неперервних функцій двох змінних кусково-сталими функціями (сплайнами степеня 0). Найбільш простий метод– наближення операторами інтерполяційного типу, що замінюють на прямокутнику розбиття $(\boldsymbol{x_{k-1}},\boldsymbol{x_k})\times(\boldsymbol{y_{l-1}},\boldsymbol{y_l})$ наближувану функцію $\boldsymbol{g(x,y)}$ її значенням в центрі цього прямокутника $\boldsymbol{g}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{k-1}+\boldsymbol{x_k}}{2},\frac{\boldsymbol{y}_{l-1}+\boldsymbol{y_l}}{2}\right)$. Тобто

$$S(x,y)=g\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\frac{y_{l-1}+y_l}{2}\right),\ (x,y)\in(x_{k-1},x_k)\times(y_{l-1},y_l) \quad (3.1)$$

Ці оператори дають похибку:

$$\|g-Sp\|_{C(E^2)}=O\left(M\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{\alpha}\right),$$

$$\Delta=\max_{1\le k\le n}\{x_k-x_{k-1},y_l-y_{l-1}\},\ \Delta\to 0$$

3.2. Кусково-сталі сплайни двох змінних з використанням середніх

Оператори наближення кусково-сталими сплайнами двох змінних з використанням середніх замінюють на прямокутнику розбиття $(\boldsymbol{x_{k-1}},\boldsymbol{x_k})\times(\boldsymbol{y_{l-1}},\boldsymbol{y_l})$ наближувану функцію $\boldsymbol{g(x,y)}$ її середнім значенням

$$\boldsymbol{m_{k,l}(g)}=\frac{1}{\boldsymbol{x_k}-\boldsymbol{x_{k-1}}}\frac{1}{\boldsymbol{y_l}-\boldsymbol{y_{l-1}}}\int\limits_{\boldsymbol{x_{k-1}}}^{\boldsymbol{x_k}}\int\limits_{\boldsymbol{y_{l-1}}}^{\boldsymbol{y_l}}\boldsymbol{g(x,y)dx\,dy} .$$

Тобто

$$\boldsymbol{Sg(x,y)}=\boldsymbol{m_{k,l}(g)},\quad(\boldsymbol{x_{k-1}},\boldsymbol{x_k})\times(\boldsymbol{y_{l-1}},\boldsymbol{y_l}) \qquad (3.2)$$

Ці оператори дають похибку:

$$\|g-Sg\|_{L_\infty\left[E^2\right]}\le\omega(g,\Delta)_C=O(M\Delta^{\alpha}),$$

$$0<\alpha\le 1,\ \forall g(x,y)\in C(E^2)$$

3.3. Кусково-сталі сплайни двох змінних з використанням медіан

Це наближення операторами нелінійого типу *Sg*, що замінюють на прямокутнику розбиття $(\boldsymbol{x_{k-1}},\boldsymbol{x_k})\times(\boldsymbol{y_{l-1}},\boldsymbol{y_l})$ наближувану функцію $\boldsymbol{g(x,y)}$ її «медіаною»

$$\boldsymbol{med_{k,l}(g)}=\left[\max_{\substack{\boldsymbol{x_{k-1}}\le \boldsymbol{x}\le \boldsymbol{x_k}\\ \boldsymbol{y_{l-1}}\le \boldsymbol{y}\le \boldsymbol{y_l}}}\boldsymbol{g(x,y)}+\min_{\substack{\boldsymbol{x_{k-1}}\le \boldsymbol{x}\le \boldsymbol{x_k}\\ \boldsymbol{y_{l-1}}\le \boldsymbol{y}\le \boldsymbol{y_l}}}\boldsymbol{g(x,y)}\right]\frac{1}{2} .$$

Тобто

$$\boldsymbol{Sg(x,y)}=\boldsymbol{med_{k,l}(g)},\quad(\boldsymbol{x_{k-1}},\boldsymbol{x_k})\times(\boldsymbol{y_{l-1}},\boldsymbol{y_l}) \quad (3.3)$$

Ці оператори дають таку похибку наближення

$$\left\|g - Sg\right\|_{C\left(E^2\right)} = O\left(\frac{M}{2n}\right)$$

При побудові цих операторів нелінійного наближення може бути знайдене найкраще наближення: для цього відшукують таке розбиття (тобто вузли $\left(\boldsymbol{x_k}, \boldsymbol{y_l}\right)$ розбиття), за якого «медіани» дають найкраще наближення.

3.4. Мішана апроксимація кусково-сталими сплайнами двох змінних інтерполяційного типу

Цей тип операторів апроксимації функцій двох змінних $g\left(x, y\right)$ визначається формулою

$$OIg\left(x, y\right) = \left(OI_1 + OI_2 - OI_1 OI_2\right) g\left(x, y\right), \qquad (3.4)$$

$$OI_1 g\left(x, y\right) = g\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, y\right),\ x_{k-1} < x < x_k$$

$$OI_2 g\left(x, y\right) = g\left(x, \frac{y_{l-1} + y_l}{2}\right),\ y_{l-1} < y < y_l$$

$$OI_1 OI_2 g\left(x, y\right) = g\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{y_{l-1} + y_l}{2}\right),$$
$$x_{k-1} < x < x_k,\quad y_{l-1} < y < y_l$$

Ці оператори дають похибку

$$\left\|g - OIg\right\|_{C\left(E^2\right)} = O\left(\varepsilon^2\right), \varepsilon \to 0 \qquad (3.5)$$

якщо

$$\begin{aligned} \left\|g - OI_1 g\right\|_{C\left(E^2\right)} &= O\left(\varepsilon\right), \\ \left\|g - OI_2 g\right\|_{C\left(E^2\right)} &= O\left(\varepsilon\right) \end{aligned}.$$

3.5. Мішана апроксимація кусково-сталими сплайнами двох змінних з використанням середніх

Цей тип апроксимації визначається формулами:

$$Sg\left(x, y\right) = \left(S1 + S2 - S1S2\right) g\left(x, y\right),$$

де

$$S1g\left(y\right) = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g\left(\xi, y\right) d\xi, x_{k-1} < x < x_k, k = \overline{1, n},$$

$$S2g\left(x\right) = \frac{1}{y_l - y_{l-1}} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g\left(x, \eta\right) d\eta, y_{l-1} < y < y_l, l = \overline{1, n}$$

Оператори $S1S2g$ визначаються формулою (3.2).

4. MathCad програма для оптимального вибору площин

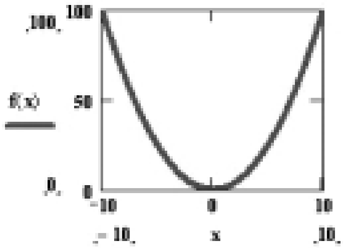
Нехай задано тривимірне тіло, яке описується формулою

$$h(x, y, z) = f(x) g(y, z),$$

де g – довільна функція, f – монотонна функція однієї змінної.

Розглянемо метод оптимального вибору площин на прикладі монотонної функції однієї змінної $f(x)$. Для комп'ютерної реалізацій цього алгоритму будемо використовувати систему комп'ютерної математики MathCad.

Для прикладу візьмемо $f(x) = x^2,\ x \in [0,1]$.



Розіб'ємо інтервал $[0,1]$ на 10 вузлів:

$$x_i = \frac{i}{n},\ n = 10,\ i = \overline{1, n}$$

Вузли – це площини, на яких розміщені томограми, що поступають з комп'ютерного томографу, та перпендикулярні вісі Ox.

$$i := 0 .. n$$

$$x_i := \frac{i}{n}$$

x =

	0
0	0
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.4
5	0.5
6	0.6
7	0.7
8	0.8
9	0.9
10	1

Введемо до розгляду функцію $z(x)$ наступного вигляду

$$z(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0 .. n - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} e_i \leftarrow f\left(x_{i+1}\right) - f\left(x_i\right) \\ e \end{array} \right. \\ e \end{array} \right.$$

z(x) =

	0
0	0.01
1	0.03
2	0.05
3	0.07
4	0.09
5	0.11
6	0.13
7	0.15
8	0.17
9	0.19

$z(x)$ – відхилення між значеннями функцій від рівномірно розташованих вузлів.

Далі розв’язуємо систему рівнянь. Тут $J(x)$ – найбільше відхилення між вказаними значеннями функції.

$$h := z(x)$$

$$J(x) := \max(h)$$

Given

$$x_0 = 0$$

$$x_n = 1$$

$$z(x)_0 = z(x)_1$$

$$z(x)_1 = z(x)_2$$

$$z(x)_2 = z(x)_3$$

$$z(x)_3 = z(x)_4$$

$$z(x)_4 = z(x)_5$$

$$z(x)_5 = z(x)_6$$

$$z(x)_6 = z(x)_7$$

$$z(x)_7 = z(x)_8$$

$$z(x)_8 = z(x)_9$$

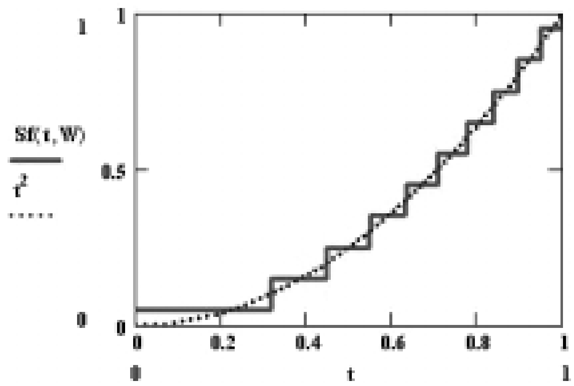
$$W := \mathrm{Minerr}(x)$$

W =

	0
0	0
1	0.316
2	0.447
3	0.548
4	0.632
5	0.707
6	0.775
7	0.837
8	0.894
9	0.949
10	1

Складемо кусково-лінійний сплайн на знайдених оптимальних вузлах W:

$$Sf(t,W) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c \leftarrow \dfrac{\left(f(W_i) + f(W_{i+1})\right)}{2} \quad \text{if } t \geq W_i \wedge t < W_{i+1} \\ c \leftarrow \dfrac{\left(f(W_n) + f(1)\right)}{2} \quad \text{if } t \geq W_n \\ c \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$



5. Висновки

Таким чином, запропоновано алгоритм оптимального вибору площин, на яких розміщуються томограми (розглядається випадок, коли всі томограми паралельні одна одній), в тривимірній комп’ютерній томографії. В алгоритмі істотно використовується припущення про те, що внутрішня структура тривимірного тіла (щільність або коефіцієнт поглинання) є функцією від трьох змінних вигляду: $h(x,y,z) = f(x)g(y,z)$, де g – довільна функція, при умові, що f – монотонна функція на замкненому відрізку.

Для наближення використовуються кусково-сталі сплайни за однією змінною. При комп’ютерній реалізації запропонованого методу використовується методологія із статті [7].

6. Література

[1] Литвин О.М., Першина Ю.І. Математична модель відновлення тривимірних об’єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетації функції. // Доповіді НАНУ. – 2005. – №8. - С. 67-71.

[2] Литвин О.М., Першина Ю.І. Метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням томограм та мішаної апроксимації. // Таврічний вісник інформатики та математики. – 2008. – №2. – С. 18 – 24.

[3] Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука. - 1984. -350 с.

[4] Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. –М.: Наука. - 1987. -422 с.

[5] De Vore R.A. Nonlinear approximation // Acta numerica. -1998.-P.51-150.

[6] Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. -Харків.: Основа, 2002. -544 с.

[7] Литвин О.О. Наближене розв’язання плоскої задачі РКТ за допомогою кусково-сталих функцій на основі інтерлінації функцій// Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. научн. трудов Ин-та математики НАНУ. Киев.- 1999.- С. 147-169.