

# ЗАСТОСУВАННЯ КОГЕРЕНТНОГО ФУНКЦІОНАЛУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРІОДУ РЕГУЛЯРНОЇ СКЛАДОВОЇ ПЕРІОДИЧНОГО НЕСТАЦІОНАРНОГО СИГНАЛУ

*Юзефович Р.М.<sup>1</sup>, Мацько І.Й.<sup>1</sup>, Яворський І.М.<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАН України, Львів  
вул. Наукова 5, м. Львів, 79601

Тел.: +380 963 733 744, факс: +380 322 633 355

Електронна пошта: [abzac@ipm.lviv.ua](mailto:abzac@ipm.lviv.ua), [ivanmatsko@ipm.lviv.ua](mailto:ivanmatsko@ipm.lviv.ua), [iavor@ipm.lviv.ua](mailto:iavor@ipm.lviv.ua)

<sup>2</sup>Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща  
Алея проф. С. Каліського, 7, Бидгощ, Польща, 85796

Тел.: +48 523 408 378, факс: +48 523 408 808

Електронна пошта: [javor@atr.bydgoszcz.pl](mailto:javor@atr.bydgoszcz.pl)

## Анотація

Проведено аналіз оцінок періоду періодично нестационарних випадкових процесів із застосуванням когерентного функціоналу. Виведено формули для дисперсії оцінок, що описують залежності цих величин від довжини реалізації та параметрів сигналів.

*Ключові слова:* періодично корельовані випадкові процеси (ПКВП), оцінка періоду, дисперсія, нестационарність.

# THE COHERENT FUNCTIONAL USING FOR THE PERIOD DETERMINATION OF REGULAR COMPONENT OF THE PERIODICALLY NON-STATIONARY SIGNAL

*Yuzefovych R.M.<sup>1</sup>, Matsko I.Y.<sup>1</sup>, Javorskyj I.M.<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Karpenko Physico-mechanical institute NAS Ukraine, Lviv  
Naukova str., 5, Lviv, 79601

Tel.: +380 963 733 744, fax: +380 322 633 355

E-mail: [abzac@ipm.lviv.ua](mailto:abzac@ipm.lviv.ua), [ivanmatsko@ipm.lviv.ua](mailto:ivanmatsko@ipm.lviv.ua), [iavor@ipm.lviv.ua](mailto:iavor@ipm.lviv.ua)

<sup>2</sup>Telecommunication Institute of University of Technology and Life Science, Poland  
Al. Prof. S.Kaliskiego, 7, Bydgoszcz, Poland, 85796

Tel.: +48 523 408 378, fax: +48 523 408 808

E-mail: [javor@atr.bydgoszcz.pl](mailto:javor@atr.bydgoszcz.pl)

## Abstract

Analysis for the period estimates of the periodically non-stationary random processes with using of the coherent functional is carried out. The formulae for the variance of the estimates, which describe dependences of these variables on the realization length and signal parameters, are derived.

*Keywords:* Periodically Correlated Random Processes (PCRP), period estimate, variation, non-stationarity.

## ВСТУП

При спостереженні за різноманітними фізичними явищами (в астрономії, геології, геофізиці, гідро-

логії, океанології та ін.) велика увага приділяється задачам виявлення прихованих періодичностей. Методи їх розв'язування пов'язують із розвитком математичних моделей, у рамках яких описувались

періодичність і стохастичність змін властивостей процесів. Перші дослідження прихованих періодичностей ґрунтувались на використанні селективних перетворень, що виділяють періодичні компоненти [3, 5]. Серед них, так звана, схема Бюй-Балло (Buys-Ballot), яка ґрунтується на усередненні значень через пробний період  $\tau$ :

$$S(t, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N S(t+n\tau). \quad (1)$$

Це перетворення можна подати у вигляді

$$S(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\tau}(u) S(t-u) du,$$

де

$$h_{\tau}(u) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \delta(u+n\tau).$$

Його частотна характеристика

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\tau}(u) e^{i\omega u} du = \frac{\sin \frac{2N+1}{2} \omega \tau}{(2N+1) \sin \frac{\omega \tau}{2}} \quad (2)$$

є періодичною функцією частоти з періодом  $\frac{2\pi}{\tau}$ .

З формули (2) випливає, що ефективність схеми Бюй-Балло покращується, коли збільшується число періодів  $N$ , які усереднюються. При  $N \rightarrow \infty$  величини цих амплітуд прямують до нуля.

Якщо задати модель прихованих періодичностей у вигляді періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП), то властивості сигналу будуть описуватися величинами, які визначаються тільки поведінкою в часі математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції, спектральної густини тощо. Наявність чи відсутність періодичних змін властивостей сигналу не залежить від того, якою є поведінка кореляційної функції при зміні зсуву, чи спектральної густини при зміні частоти. Тому методи виявлення прихованих періодичностей ґрунтуються на пошуку періодичних часових змін імовірнісних характеристик.

## ВЛАСТИВОСТІ КОГЕРЕНТНОГО ФУНКЦІОНАЛУ

У роботі [4] показано, що функціонали, побудовані відповідно до співвідношення (1), можуть бути використані для виявлення періодичних часових змін імовірнісних характеристик не тільки першого, а й вищих порядків. Ці функціонали мають такий самий вигляд, як когерентні оцінки імовірнісних характеристик з тією різницею, що значення сигналів тепер усереднюються через деякий пробний період  $\tau$ . Для функціоналу математичного сподівання маємо:

$$\hat{m}(t, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t+n\tau). \quad (3)$$

Його регулярна складова

$$S(\tau) = E\hat{m}(t, \tau) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l h_l(\tau) e^{il\omega_0 \tau},$$

$$\text{де } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ і } h_l(\tau) = \frac{\sin l\omega_0(N + \frac{1}{2})\tau}{(2N+1) \sin l \frac{\omega_0 \tau}{2}},$$

приймає в точках  $\tau = kT$  екстремальні значення, характер яких визначається знаком другої похідної

$$\left[ \frac{d^2 S(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=kT} = \frac{m''(t)}{3} N(N+1).$$

Для ПКВП маємо, що математичне сподівання

$$m(t) = E\xi(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l e^{il\omega_0 t}.$$

Якщо ввести відношення

$$\gamma = \frac{\sqrt{EN^2(T)}}{S(T)},$$

де  $N(\tau) = \hat{m}(t, \tau) - S(\tau)$  – флуктуаційна складова, і нормовані складові

$$\tilde{S}(\tau) = \frac{S(\tau)}{S(T)}, \quad \tilde{N}(\tau) = \frac{N(\tau)}{\sqrt{EN^2(T)}},$$

то вираз (3) можна подати в формі

$$\hat{m}(t, \tau) = S(T) [\tilde{S}(T) + \gamma \tilde{N}(\tau)].$$

Оцінка періоду  $T$  є розв'язком нелінійного рівняння:

$$\frac{d\tilde{S}(\tau)}{d\tau} + \gamma \frac{d\tilde{N}(\tau)}{d\tau} = 0. \quad (4)$$

Тоді для оцінки періоду в першому наближенні маємо:

$$\hat{T} = T - \gamma \frac{n_1}{S_2}, \quad (5)$$

де

$$S_i = \left[ \frac{d^i \tilde{S}(\tau)}{d\tau^i} \right]_{\tau=T}, \quad n_i = \left[ \frac{d^i \tilde{N}(\tau)}{d\tau^i} \right]_{\tau=T}.$$

Для дисперсії оцінки (5) знаходимо

$$D[\hat{T}] = 9 [N(N+1)(2N+1)m''(t)]^{-2} \times \times \sum_{m,n=-N}^N \left[ \frac{\partial^2 b(t+nx, my-nx)}{\partial x \partial y} \right]_{\substack{x=T \\ y=T}}. \quad (6)$$

Відносні швидкості зростання чисельника і знаменника отриманого дроби при збільшенні  $N$  визначають характер поведінки дисперсії в асимптотичі. Кореляційна функція  $b(t, u)$  періодично змінюється в часі і зникає з ростом зсуву, тому чисельник буде рости зі швидкістю сум, що містять числа  $m$  і  $n$  в першому степені – вони виникають при диференціюванні. А вираз у знаменнику є результатом сумування складових, які ці числа містять у другому степені. Це дає можливість

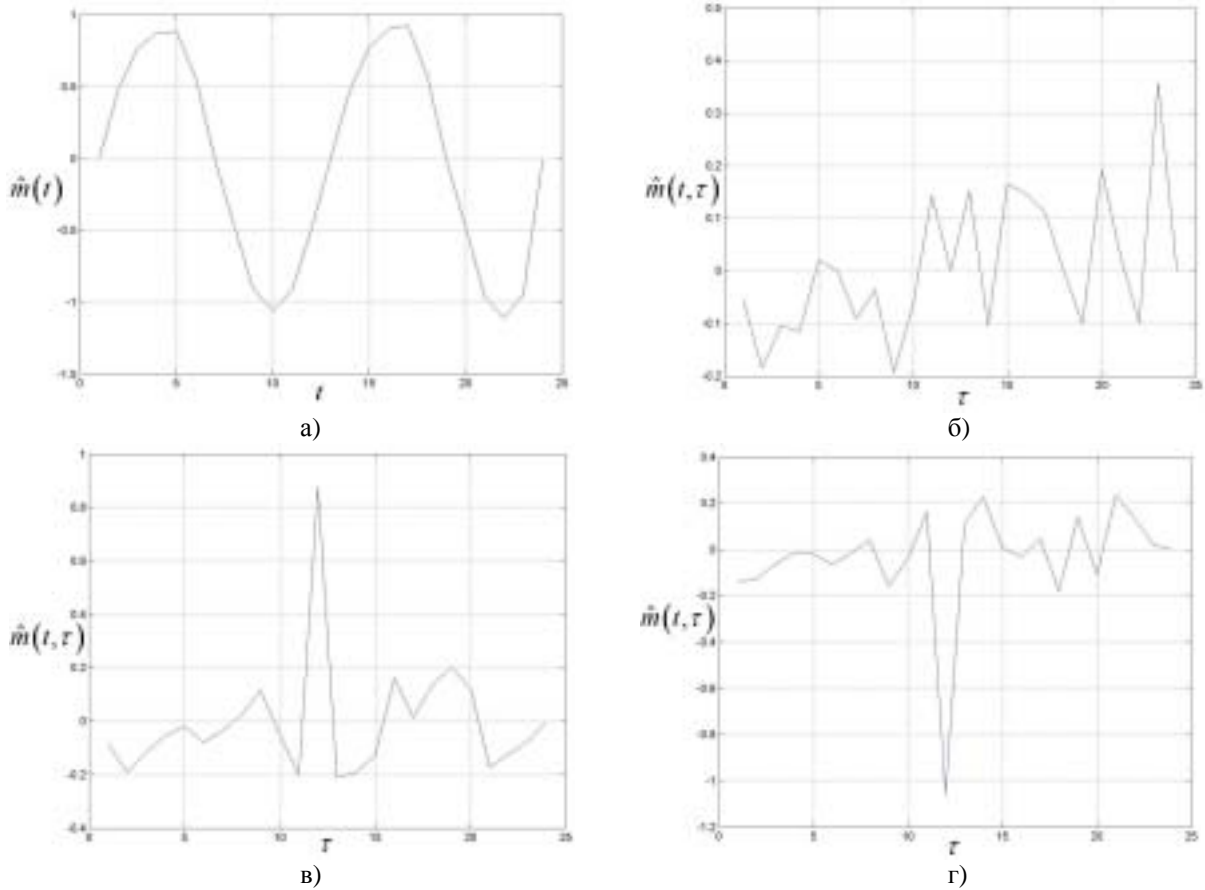


Рис. 1. Оцінка математичного сподівання а) в залежності від часу для  $N = 100$ ; залежності функціоналу  $\hat{m}(t, \tau)$  від величини пробного періоду  $\tau$  для різних  $t$  отриманих з використанням симуляційних комп'ютерних моделей: б)  $t = 1$ ; в)  $t = 4$ ; г)  $t = 10$ .

зробити висновок про те, що  $D[\hat{T}] \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Підкреслимо, що величина  $D[\hat{T}]$  залежить від початку відліку часу  $t$ , що проявляється у присутності в знаменнику формули (6) другої похідної математичного сподівання, обчисленої в точці  $t$ .

Звідси випливає, що використання перетворення (3) в точках перегину графіка регулярної складової сигналу, де  $m''(t) = 0$ , позбавлене будь-якого сенсу. Найкращі результати отримаємо для тих  $t$ , для котрих абсолютні значення другої похідної є максимальними.

На рис. 1 а) подано оцінку математичного сподівання сигналу

$$\xi(t) = \xi_c(t) \cos \omega_0 t + \xi_s(t) \sin \omega_0 t.$$

Реальний вигляд графічних залежностей функціоналу (3) від величини пробного періоду  $\tau$  для різних  $t$ , отриманих з використанням симуляційних комп'ютерних моделей, показано на рис. 1 б), 1 в), 1 г).

Точніші формули для зміщення й дисперсії оцінки періоду отримують при використанні вищих

наближень. Так, у другому наближенні оцінка  $\hat{T}$  буде вже асимптотично незміщеною. Однак, чим більшої довжини обробляється відрізок реалізації, тим похибка формул, знайдених в першому наближенні, буде меншою.

### ОЦІНКА ПЕРІОДУ МОДЕЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ

Перетворимо вираз для дисперсії (6), використовуючи подання кореляційної функції ПКВП  $b(t, u)$  у вигляді ряду Фур'є:

$$b(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(u) e^{ik\omega_0 t}.$$

Після певних перетворень отримуємо

$$D[\hat{T}] = \frac{18 \sum_{m,n=1}^N mn \left[ \begin{array}{c} R''_{\eta}[(m+n)T] - \\ -R''_{\eta}[(m-n)T] \end{array} \right]}{N^2 (n+1)^2 (2N+1)^2 [f''(t)]^2}. \quad (7)$$

Звідси випливає, що при проведенні конкретних обчислень можемо використовувати ті апроксимації кореляційної функції, які не тільки є диференційованими для всіх зсувів  $u$ , а й такі, для яких

другі похідні в точці  $u=0$  є від'ємними, тобто в околі цієї точки вибрані кореляційні функції повинні бути випуклими вгору. Тому апроксимацію  $R_\eta(u) = De^{-\alpha|u|}$  у даному випадку використовувати не можемо, оскільки в нулі вона є недиференційованою, а її друга похідна для всіх  $u$  є додатною. Легко бачити, що підстановка цього виразу до співвідношення (7) приводить до від'ємних значень дисперсії. Якщо прийемо, що  $R_\eta(u) = De^{-\alpha u^2}$ , і припустимо, що кореляційна функція швидко загасає з ростом зсуву, так що  $e^{-\alpha T^2} \approx 0$ , то після певних перетворень маємо:

$$D[\hat{T}] = \frac{6D\alpha}{N(N+1)(2N+1)[f''(t)]^2} \quad (8)$$

Величина (8), як видно, дуже швидко спадає з ростом числа періодів  $N$ , що усереднюються.

Дисперсія оцінки періоду зменшується при зменшенні потужності адитивного шуму й стає рівною нулю при  $D=0$ . Цей результат легко пояснюється, оскільки в цьому випадку оцінюється період періодичної функції, а для неї положення максимуму функціоналу (3) точно збігається зі значенням періоду. Нульовою буде дисперсія оцінки періоду й для періодичного випадкового процесу

$$\xi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n e^{in\omega_0 t},$$

де  $\xi_n$  – випадкові величини, кожна реалізація якого є періодичною функцією. Це впливає також з формули (6), оскільки тоді

$$b(t, u) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} r_{pq} e^{i\omega_0[(q-p)t + qu]}$$

Для мультиплікативної моделі  $\xi(t) = \eta(t) f(t)$ ,

коли  $b(t, u) = R_\eta(u) f(t) f(t+u)$ ,  $R_\eta(u) = De^{-\alpha u^2}$ , та при швидкому загасанні кореляційних зв'язків

$$D[\hat{T}] = \frac{3D[2\alpha f^2(t) + f'^2(t)]}{N(N+1)(2N+1)m_\eta^2[f''(t)]^2}.$$

Дисперсія оцінки періоду, як видно, є пропорційною відношенню потужності модулюючого процесу до квадрату його математичного сподівання, а також декременту загасання його кореляційних зв'язків. Якщо  $f(t) = \cos \omega_0 t$ , то

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\alpha f^2(t) + [f'(t)]^2 = \\ &= \alpha + \frac{\omega_0^2}{2} + \left( \alpha - \frac{\omega_0^2}{2} \right) \cos 2\omega_0 t. \end{aligned}$$

Звідси при значеннях  $t=0$  і  $t = \frac{T}{2}$ , що є точками екстремальних значень другої похідної, маємо  $y(t) = 2\alpha$ .

Використовуючи представлення кореляційних компонентів через авто- та взаємкореляційні

функції стаціонарних випадкових процесів, які формують ПКВП, тобто [1]

$$B_l(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_{k-l, k} e^{ik\omega_0 u},$$

на основі (6) можна вивести формулу дисперсії оцінки періоду в загальному випадку.

Оскільки

$$B_l'(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ R_{k-l, k}'(u) e^{ik\omega_0 u} + ik\omega_0 R_{k-l, k}(u) e^{ik\omega_0 u} \right],$$

$$B_l''(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \begin{aligned} &R_{k-l, k}''(u) e^{ik\omega_0 u} + \\ &+ 2ik\omega_0 R_{k-l, k}'(u) e^{ik\omega_0 u} - \\ &- k^2 \omega_0^2 R_{k-l, k}(u) e^{ik\omega_0 u} \end{aligned} \right],$$

$$D[\hat{T}] =$$

$$\begin{aligned} &9 \sum_{m, n=-N}^N mn \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{il\omega_0 t} \left[ \begin{aligned} &k\omega_0^2 (k-l) R_{k-l, k}[(m-n)T] + \\ &+ i\omega_0 (l-2k) R_{k-l, k}'[(m-n)T] - \\ &- R_{k-l, k}''[(m-n)T] f^2(t) \end{aligned} \right] \\ &= \frac{\quad}{N^2 (N+1)^2 (2N+1)^2 m''(t)^2}. \end{aligned}$$

## ВИСНОВКИ

Величина пробного періоду, при якій когерентний функціонал (3) приймає абсолютно максимальне чи мінімальне значення, є асимптотично незміщеною і слухною оцінкою періоду корельованості ПКВП.

Підставляючи в останню формулу конкретні вирази для кореляційних функцій  $R_{kl}(u)$  та проводячи обчислення, можемо проаналізувати залежність дисперсії оцінки періоду від довжини відрізка реалізації та параметрів, що описують імовірнісну структуру модельованих сигналів.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. – Л.: Гидрометеоздат, 1987. – 319 с.
2. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. – М.: Сов. радио, 1978. – 296 с.
3. Серебренников М.Г., Первозванский А.А. Выявление скрытых периодичностей. – М.: Наука, 1965. – 244 с.
4. Яворский И.Н. Применение схемы Бью-Балло при статистическом анализе ритмических сигналов. // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 1984. – Т. 27. – № 11. – С. 31-37.
5. Koopmans L. The Spectral Analysis of Time Series. – New-York and London: Academic Press, 1974. – 366 p.