Загальний метод побудови оптимальних за порядком точності кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням інтерлінації функцій

Литвин О.М., Нечуйвітер О.П.

Українська інженерно – педагогічна академія
м. Харків, вул. Університетська, 16
academ@kharkov.ua olesya@email.com

Анотація

У даній роботі вперше запропонований загальний метод побудови кубатурних формул для наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням інтерлінації функцій. Вони належать до класу кубатурних формул, які зводять обчислення швидкоосцилюючих інтегралів функції двох змінних до обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функції однієї змінної. Доведено, що побудовані кубатурні формули для наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних є оптимальними за порядком точності на класах диференційовних функцій при деяких обмеженнях. Знайдені функції, на яких досягається точне значення похибки.

1. Вступ

Задача створення і дослідження оптимальних алгоритмів обчислювальної математики є однією із найскладніших задач. Питання створення оптимальних алгоритмів (або близьких до них) розв'язання тих чи інших задач пов'язано з тим, що при розв'язанні задач (радіоастрономії, радіолокації, кристалографії і т.і.) необхідно проводити обчислення з досить високою точністю, якомога меншою витратою часу, обробляючи при цьому великі масиви інформації. Ця проблема є актуальною і для задач цифрової обробки сигналів (ЦОС) та зображень. Розв'язання задач ЦОС (як одновимірного так і двовимірного випадку) є одним з прикладів, де приділяється увага побудові оптимальних за точністю, оптимальних за порядком, асимптотично оптимальних та оптимальних за швидкодією алгоритмів, проводиться дослідження алгоритмів за такими характеристиками: похибка розв'язання задачі, необхідний час та пам'ять для реалізації алгоритмів на ЕОМ. Маючи цю інформацію або ці характеристики, можна робити висновки про якість отриманого рішення, якість алгоритму, проводити порівняльний аналіз. В роботах [1]-[3] наведені оптимальні за точністю, оптимальні за порядком точності та асимптотично оптимальні кубатурні формули обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на класах Ліпшиця, диференційовних функцій.

Введення нового апарату при дослідженні тих чи інших питань є завжди актуальним. Так, застосування вейвлетів в ЦОС [4] привело до отримання нових результатів. Використання апарату інтерлінації функцій [5] до обчислення двовимірного перетворення Фур'є дозволяє зробити ефективний внесок в створення оптимальних алгоритмів розв'язання задач ЦОС.

2. Наближене обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням інтерлінації функцій

У данній роботі мова буде іти про побудову оптимальної по порядку точності кубатурної формули для обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних

$$I(f,\omega)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin\omega x\sin\omega y\,dxdy$$

на основі сплайн-інтерлінації на лініях ректангуляції (на системі ліній $x=x_i$, $i=\overline{1,N_1}$ та $y=y_j$, $j=\overline{1,N_2}$), де $f(x,y)$ - належить деякому класу функцій та інформація про функцію задана не більше ніж на N лініях з $[0,1]^2$.

В якості множини кубатурних формул L_N для наближеного обчислення $I(f,\omega)$ будемо розглядати множину кубатурних формул ℓ_N, що використовують інформація про $f(x,y)$ не більше ніж на N лініях. Через $R(f,\omega,\ell_N)$ позначимо похибку наближеного обчислення $I(f,\omega)$ кубатурною формулою ℓ_N: $R(f,\omega,\ell_N)=I(f,\omega)-\ell_N$. Похибкою кубатурної формули ℓ_N на класі F називаємо величину $R(F,\omega,\ell_N)=\sup\limits_{f(x)\in F}\left|R(f,\omega,\ell_N)\right|$. Оптимальною похибкою чисельного інтегрування на класі називаємо $R_N(F,\omega)=\inf\limits_{\ell_N\in L_N}R(F,\omega,\ell_N)$. Щоб отримати оцінку знизу величини $R_N(F,\omega)$ спочатку для фіксованої кубатурної формули ℓ_N отримаємо оцінку знизу величини $R(F,\omega,\ell_N)$. Якщо ця оцінка знизу величини $R(F,\omega,\ell_N)$ не залежить від кубатурної формули ℓ_N, то ця ж оцінка справедлива і для величини $R_N(F,\omega)$. Для отримання оцінок знизу величини $R(F,\omega,\ell_N)$ використовуємо метод "капелюхів", основу якого складає наступна лема.

Лема. Хай $f(x,y)\in L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega),\ 1\le q\le\infty,$

$$L_q^p(\Omega)=:\Big\{f(x,y)\Big|f^{(s_1,s_2)}(x,y)\in C(\Omega),\ \ 0\le s_k\le p_k,$$

$$k=1,2,\ s\ne p,\ \ p=(p_1,p_2):\ \left\|f^{(p)}\right\|_{L_q(\Omega)}\le 1\Big\}$$

і $I(f,\omega)$ обчислюється за допомогою кубатурної формули

$$\ell_N=\sum_{k=1}^{N_1}\alpha_k\sum_{s_1=0}^{n}\int_0^1 f^{(s_1,0)}(x_k,y)\sin\omega y dy+$$

$$+\sum_{j=1}^{N_2}\beta_j\sum_{s_2=0}^{n}\int_0^1 f^{(0,s_2)}(x,y_j)\sin\omega x dx-\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}c_{kj}f(x_k,y_j),$$

що зводить $I(f,\omega)$ до обчислення N інтегралів

$$\int_0^1 f^{(s_1,0)}(x_k,y)\sin\omega y dy,\ \int_0^1 f^{(0,s_2)}(x,y_j)\sin\omega x dx,$$

$k=\overline{1,N_1},\quad j=\overline{1,N_2},\quad N=N_1+N_2,\quad s_1,s_2=\overline{0,n}$. Тоді для похибки $R(f,\omega,\ell_N)=I(f,\omega)-\ell_N$ справедлива формула:

$$R(f,\omega,\ell_N)=\int_0^1\int_0^1\varphi(x,y)\sin\omega x\sin\omega y dxdy,$$

де $\varphi(x,y)\Big|_{x=x_k}=0,\ \varphi(x,y)\Big|_{y=y_j}=0,\ \varphi(x_k,y_j)=0,$

$1\le k\le N_1,\ 1\le j\le N_2$.

Зауваження 1. Аналогічна лема для випадку однієї змінної наводиться в [3].

Хай $\Pi_i=\left[x_{i_1},\ x_{i_1+1}\right]\times\left[y_{i_2},\ y_{i_2+1}\right],\quad i=(i_1,i_2),$ $i_1=\overline{1,N_1-1},\quad i_2=\overline{1,N_2-1},\quad \Omega=[0,1]^2,\ \Omega=\bigcup_i\Pi_i$.

Розглянемо оператор

$$E_{i,n}f(x,y)=\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{s_1=0}^{n}h_{j_1,s_1}(x)f^{(s_1,0)}(x_{j_1},y)+$$

$$+\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{s_2=0}^{n}H_{j_2,s_2}(y)f^{(0,s_2)}(x,y_{j_2})-$$

$$-\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{s_1=0}^{n}\sum_{s_2=0}^{n}h_{j_1,s_1}(x)H_{j_2,s_2}(y)f^{(s_1,s_2)}(x_{j_1},y_{j_2}),$$

$$(x,y)\in\Pi_i\subset\Omega,\ i=(i_1,i_2),$$

де $h_{j_1,s_1}(x),\ H_{j_2,s_2}(y)$ - базисні сплайни порядку 0, 1, 2, 3,...з властивостями

$$\frac{d^{p_1}h_{j_1,s_1}(x)}{dx^{p_1}}\Bigg|_{x=x_k}=\delta_{p_1,s_1}\delta_{k,j_1},\ \frac{d^{p_2}H_{j_2,s_2}(y)}{dy^{p_2}}\Bigg|_{y=y_j}=\delta_{p_2,s_2}\delta_{j,j_2}.$$

Цей оператор має властивості

$$f(x,y)\in C^m(\Omega)\to E_{i,n}f(x,y)\in C^{m-n}(\Omega),\ m\ge 2n,$$

$$\frac{\partial^{p_1}E_{i,n}f(x,y)}{\partial x^{p_1}}\Bigg|_{x=x_k}=\frac{\partial^{p_1}f(x,y)}{\partial x^{p_1}}\Bigg|_{x=x_k},$$

$$\frac{\partial^{p_2}E_{i,n}f(x,y)}{dy^{p_2}}\Bigg|_{y=y_j}=\frac{\partial^{p_2}f(x,y)}{dy^{p_2}}\Bigg|_{y=y_j},$$

$$0\le p_1,p_2\le n.$$

Тоді оператор $E_\Omega f(x,y)$, що визначається рівностями

$$E_\Omega f(x,y)=E_{i,n}f(x,y),\ (x,y)\in\Pi_i\subset\Omega$$

буде задовольняти умови $E_\Omega f(x,y)\in C^n(\Omega)$,

$$\frac{\partial^{p_1}E_\Omega f(x,y)}{\partial x^{p_1}}\Bigg|_{x=x_k}=\frac{\partial^{p_1}f(x,y)}{\partial x^{p_1}}\Bigg|_{x=x_k},$$

$$\frac{\partial^{p_2}E_\Omega f(x,y)}{dy^{p_2}}\Bigg|_{y=y_j}=\frac{\partial^{p_2}f(x,y)}{dy^{p_2}}\Bigg|_{y=y_j},$$

$$0\le p_1,p_2\le n,$$

і називається кусково-поліноміальним інтерлінаційним оператором, або кусково-поліноміальним інтерлінантом. Він інтерлінує функцію $f(x,y)$ та її немішані похідні на чотирьох взаємно-перпендикулярних прямих – границі Π_i; при цьому на межах двох сусідніх прямокутників, що мають спільні сторони або точки; породжені цим оператором функції зберігають неперервні похідні до порядку n включно. Функція $E_\Omega f(x,y)$ має значення в точках $(x,y)\in\Pi_i\subset\Omega$, залежні від слідів функції $f(x,y)$ та її нормальних похідних до порядку n лише на межі $\partial\Pi_i$.

Похибка поліноміальної інтерлінації [5] в кожному з прямокутників Π_i задовольняє нерівність $\left|f(x,y)-E_\Omega f(x,y)\right|\le\left|Q_i(x,y)\right|,\qquad (x,y)\in\Pi_i\subset\Omega,$ $i=(i_1,i_2)$, де $Q_i(x,y)$ ‘стандартна’ функція:

$$Q_i(x,y)=\frac{1}{\left[(2(n+1))!\right]^2}\prod_{j_1=i_1}^{i_1+1}\left(x-x_{j_1}\right)^{n+1}\cdot\prod_{j_2=i_2}^{i_2+1}\left(y-y_{j_2}\right)^{n+1},$$

$(x,y)\in\Pi_i$. Якщо $f(x,y)\in L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega)$, то $\left|f(x,y)-E_\Omega f(x,y)\right|\le\left|Q(x,y)\right|,\qquad (x,y)\in\Omega,$ де $Q(x,y)=Q_i(x,y),\ (x,y)\in\Pi_i$. Оцінка є найкращою у кожній точці $x\in\Omega$. Тому похибка наближення функції $f(x,y)\in L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega)$, оператором $E_\Omega f(x,y)$ у кожній точці оцінюється з огляду на значення функції $Q(x,y)=Q_i(x,y),\ (x,y)\in\Pi_i$.

Хай $f(x,y)\in L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega),\ 1\le q\le\infty,$ та сліди $f(x_{j_1},y),\ f(x,y_{j_2}),\ j_1,j_2=\overline{1,M}$, задані не більше, ніж на $N=2M$ прямих. Для обчислення інтегралу

$$I(f,\omega)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin\omega x\sin\omega y dxdy$$

має місце формула:

$$\Phi_N(f,\omega)=\int_0^1\int_0^1 E_\Omega f(x,y)\sin\omega x\sin\omega y dxdy.$$

Підставляючи вираз для оператора-інтерлінанта, отримаємо $\Phi_N(f,\omega)=$

$$=\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{s_1=0}^{n}\int_0^1 h_{j_1,s_1}(x)\sin\omega x dx\int_0^1 f^{(s_1,0)}(x_{j_1},y)\sin\omega y dy+$$

$$+\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{s_2=0}^{n}\int_0^1 H_{j_2,s_2}(y)\sin\omega y dy\int_0^1 f^{(0,s_2)}(x,y_{j_2})\sin\omega x dx-$$

$$-\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{s_1,s_2=0}^{n} f^{(s_1,s_2)}(x_{j_1},y_{j_2})\int_0^1 h_{j_1,s_1}(x)\sin\omega x dx\int_0^1 H_{j_2,s_2}(y)\sin\omega y dy.$$

Будемо вважати, що $\int_0^1 f^{(s_1,0)}(x_{j_1},y)\sin\omega y dy$, $\int_0^1 f^{(0,s_2)}(x,y_{j_2})\sin\omega x dx$ задані точно.

Теорема 1. Кубатурна формула $\Phi_N(f,\omega)$ для обчислення інтегралу $I(f,\omega)$ є оптимальною за порядком точності при $M\ge|\omega|$.

Доведення. Отримаємо оцінку знизу та зверху величини

$R(F,\omega,\ell_N)=R\left(L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega),\omega,\Phi_N(f,\omega)\right)$.

Знайдемо оцінку зверху $\left|I(f,\omega)-\Phi_N(f,\omega)\right|=$

$$=\left|\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y)-E_\Omega f(x,y)\right)\sin\omega x\sin\omega y dxdy\right|\le$$

$$\le\sum_{j_1=1}^{M-1}\sum_{j_2=1}^{M-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_r}^{y_{r+1}}\left|f(x,y)-E_\Omega f(x,y)\right|dxdy\le\frac{1}{\left[(2(n+1))!\right]^2}$$

$$\times\sum_{j_1,j_2=1}^{M-1}\int_{x_{j_1}}^{x_{j_1+1}}\int_{y_{j_2}}^{y_{j_2+1}}\prod_{\alpha=i_1}^{i_1+1}\prod_{\beta=i_2}^{i_2+1}(x-x_\alpha)^{n+1}(y-y_\beta)^{n+1}dxdy=$$

$$=\frac{\Delta^{2(n+1)}\cdot\Delta^{2(n+1)}}{(2(n+1))!\,(2(n+1))!}=\frac{\Delta^{4(n+1)}}{\left[(2(n+1))!\right]^2},$$

$$\Delta=\max_{1\le i_1,i_2\le M-1}\left\{x_{i_1+1}-x_{i_1},\,y_{i_2+1}-y_{i_2}\right\}.$$

Оскільки оцінка $\left|I(f,\omega)-\Phi_N(f,\omega)\right|$ справедлива для любої функції класу $L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega)$, то

$$R\left(L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega),\omega,\Phi_N(f,\omega)\right)\le\frac{\Delta^{4(n+1)}}{\left[(2(n+1))!\right]^2}=$$

$$=\frac{1}{\left[(2(n+1))!\right]^2}\frac{1}{M^{4(n+1)}}=\frac{2^{4(n+1)}}{\left[(2(n+1))!\right]^2}\frac{1}{N^{4(n+1)}}.$$

Знайдемо оцінку знизу. Хай область Ω розбивається на підобласті $G_{kr}=\Delta_k\times\bar{\Delta}_r$,

$$\Delta_k=\left\{x:x\in\left[(6k+1)\pi/6\cdot|\omega|;(6k+5)\pi/6\cdot|\omega|\right]\right\},$$

$$k=0,1,\ldots,\left[|\omega|/\pi\right]-1,$$

$$\bar{\Delta}_r=\left\{y:y\in\left[(6r+1)\pi/6\cdot|\omega|;(6r+5)\pi/6\cdot|\omega|\right]\right\},$$

$$r=0,1,\ldots,\left[|\omega|/\pi\right]-1,$$

площею $\frac{2\pi}{3|\omega|}\times\frac{2\pi}{3|\omega|}$; тоді в точках цієї підобласті маємо $|\sin\omega\ \ x|\ge\frac{1}{2}$, $|\sin\omega\ \ y|\ge\frac{1}{2}$, $(x,y)\in G_{kr}$. Хай $M\ge|\omega|$. Розіб'ємо кожну область G_{kr} на $\ell=\left(\left[2M/\left[|\omega|/\pi\right]\right]+1\right)^2$ підобластей $G_{kr}^{\nu\mu}=\Delta_k^\nu\times\bar{\Delta}_r^\mu$, $\nu,\mu=0,\ldots,\ell-1$. Повне число підобластей $G_{kr}^{\nu\mu}$ дорівнює $\ell\cdot\left(\left[|\omega|/\pi\right]\right)^2\ge 4M^2$, отже буде не менше ніж M^2 областей $G_{kr}^{\nu\mu}$, куди не попали вузли кубатурної формули. Зауважимо, що

$$\left(f(x,y)-E_\Omega f(x,y)\right)\Big|_{x=x_k^\mu}=\left(f(x,y)-E_\Omega f(x,y)\right)\Big|_{y=y_r^\nu}=0.$$

Розглянемо функцію

$$f^*(x,y)=\frac{1}{\left[(2n+2)!\right]^2}\left(x-x_k^\mu\right)^{n+1}\left(x-x_k^{\mu+1}\right)^{n+1}\times$$

$$\times\left(y-y_r^\nu\right)^{n+1}\left(y-y_r^{\nu+1}\right)^{n+1}sign(\sin\omega x)\,sign(\sin\omega y),$$

на тих $\Delta_k^\nu\times\bar{\Delta}_r^\mu$, куди не попали лінії інтегрування. Коли $(x,y)\in G\setminus G_{kr}^{\nu\mu}$, то $f^*(x,y)=0$. Ця функція належить класу $L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega)$ та згідно методу “капелюхів” є поганою функцією класу. Знайдемо оцінку знизу:

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f^*(x,y)\sin\omega x\sin\omega y dxdy\right|=$$

$$=\frac{1}{\left[(2n+2)!\right]^2}\left|\sum_{\Delta_k^\mu}\sum_{\bar{\Delta}_r^\nu}\int_{\Delta_k^\mu}\int_{\bar{\Delta}_r^\nu}\prod_{\alpha=\mu}^{\mu+1}\prod_{\beta=\nu}^{\nu+1}\left(x-x_k^\alpha\right)^{n+1}\left(y-y_r^\beta\right)^{n+1}\times\right.$$

$$\left.\times sign(\sin\omega x)\,sign(\sin\omega y)\sin\omega x\sin\omega y dxdy\right|\ge$$

$$\ge\frac{1}{4\left[(2n+2)!\right]^2}\sum_{\Delta_k^\mu}\sum_{\bar{\Delta}_r^\nu}\int_{\Delta_k^\mu}\int_{\bar{\Delta}_r^\nu}\left|\prod_{\alpha=\mu}^{\mu+1}\prod_{\beta=\nu}^{\nu+1}\left(x-x_k^\alpha\right)^{n+1}\left(y-y_r^\beta\right)^{n+1}\right|dxdy=$$

$$\ge\frac{1}{4\left[(2n+2)!\right]^2}\sum_{\Delta_k^\mu}\sum_{\bar{\Delta}_r^\nu}\int_{\Delta_k^\mu}\left|\left(x-x_k^\mu\right)^{n+1}\left(x-x_k^{\mu+1}\right)^{n+1}\right|dx\times$$

$$\times\int_{\bar{\Delta}_r^\nu}\left|\left(y-y_r^\nu\right)^{n+1}\left(y-y_r^{\nu+1}\right)^{n+1}\right|dy.$$

Обчислимо інтеграл

$$\int_{\Delta_k^\mu} \left| \left(x - x_k^\mu\right)^{n+1} \left(x - x_k^{\mu+1}\right)^{n+1} \right| dx =$$

$$= \int_{x_k^\mu}^{x_k^{\mu+1}} \left(x - x_k^\mu\right)^{n+1} \left(x_k^{\mu+1} - x\right)^{n+1} dx = \frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n+3)!} \left(\Delta_{1k}^\mu\right)^{2n+3}.$$

Отже, $\left| \int_0^1 \int_0^1 f^*(x,y) \sin\omega x \sin\omega y dxdy \right| \geq$

$$\geq \frac{1}{4\left[(2n+2)!\right]^2} \frac{\left((n+1)!\right)^4}{\left((2n+3)!\right)^2} \sum_{\Delta_k^\mu} \sum_{\overline{\Delta}_r^\nu} \left|\Delta_k^\mu\right|^{2n+3} \left|\overline{\Delta}_r^\nu\right|^{2n+3} \geq$$

$$= \frac{1}{\left[(2n+2)!\right]^2} \frac{\left((n+1)!\right)^4}{\left((2n+3)!\right)^2} \left(\frac{2\pi}{3|\omega| \left[2M / \left[|\omega| / \pi\right]\right]} \right)^{4n+4} \geq$$

$$= \frac{1}{\left[(2n+2)!\right]^2} \frac{\left((n+1)!\right)^4}{\left((2n+3)!\right)^2} \left(\frac{1}{6}\right)^{4n+4} \frac{1}{M^{4(n+1)}} =$$

$$= \frac{1}{\left[(2n+2)!\right]^2} \frac{\left((n+1)!\right)^4}{\left((2n+3)!\right)^2} \left(\frac{1}{3}\right)^{4n+4} \frac{1}{N^{4(n+1)}}.$$

Розглянемо функцію $f_1^*(x,y) = -f^*(x,y)$. Наближені значення інтегралів $I\left(f^*,\omega\right)$ та $I\left(f_1^*,\omega\right)$, що обчислені за кубатурною формулою $\Phi_N(f,\omega)$ рівні між собою. Точні значення інтегралів $I\left(f^*,\omega\right)$ та $I\left(f_1^*,\omega\right)$ рівні за модулем та мають протилежний знак. Отже, хоча б для одної з функцій $f_1^*(x,y)$, $f^*(x,y)$ похибка інтегрування буде більша або дорівнювати модулю інтеграла. Значить в якості функції $\varphi(x)$ беремо $f^*(x,y)$. Отже, отримали оцінку знизу та зверху величини

$$R\left(F,\omega,\ell_N\right) = R\left(L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega),\omega,\Phi_N(f,\omega)\right):$$

$$R\left(L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega),\omega,\Phi_N(f,\omega)\right) \geq C_1 \frac{1}{N^{4(n+1)}},$$

$$R\left(L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega),\omega,\Phi_N(f,\omega)\right) \leq C_2 \frac{1}{N^{4(n+1)}},$$

$$C_1 = \frac{1}{\left[(2n+2)!\right]^2} \frac{\left((n+1)!\right)^4}{\left((2n+3)!\right)^2} \left(\frac{1}{3}\right)^{4n+4},$$

$$C_2 = \frac{1}{\left[(2n+2)!\right]^2}.$$

Теорема доведена.

Зауваження 2. Кубатурна формула $\Phi_N(f,\omega)$ для обчислення інтегралу $I(f,\omega)$ при умові, що $\int_0^1 f^{(s_1,0)}(x_{j_1},y)\sin\omega y dy, \int_0^1 f^{(0,s_2)}(x,y_{j_2})\sin\omega x dx$ задані точно і виконується умова: $\left\{\left[|\omega|/\pi\right]+1\right\}$ нулів функції $\sin\omega x$ на $[0,1]$ та $\left\{\left[|\omega|/\pi\right]+1\right\}$ нулів функції $\sin\omega y$ на $[0,1]$ входить в число вузлів $\left(x_{j_1},y_{j_2}\right)$, $j_1, j_2 = \overline{1,M}$ є оптимальною за точністю при $M \geq |\omega|$.

3. Висновки

1. У даній роботі вперше запропонований загальний метод побудови оптимальних за порядком точності кубатурних формул для наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням інтерлінації функцій. Запропонована кубатурна формула належить до класу кубатурних формул, які зводять обчислення швидкоосцилюючих інтегралів функції двох змінних до обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функції однієї змінної. Це означає, що використовуючи ту або іншу квадратурну формулу для обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функції однієї змінної ми можемо отримати різні кубатурні формули.

2. Розглянута кубатурна формула є точною на класі $f(x,y) \in L_q^{2(n+1),\,2(n+1)}(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$. Точне значення похибки досягається на функціях

$$f^*(x,y) = \frac{1}{\left[(2n+2)!\right]^2} \left(x - x_k^\mu\right)^{n+1} \left(x - x_k^{\mu+1}\right)^{n+1} \times$$

$$\times \left(y - y_r^\nu\right)^{n+1} \left(y - y_r^{\nu+1}\right)^{n+1} sign\left(\sin\omega x\right) sign\left(\sin\omega y\right),$$

$$(x,y) \in \Pi_i \subset \Omega.$$

3. Наступним кроком в даному напрямку на думку авторів є дослідження кубатурних формул, які вказані у пункті 1. висновків, тобто кубатурних формул, що отримуються шляхом зведення до одновимірних інтегралів та заміни цих інтегралів відповідними квадратурними формулами.

4. Література

[1] Задирака В.К., Мельникова С.С. Цифровая обработка сигналов. -Киев. Наукова Думка. - 1993. -294 с.

[2] Жилейкин Я.М., Кукаркин А.Б. Приближенное вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций: Учебно-практическое пособие. -М.: МГУ. -1987.-99с.

[3] Жилейкин Я.М., Кукаркин А.Б. Об оптимальном вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций // ЖВМ и МФ. -1978. -18.-№2.- С.294-301.

[4] *Малла С.* Вейвлеты в цифровой обработке сигналов. Пер. с англ.- М.: Мир, 2005. –671 с.

[5] Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. -Харків.: Основа, 2002. -544 с.