Використання мішаної апроксимації кусково-сталими сплайнами у стискуванні інформації

С. І. Кулик, О. М. Литвин

Українська інженерно-педагогічна академія
61003, м. Харків, вул. Університетська, 16
poiksi@ukr.net, academ@kharkov.ua

Анотація

Апроксимація двовимірних об'єктів класичними кусково-сталими сплайнами, що використовують для своєї побудови середні значення на множині прямокутників, які розбивають область апроксимації, може бути ефективно використана для стискування інформації про двовимірний сигнал лише при умові оптимального вибору вузлів розбиття. Для практики значний інтерес представляють також оператори мішаної апроксимації кусково-сталими сплайнами з використанням середніх, „медіан”.” та інших типів апроксимацій функцій двох змінних кусково-сталими. Це пов'язане з їх високою точністю: порівняно з класичною апроксимацією кусково-сталими сплайнами, мішана апроксимація дає більш високу точність наближення при однаковій кількості використаних даних. Тому сказане вище стосується також мішаної апроксимації кусково-сталими сплайнами.В даній роботі досліджуються ці питання більш детально.

1. Вступ

1.1. Формулювання основного результату

Для стискування інформації із втратою [1,§8.5] про двовимірні об'єкти пропонується використовувати оператори мішаної апроксимації кусково-сталими сплайнами, побудованими з використанням середніх та „медіан”. Припустимо, що досліджуваний об'єкт описується функцією $z = g(x,y),\ (x,y)\in E^2,\ E=[0,1]$.

Введемо позначення

$$\Delta_1 = [0,\frac{1}{n});\Delta_i = \left(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right), i=\overline{2,n-1}; \Delta_n = (\frac{n-1}{n},1];$$

$$\Delta_1^* = [0,\frac{1}{n^*});\ \Delta_{i^*}^* = \left(\frac{i^*-1}{n^*},\frac{i^*}{n^*}\right),\ i^* = \overline{2,n^*-1};\ \Delta_{n^*}^* = (\frac{n^*-1}{n^*},1];$$

$n^* = n^2$, а також наступні оператори кусково-сталої апроксимації з використанням середніх по одній змінній.

$$O_1 g(x,y) = C_{1,i} g(y) = \frac{1}{|\Delta_i|}\int_{\Delta_i} g(x,y)\,dx,\quad x\in\Delta_i,\ y\in E,\ i=\overline{1,n}$$

$$O_2 g(x,y) = C_{2,j} g(x) = \frac{1}{|\Delta_j|}\int_{\Delta_j} g(x,y)\,dy,\quad y\in\Delta_j,\ x\in E,\ j=\overline{1,n}$$

$$O_{1,2} g(x,y) = O_1 O_2 g = F_{i,j} g = \frac{1}{|\Delta_i||\Delta_j|}\int_{\Delta_i}\int_{\Delta_j} g(x,y)\,dxdy,\ x\in\Delta_i,\ y\in\Delta_j$$

$$Og(x,y) = \left(O_1 + O_2 - O_{1,2}\right) g(x,y)$$

Оператори $O_1 O_2 g(x,y)$ є класичними операторами кусково-сталої апроксимації середніми з властивостями:

$$\frac{1}{|\Delta_i||\Delta_j|}\int_{\Delta_i}\int_{\Delta_j} O_{1,2} g(x,y)\,dxdy = \frac{1}{|\Delta_i||\Delta_j|}\int_{\Delta_i}\int_{\Delta_j} g(x,y)\,dxdy,\ x\in\Delta_i,\ y\in\Delta_j$$

Оператори $Og(x,y)$ є операторами мішаної кусково-сталої апроксимації з використанням середніх по кожній змінній окремо, а також середніх по обох змінних одночасно. Вони мають наступні властивості:

$$\frac{1}{|\Delta_i|}\int_{\Delta_i} Og(x,y)\,dx = \frac{1}{|\Delta_i|}\int_{\Delta_i} g(x,y)\,dx,\quad x\in\Delta_i,\ y\in E,\ i=\overline{1,n}$$

$$\frac{1}{|\Delta_j|}\int_{\Delta_j} Og(x,y)\,dy = \frac{1}{|\Delta_j|}\int_{\Delta_j} g(x,y)\,dy,\quad y\in\Delta_j,\ x\in E,\ j=\overline{1,n}$$

Крім того, якщо

$$\|g - O_1 g\|_{C(E^2)} = O(\varepsilon),$$

$$\|g - O_2 g\|_{C(E^2)} = O(\varepsilon),\ \ \varepsilon\to 0,$$

то справедливе наступне твердження.

Твердження 1. Якщо $g\in C(D)$**, то**

$$\|g - Og\|_{C(E^2)} = O(\varepsilon^2) \qquad (1.1)$$

Звертаємо увагу на те, що оператори $Og(x,y)$ використовують для своєї побудови інформацію про функцію $g(x,y)$ у вигляді функцій $C_{1,j}g(y), C_{2,i}g(x)$ та у вигляді функціоналів $F_{i,j}(g)$. Наведений нижче оператор

$$O^* g(x,y) = \left(O_1^* + O_2^* - O_{1,2}\right) g(x,y)$$

зберігає точність яку мають оператори $Of(x,y)$, але використовує для своєї побудови лише функціонали $F_{i,j}(g)$, $C_{i,j^*}^*(g), C_{i^*,j}^*(g)$, причому

$$O_1^* g(x,y) = C_{i,j^*}^*(g) = \frac{1}{|\Delta_i|}\frac{1}{|\Delta_{j^*}^*|}\int_{\Delta_i}\int_{\Delta_{j^*}^*} g(x,y)\,dxdy$$

$$x\in\Delta_i,\ y\in\Delta_{j^*}^*,\ i=\overline{1,n};\ j^*=\overline{1,n^*}$$

$$O_2^* g(x,y) = C_{i^*,j}^*(g) = \frac{1}{|\Delta_{i^*}^*|}\frac{1}{|\Delta_j|}\int_{\Delta_{i^*}^*}\int_{\Delta_j} g(x,y)\,dxdy,$$

$$x\in\Delta_{i^*}^*,\ y\in\Delta_j,\ i^*=\overline{1,n^*};\ j=\overline{1,n}$$

$$O^* g(x,y) = C_{i^*,j^*}^*(g) = \frac{1}{|\Delta_i|}\frac{1}{|\Delta_{j^*}^*|}\int_{\Delta_i}\int_{\Delta_{j^*}^*} g(x,y)\,dxdy +$$

$$\frac{1}{|\Delta_k^*|}\frac{1}{|\Delta_j|}\int_{\Delta_k^*}\int_{\Delta_j} g(x,y)\,dxdy - \frac{1}{|\Delta_i|}\frac{1}{|\Delta_j|}\int_{\Delta_i}\int_{\Delta_j} g(x,y)\,dxdy,$$

$$x\in\Delta_i\bigcap\Delta_{i^*},\ y\in\Delta_j\bigcap\Delta_{j^*}^*,\ i,j=\overline{1,n};\ i^*,j^*=\overline{1,n^*}$$

Можна довести, що оператори Og, O^*g наближують неперервно диференційовні функції g з похибкою $O(\varepsilon^2)$, якщо класичний оператор кусково-сталої апроксимації $O_{1,2}g$ наближує g з похибкою $O(\varepsilon)$. тобто справедливе наступне твердження.

Твердження 2. Якщо $g \in C(D)$**, то**

$$\left\| g - O^{*}g \right\|_{C(E^2)} = O(\varepsilon^2) \qquad (1.2)$$

Цей факт дозволяє рекомендувати їх для побудови стискуючих алгоритмів апроксимації двовимірних сигналів у випадку стикування із втратами інформації.

Твердження 3. Найкраще наближення n сталими полягає у такому розбитті області наближення на підобласті $D_i,\ i=\overline{1,n}, \bigcup_{i=1}^{n} D_i = D$, при якому в кожній підобласті D_j функція $g(x,y) \in C(D)$ наближується медіаною

$med_j g == \max_{(x,y)\in D_j} g(x,y) + \min_{(x,y)\in D_j} g(x,y),\ j=\overline{1,n}$ і при цьому

$\left\| g - Sg \right\|_{C(D_i)} = \dfrac{B}{n},\ i=\overline{1,n},\ B = \max_{(x,y)\in E^2} g(x,y) - \min_{(x,y)\in E^2} g(x,y)$.

Цей випадок є найскладнішим при чисельній реалізації.

1.2. Огляд публікацій

Наближення функцій алгебраїчними та тригонометричними інтерполяційними поліномами має декілька недоліків: інтерполяційні поліноми Лагранжа при рівномірному виборі вузлів інтерполяції не збігаються до кожної неперервної функції при збільшенні кількості вузлів інтерполяції; алгебраїчні поліноми високого степеня не можна рекомендувати для наближення функцій на інтервалах $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, значно віддалених від початку координат (тобто якщо $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >> 1$). Для обґрунтування цього твердження достатньо навести такий приклад. Якщо обрано варіант наближення функції $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})| \le \boldsymbol{M},\ \boldsymbol{x} \in [10^{\boldsymbol{k}}, 10^{\boldsymbol{k}}+1]$ поліномом $\boldsymbol{P_n}(\boldsymbol{x})$ степеня $\boldsymbol{n}$, то очевидно, що малі значення $|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})|$ отримаємо шляхом проведення арифметичних операцій з числами $10^{\boldsymbol{ks}}$, $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}-1,...,$ які вже, наприклад, при $\boldsymbol{k} \ge 10, \boldsymbol{n} \ge 10$ вимагають проведення розрахунків з великою кількістю розрядів. Це стосується і обчислень на розрядній сітці з обмеженим числом розрядів при дуже малих значеннях змінної $\boldsymbol{x}$. Наприклад, у арифметичному пристрої, що відповідає стандарту IEEE, для чисел *a*, менших ніж $eps = 2^{-52} \approx 2{,}220446\mathrm{E}-016$, виконується співвідношення $1{,}0 + a = 1{,}0$. Крім того, при наближенні розривних функцій тригонометричними сумами Фур'є в точках розриву першого роду виникає феномен (явище) Гіббса: при збільшенні номера частинної суми Фур'є похибка наближення не зменшується в точці розриву, а залежить від стрибка наближуваної функції в цій точці. Інші приклади наближення функцій з розривною похідною в одній точці $\boldsymbol{a} \in (-1,1)$ наведено в роботі [9].

Звичайно, обчислювальна математика на сьогодні має ряд засобів для боротьби з цими недоліками. Тому класичні алгебраїчні та тригонометричні поліноми були, є й будуть важливим інструментом для дослідження функціональних залежностей.

Вказаних вище недоліків позбавлені сплайни невисоких степенів, хоча, наближення кусково-сталими сплайнами, (яке є простим з обчислювальної точки зору) не є оптимальним при наближенні диференційовних функцій. З іншого боку, наближення розривних і навіть неперервних функцій сплайнами високого порядку не дає таких переваг, як наближення диференційовних функцій сплайнами високого порядку. Тому в теорії наближення розривних і навіть неперервних функцій кусково-сталі сплайни (і більш загальні - кусково-аналітичні сплайни) розглядаються як серйозна альтернатива неперервним та диференційовним сплайнам вищих порядків.

В той же час, теорія цифрової обробки багатовимірних сигналів вимагає створення надійних алгоритмів стиснення, передавання та зберігання сигналів, які можуть бути недиференційовними і навіть бути розривними [1].

2. Відомі методи наближення функцій однієї змінної кусково-сталими сплайнами

2.1. Кусково-сталі сплайни однієї змінної інтерполяційного типу.

Існує три типи операторів наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями (сплайнами степеня 0) [2]-[4]. Найбільш простий з них - наближення операторами інтерполяційного типу, що замінюють на інтервалі розбиття $(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{k}-1}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{k}})$ наближувану функцію $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$ її значенням $\boldsymbol{g}((\mathrm{t}_{\mathrm{k}-1} + \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{k}})/2)$ тобто

$Sp\left(\dfrac{t_{k-1}+t_k}{2}\right) = g\left(\dfrac{t_{k-1}+t_k}{2}\right),\ t_{k-1} < t < t_k,\ k=\overline{1,n}$.

Ці сплайни мають таку похибку наближення:

$e_{n,0,\infty}(g) \le M\left(\dfrac{\Delta}{2}\right)^{\alpha} \quad \forall g \in Lip_M\alpha;\ \Delta = \max_{1\le k\le n}(t_k - t_{k-1})$ де

$e_{n,0,\infty}(g) = \inf_{g_{n,0}\in S_{n,0}} \left\| g - g_{n,0} \right\|_{L_p[0,1]}$

Функція g належить до класу Ліпшица $Lip_M\alpha,\ 0<\alpha\le 1$ з показником α, $g(t) \in Lip_M\alpha$ на відрізку $I=[a,b]$, якщо

$g \in Lip_M\alpha := \left\{ g \in C[a,b] : |g(t) - g(t')| \le M|t-t'|^{\alpha},\ t, t' \in I \right\}$,

$Lip_M\alpha := \bigcup_{M>0} Lip_M\alpha$. Простір $Lip_M\alpha$ є лінійним простором функцій з α-півнормою, яка визначається так:

$|g|_{Lip_M\alpha} := \inf_M \{ M | g \in Lip_M\alpha \}$, або

$g_{Lip_M\alpha[a,b]} = \inf_{x,y\in[a,b]} \dfrac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^{\alpha}},\ 0<\alpha\le 1$.

2.2. Кусково-сталі сплайни однієї змінної з використанням середніх.

Ці оператори замінюють на інтервалі розбиття $(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{k}-1}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{k}})$ наближувану функцію $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$ її середнім значенням $\dfrac{1}{\boldsymbol{t_k} - \boldsymbol{t_{k-1}}} \int_{\boldsymbol{t_{k-1}}}^{\boldsymbol{t_k}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$ тобто

$$Sp\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right) = \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t)\,dt,\ t_{k-1} < t < t_k,\ k=\overline{1,n}.$$

Вони мають таку похибку наближення:

$$\left\| g - Sp \right\|_{L_\infty[a,b]} \le \omega(g,\Delta)_C \quad \forall g \in C(E), E=[a,b],$$

$\omega(g,\Delta)_{C(E)} = \max_{\substack{t',t\in E\\ |t-t'|\le\Delta}} |g(t) - g(t')|$. Найпростіша оцінка отримується, якщо неперервна функція належить класу Ліпшица $\omega(g,\Delta)_C = M\Delta^{\alpha},\ 0<\alpha\le 1$

2.3. Кусково-сталі сплайни однієї змінної з використанням медіан.

Це оператори *Sg(t)* нелінійного типу, що замінюють на інтервалі розбиття (t_{k-1},t_k) функцію $g(t)$ її «медіаною» $\left[\max\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k} g(t)+\min\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k} g(t)\right]\frac{1}{2}$. Для похибки наближення функції $g(t)\in C(E)$ медіанами, виконується нерівність:

$$\max_{0\le t\le 1}\left|g(t)-Sg(t)\right|\le \max_{1\le k\le n}\max_{t_{k-1}\le t\le t_k}\left|g(t)-\frac{\max\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k} g(t)+\min\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k} g(t)}{2}\right|=$$

$$\max_{0\le t\le 1}\left|g(t)-S(t)\right|\le \max_{1\le k\le n}\left|\frac{\max\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k} g(t)-\min\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k} g(t)}{2}\right|=\frac{B}{2n},$$

де $B=Var_{[0,1]}g=\max\limits_{0\le t\le 1} g(t)-\min\limits_{0\le t\le 1} g(t)$ - варіація *g* на *[0,1]*.

2.4. Найкраще наближення кусково-сталими сплайнами однієї змінної з використанням медіан.

Це оператори *Sg(t)* нелінійного типу, що замінюють на інтервалі розбиття (t_{k-1},t_k) наближувану функцію $g(t)$ її «медіаною» $\left[\max\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k} g(t)+\min\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k} g(t)\right]\frac{1}{2}$

причому вузли t_k вибираються так, щоб $\left[\max\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k} g(t)+\min\limits_{t_{k-1}\le t\le t_k} g(t)\right]\frac{1}{2}=\gamma\forall k$

Найкраще наближення кусково-сталими із використанням медіан дає таку оцінку похибки в нормі L_∞ : $\left\|g-Sg\right\|_{L_\infty[a,b]}\le\frac{M}{2n}\quad\forall g\in C[a,b]$.

3. Наближення $g(x,y)\in C\left[E^2\right]$ кусково-сталими

3.1. Кусково-сталі сплайни двох змінних інтерполяційного типу

Існує п'ять типів операторів наближення неперервних функцій двох змінних кусково-сталими функціями (сплайнами степеня 0). Найбільш простий метод– наближення операторами інтерполяційного типу, що замінюють на прямокутнику розбиття $(x_{k-1},x_k)\times(y_{l-1},y_l)$ наближувану функцію $g(x,y)$ її значенням в центрі цього прямокутника $g((x_{k-1}+x_k)/2,(y_{l-1}+y_l)/2)$. Тобто

$$S(x,y)=g\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\frac{y_{l-1}+y_l}{2}\right),\ (x,y)\in(x_{k-1},x_k)\times(y_{l-1},y_l)\quad(3.1)$$

Ці оператори дають похибку:

$$\left\|g-Sp\right\|_{C(E^2)}=O\left(M\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{\alpha}\right),\ \Delta=\max_{1\le k\le n}\left\{x_k-x_{k-1},y_l-y_{l-1}\right\},\ \Delta\to 0$$

3.2. Кусково-сталі сплайни двох змінних з використанням середніх

Оператори наближення кусково-сталими сплайнами двох змінних з використанням середніх замінюють на прямокутнику розбиття $(x_{k-1},x_k)\times(y_{l-1},y_l)$ наближувану функцію $g(x,y)$ її середнім значенням

$$m_{k,l}(g)=\frac{1}{x_k-x_{k-1}}\frac{1}{y_l-y_{l-1}}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\int_{y_{l-1}}^{y_l} g(x,y)dx\,dy.$$

Тобто $Sg(x,y)=m_{k,l}(g),\ (x_{k-1},x_k)\times(y_{l-1},y_l)$ (3.2)

Ці оператори дають похибку:

$$\left\|g-Sg\right\|_{L_\infty\left[E^2\right]}\le\omega(g,\Delta)_C=O\left(M\Delta^{\alpha}\right),\ 0<\alpha\le 1,\ \forall g(x,y)\in C\left(E^2\right)$$

3.3. Кусково-сталі сплайни двох змінних з використанням медіан

Це наближення операторами нелінійого типу *Sg*, що замінюють на прямокутнику розбиття $(x_{k-1},x_k)\times(y_{l-1},y_l)$ наближувану функцію $g(x,y)$ її «медіаною»

$$med_{k,l}(g)=\left[\max_{\substack{x_{k-1}\le x\le x_k\\ y_{l-1}\le y\le y_l}} g(x,y)+\min_{\substack{x_{k-1}\le x\le x_k\\ y_{l-1}\le y\le y_l}} g(x,y)\right]\frac{1}{2}.$$

Тобто $Sg(x,y)=med_{k,l}(g),\ (x_{k-1},x_k)\times(y_{l-1},y_l)$ (3.3)

Ці оператори дають таку похибку наближення $\left\|g-Sg\right\|_{C(E^2)}=O\left(\frac{M}{2n}\right)$

При побудові цих операторів нелінійного наближення може бути знайдене найкраще наближення: для цього відшукують таке розбиття (тобто вузли (x_k,y_l) розбиття), за якого «медіани» дають найкраще наближення (див. п.4.5).

3.4. Мішана апроксимація кусково-сталими сплайнами двох змінних інтерполяційного типу

Цей тип операторів апроксимації функцій двох змінних $g(x,y)$ визначається формулою

$$OIg(x,y)=(OI_1+OI_2-OI_1OI_2)g(x,y),\qquad(3.4)$$

$$OI_1g(x,y)=g\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2},y\right),\ x_{k-1}<x<x_k$$

$$OI_2g(x,y)=g\left(x,\frac{y_{l-1}+y_l}{2}\right),\ y_{l-1}<y<y_l$$

$$OI_1OI_2g(x,y)=g\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\frac{y_{l-1}+y_l}{2}\right),$$

$x_{k-1}<x<x_k,\quad y_{l-1}<y<y_l$

Ці оператори дають похибку

$$\left\|g-OIg\right\|_{C(E^2)}=O\left(\varepsilon^2\right),\ \varepsilon\to 0\qquad(3.5)$$

якщо $\left\|g-OI_1g\right\|_{C(E^2)}=O(\varepsilon),\ \left\|g-OI_2g\right\|_{C(E^2)}=O(\varepsilon)$.

3.5. Мішана апроксимація кусково-сталими сплайнами двох змінних з використанням середніх

Цей тип апроксимації визначається формулами: $Sg(x,y)=(S1+S2-S1S2)g(x,y)$, де

$$S1g(y)=\frac{1}{x_k-x_{k-1}}\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(\xi,y)d\xi,x_{k-1}<x<x_k,\ k=\overline{1,n},$$

$$S2g(x)=\frac{1}{y_l-y_{l-1}}\int_{y_{l-1}}^{y_l} g(x,\eta)d\eta,y_{l-1}<y<y_l,\ l=\overline{1,n}$$

Оператори $S1S2g$ визначаються формулою (3.2).

4. Оптимальна апроксимація кусково-сталими сплайнами двох змінних

4.1. Оптимальна апроксимація кусково-сталими сплайнами двох змінних інтерполяційного типу

Цей тип апроксимації відрізняється від розглянутого у

підр. 3.1. тим, що координати вершин прямокутників розбиття $x_{k-1} < x < x_k$, $y_{l-1} < y < y_l$ знаходяться з умови $\gamma \to \min$,

де $\gamma = \left[\max\limits_{\substack{x_{k-1} \le x \le x_k \\ y_{l-1} \le y \le y_l}} \left[g(x,y) - g\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}, \frac{y_{l-1}+y_l}{2} \right) \right] \right] \ \forall (k,l)$

Зауваження. В найбільш загальній формі, яка гарантує існування розв'язку задача може бути сформульована таким чином: Знайти такі прямокутники $\pi_j = \left[x_{1,j}, x_{2,j} \right] \times \left[y_{1,j}, y_{2,j} \right]$ і числа $(\xi_j, \eta_j) \in \pi_j$ які задовольняють умови:

1) $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \pi_j = E^2$; 2) $\gamma \to \min$, де

$$\gamma = \left[\max\limits_{x_{1,j} \le x \le x_{2,j}; y_{1,j} \le y \le y_{2,j}} \left[g(x,y) - g(\xi_j, \eta_j) \right] \right] \ \forall j = \overline{1,n} \quad (4.1)$$

4.2. Оптимальна апроксимація кусково-сталими сплайнами двох змінних з використанням середніх

Цей тип апроксимації відрізняється від розглянутого у підр. 3.2. тим, що координати вершин прямокутників розбиття $x_{k-1} < x < x_k$, $y_{l-1} < y < y_l$ знаходяться з умови $\gamma \to \min$, де $\gamma = \left[\max\limits_{\substack{x_{k-1} \le x \le x_k \\ y_{l-1} \le y \le y_l}} \left[g(x,y) - m_{k,l}(g) \right] \right] \forall (k,l)$

Зауваження. В найбільш загальній формі, яка гарантує існування розв'язку задача може бути сформульована таким чином: Знайти такі прямокутники $\pi_j = \left[x_{1,j}, x_{2,j} \right] \times \left[y_{1,j}, y_{2,j} \right]$, які задовольняють умови:

1) $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \pi_j = E^2$; 2) $\gamma \to \min$, де

$$\gamma = \left[\max\limits_{x_{1,j} \le x \le x_{2,j}; y_{1,j} \le y \le y_{2,j}} \left[g(x,y) - m_j g \right] \right] \ \forall j = \overline{1,n} \quad (4.2)$$

4.3. Оптимальна апроксимація кусково-сталими сплайнами двох змінних з використанням медіан

Цей тип апроксимації відрізняється від розглянутого у підр. 3.3. тим, що координати вершин прямокутників розбиття $x_{k-1} < x < x_k$, $y_{l-1} < y < y_l$ знаходяться з умови $\gamma \to \min$, де $\gamma = \left[\max\limits_{\substack{x_{k-1} \le x \le x_k \\ y_{l-1} \le y \le y_l}} \left[g(x,y) - med_{k,l}(g) \right] \right] \forall (k,l)$

Зауваження. В найбільш загальній формі, яка гарантує існування розв'язку задача може бути сформульована таким чином: Знайти такі прямокутники $\pi_j = \left[x_{1,j}, x_{2,j} \right] \times \left[y_{1,j}, y_{2,j} \right]$, які задовольняють умови:

1) $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \pi_j = E^2$; 2) $\gamma \to \min$, де

$$\gamma = \left[\max\limits_{x_{1,j} \le x \le x_{2,j}; y_{1,j} \le y \le y_{2,j}} \left[g(x,y) - med_j g \right] \right] \ \forall j = \overline{1,n} \quad (4.3)$$

4.4. Оптимальна мішана апроксимація кусково-сталими сплайнами двох змінних інтерполяційного типу

Цей тип апроксимації відрізняється від розглянутого у підр. 3.4. тим, що координати вершин прямокутників розбиття $x_{k-1} < x < x_k$, $y_{l-1} < y < y_l$ знаходяться з умови $\gamma \to \min$, де $\gamma = \left[\max\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k ; y_{l-1} \le y \le y_l} \left[g(x,y) - OIg(x,y) \right] \right] \forall (k,l)$

$OI_{opt} g(x,y) = \left(O1I_{opt} + O2I_{opt} - O1I_{opt} O2I_{opt} \right) g(x,y)$,

$O1I_{opt} g(x,y) = g(\xi_k, y)$, $\xi_k = \xi_k(y)$, $x_{k-1} < x < x_k$, $0 < y \le 1$

$\left| g(\xi_k(y), y) - g(x,y) \right| = \min\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} \left| g(\xi_k(y), y) - g(x,y) \right|$

Аналогічно визначаються і оператори $O2I_{opt} g(x,y)$ та $O1I_{opt} O2I_{opt} g(x,y)$

4.5. Оптимальна апроксимація кусково-сталими сплайнами двох змінних

. **Теорема 1.** Найкраще наближення функції $g(x,y)$ з обмеженою варіацією B в області D сталими в n підобластях $D_i \subset D$, $i = \overline{1,n}$ є наближенням медіанами $med_j g$, $j = \overline{1,n}$ в кожній з підобластей для якого

$\| g - Sg \|_{C(D_i)} = \frac{B}{2n}$, $i = \overline{1,n}$, $B = \max\limits_{(x,y)\in D} g(x,y) - \min\limits_{(x,y)\in D} g(x,y)$.

Доведення. Відомо, що в рівномірній нормі медіани дають найкраще наближення неперервних функцій в кожній з під областей $D_j, j = \overline{1,n}$ розбиття. Тому для побудови найкращого наближення кусково-сталими на всій області D, необхідно щоб похибки наближення в кожній з підобластей були однаковими. Це означає (див. Формулу (4.3)), що вони всі повинні дорівнювати величині $\frac{B}{2n}$

Теорема 1 доведена.

5. Література

[1] Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка зображений. - М.: Техносфера.- 2005. -1070 с.

[2] Корнійчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука. - 1984. -350 с.

[3] Корнійчук Н.П. Точные константы в теории приближения. –М.: Наука. - 1987. -422 с.

[4] De Vore R.A. Nonlinear approximation // Acta numerica. -1998.-P.51-150.

[5] Lytvyn O.N. Approximation f(x,y) by piecewise constants with help inyerlineation functions (blending function inyerpolation) // Теория приближения функций и операторов. Тезисы докл. Международной конференции, посвященной 80 – летию со дня рождения С.Б.Стечкина. Екатеринбург. 28 февраля-3 марта 2000 г. Екатеринбург.-2000.- С. 181-184.

[6] Литвин О.О. Наближене розв'язання плоскої задачі РКТ за допомогою кусково-сталих функцій на основі інтерлінації функцій// Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. научн. трудов Ин-та математики НАНУ. Киев.- 1999.- С. 147-169.

[7] Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. -Харків.: Основа, 2002. -544 с.

[8] Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.:Наука. 1984.- 496 с.

[9] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.