

# Оцінка похибки відновлення структури 3-D тіла та деякі можливості роботи з томограмами в системі Matlab при розв'язанні просторової задачі комп'ютерної томографії.

Литвин О.М., Першина Ю.І.

Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут"  
м. Харків, вул. Фрунзе, 21  
[yulia\\_pershina@mail.ru](mailto:yulia_pershina@mail.ru)

## Анотація

В статті представлені деякі можливості роботи з томограмами при відновленні внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими проекціями цього тіла (томограмами) на взаємно перпендикулярних площинах за допомогою інтерфлетації функції. А також доводиться теорема про оцінку похибки цього методу.

## 1. Вступ

У практиці дослідження томографічних зображень часто виникає задача отримання зображення перетину тіла у тих площинах, для яких немає зображення, за відомими зображеннями у деякій сукупності перетинів.

Не дивлячись на значні успіхи в комп'ютерній томографії, практична реалізація томографічного методу у вигляді рентгенівських комп'ютерних томографів ще далека від оптимальності. Однією з основних причин, які підтверджують таке твердження є недостатньо обґрунтована кількість проекцій (даних Радона), яку використовують сучасні рентгенівські комп'ютерні томографи для відновлення об'єкту у заданому перетині (тобто не обґрунтована доза опромінення об'єкта). Друга причина полягає у тому, що сучасні комп'ютерні томографи (не тільки рентгенівські) при відновленні об'єкта у заданому перетині демонструють на екранах дисплеїв артефакти – не властиві реальному об'єкту структури - тіні, нечіткість зображення, вкраплення тощо.

У практиці дослідження томографічних зображень часто виникає задача отримання зображення перетину тіла у тих площинах, для яких немає зображення, за відомими зображеннями у деякій сукупності перетинів. Аналогічна задача виникає зокрема при дослідженні кори головного мозку піддослідних тварин.

Існують сучасні програмні пакети, такі як 3D Max, Adobe Illustrator, Digital Anatomy, в яких можна отримати перерізи тривимірного тіла.

Підкреслимо, що всі ці програмні пакети відновлюють внутрішню структуру тривимірного тіла за допомогою томограм, які лежать на площинах, паралельних одній площині. Тобто ці програмні пакети не дають можливість знайти перетин тривимірного поля за даними проекціями, отриманими при перетині тіла системою будь-яких перерізаних площин..

Сучасна обчислювальна математика на даний час приділяє значну увагу розвиткові оптимальних, або близьких до оптимальних методів відновлення функцій однієї та багатьох змінних за допомогою скінченного числа

експериментальних даних про ці функції. Це стосується також і комп'ютерної томографії.

Таким чином, актуальною є розробка і дослідження методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими його томограмами що лежать в системі трьох перерізаних площин.

## 2. Оцінка похибки відновлення внутрішньої структури 3-D тіла за допомогою інтерфлетації функції

В роботі [1] розглянуто метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими його томограмами, що лежать в системі взаємно перпендикулярних площин, за допомогою сплайн-інтерфлетації функції. В даній роботі пропонується доведення теореми про загальний вигляд та оцінку похибки цього методу.

Тіло будемо вважати без обмеження загальності розташованим в одиничному кубі  $D = [0,1]^3$ .

Інформацією про функцію  $f(x, y, z)$ , тобто про внутрішню структуру тіла, є набір томограм  $X_k.bmp, k = \overline{1, M_1}$ ,  $Y_l.bmp, l = \overline{1, M_2}$ ,  $Z_p.bmp, p = \overline{1, M_3}$ , які лежать на площинах, перпендикулярних координатним вісям  $OX, OY, OZ$ . відповідно. Кожній томограмі ставимо у відповідність функцію:

$$X_k.bmp \mapsto A(k, y, z), \quad k = \overline{1, M_1}, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c;$$

$$Y_l.bmp \mapsto B(x, l, z), \quad l = \overline{1, M_2}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq c;$$

$$Z_p.bmp \mapsto S(x, y, p), \quad p = \overline{1, M_3}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

Для подальшого викладення сформулюємо деякі теореми.

**Теорема 1.** Нехай оператори  $In1 f, In2 f, In3 f$  є операторами сплайн – інтерполяції функції  $f(x, y, z)$  за змінними  $x, y, z$  відповідно:

$$In1 f(x, y, z) = \sum_{k=1}^{M_1} Sp_{M_1, k}(x) A(k, y, z),$$

$$In2 f(x, y, z) = \sum_{l=1}^{M_2} Sp_{M_2, l}(y) B(x, l, z),$$

$$In3 f(x, y, z) = \sum_{p=1}^{M_3} Sp_{M_3, p}(z) C(x, y, p),$$

де  $Sp_{M_1,k}(x)$  – базисні сплайни степеня  $m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) з такими властивостями:

$$Sp_{M_1,k}\left(\frac{p}{M_1}\right) = \delta_{k,p}, \quad i, p = \overline{0, M_1}.$$

Аналогічно визначаються сплайни  $Sp_{M_2,l}, Sp_{M_3,p}$ .

Якщо функції  $A(k, y, z), \quad k = \overline{1, M_1},$   
 $B(x, l, z), \quad l = \overline{1, M_2}, \quad C(x, y, p), \quad p = \overline{1, M_3}$

задовольняють таким умовам:

$$A(k, y_l, z) = A(x_k, l, z), \quad B(x, l, z_p) = B(x, y_l, p) \\ C(k, y, z_p) = C(x_k, y, p),$$

то оператор сплайн – інтерфлетатції

$$Lf(x, y, z) = (In_1 + In_2 + In_3 - In_1 In_2 - \\ - In_1 In_3 - In_2 In_3 + In_1 In_2 In_3)f(x, y, z)$$

має наступні властивості

$$Lf(k, y, z) = A(k, y, z), \quad k = \overline{1, M_1}; \\ Lf(x, l, z) = B(x, l, z), \quad l = \overline{1, M_2}; \\ Lf(x, y, p) = C(x, y, p), \quad p = \overline{1, M_3}.$$

**Теорема 2.** Нехай  $f(x, y, z) \in C^{r_1, r_2, r_3}(D),$   
 $r_1, r_2, r_3 = \overline{1, 2}$ . Тоді для залишку  $RLf(x, y, z) =$   
 $= (I - L)f(x, y, z)$  виконується рівність

$$RLf(x, y, z) = (I - In_1)(I - In_2)(I - In_3)f(x, y, z), \quad (1)$$

де  $In_1, In_2, In_3$  – оператори, що визначені в теоремі 1.

$$RLf(x, y, z) = \\ = \sum_{k=1}^{M_1} \sum_{l=1}^{M_2} \sum_{p=1}^{M_3} [Sp_{M_1,k}(x) Sp_{M_2,l}(y) Sp_{M_3,p}(z) \times \\ \times \int_{x_k}^x \int_{y_l}^y \int_{z_p}^z \frac{\partial^{r_1+r_2+r_3} f(x, y, z)}{\partial t_1^{r_1} \partial t_2^{r_2} \partial t_3^{r_3}} \frac{(x_k - t_1)^{r_1-1}}{(r_1-1)!} \times \\ \times \frac{(y_l - t_2)^{r_2-1}}{(r_2-1)!} \frac{(z_p - t_3)^{r_3-1}}{(r_3-1)!} dt_1 dt_2 dt_3 \quad (2)$$

Доведення. Спочатку доведемо формулу (1).

$$I - (I - In_1)(I - In_2)(I - In_3)f(x, y, z) = \\ = I - (I - In_1 - In_2 - In_3 + In_1 In_2 + In_1 In_3 + \\ + In_2 In_3 - In_1 In_2 In_3)f(x, y, z) = Lf(x, y, z).$$

Тоді похибка набуває вигляду

$$RLf(x, y, z) = (I - L)f(x, y, z) = \\ (I - I + (I - In_1)(I - In_2)(I - In_3))f(x, y, z) = \\ = (I - In_1)(I - In_2)(I - In_3)f(x, y, z).$$

Рівність (1) доведена.

Рівність (2) встановлюються інтегруванням частинами за змінними  $t_1, t_2, t_3$  під знаками інтегралів.

Теорему 2 доведено.

**Наслідок.** Нехай  $f(x, y, z) \in C^{r_1, r_2, r_3}(D),$

$r_1, r_2, r_3 = \overline{0, 1}$ . Тоді для залишку  $RLf(x, y, z) =$   
 $= (I - L)f(x, y, z)$  виконується нерівність

$$\|RLf(x, y, z)\|_{C(D)} \leq CM \Delta_1^{r_1} \Delta_2^{r_2} \Delta_3^{r_3},$$

$$\Delta_1 = \max_{1 \leq k \leq M_1} x_{k+1} - x_k, \quad \Delta_2 = \max_{1 \leq l \leq M_2} y_{l+1} - y_l,$$

$$\Delta_3 = \max_{1 \leq p \leq M_3} z_{p+1} - z_p$$

$$M = \max_{x, y, z \in [0, 1]} \frac{\partial^{r_1+r_2+r_3} f(x, y, z)}{\partial x^{r_1} \partial y^{r_2} \partial z^{r_3}}.$$

Доведення. Нехай функція від однієї змінної

$g(x) \in C[0, 1], \quad a = x_1 < \dots < x_n = 1$  наближається

сплайном першого степеня (кусово – лінійним сплайном)

$$sp(x) = g(x_{k-1}) \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + \\ + g(x_k) \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Цей сплайн має такі властивості:

$$sp(x_k) = g(x_k), \quad k = \overline{0, n}.$$

$$g(x) \in C^1[a, b] \Rightarrow \|Rn(x)\|_{\infty} =:$$

$$= \max_{a \leq x \leq b} |g(x) - sp(x)| \leq \frac{\Delta}{2} \|g'(x)\|_{L_{\infty}[a, b]}, \quad (3)$$

$$\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$$

$$g(x) \in C^2[0, 1] \Rightarrow \|Rn(x)\|_{\infty} =:$$

$$= \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x) - sp(x)| \leq \frac{\Delta^2}{8} \|g''(x)\|_{\infty} \quad (4)$$

Залишок наближення функції  $g(t) \in C^r[0, 1]$  сплайном

$sp(x)$  можна зобразити у вигляді [2]

$$Rg(t) = g(t) - \sum_{i=0}^1 g(i)sp(t) = \\ = \sum_{i=0}^1 sp(t) \int_i^t g^{(r)}(\tau) \frac{(i - \tau)^{r-1}}{(r-1)!} d\tau = \int_0^1 g^{(r)}(\tau) G_r(t, \tau) d\tau. \\ \|Rg(t)\|_{L_{\infty}[0, 1]} \leq$$

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |g^{(r)}(t)| \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |G_r(t, \tau)| d\tau = M_r G_{r,1},$$

$$G_{r,1} = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |G_r(t, \tau)| d\tau, \quad M_r =: \max_{0 \leq t \leq 1} |g^{(r)}(t)|.$$

Якщо функція  $f(x, y, z)$  трьох змінних наближається сплайном першого степеня за змінною  $x$  на інтервалі  $[x_k, x_{k+1}]$  або за змінною  $y$  на інтервалі  $[y_l, y_{l+1}]$ , або за змінною  $z$  на інтервалі  $[z_p, z_{p+1}]$ , то, наприклад, аргумент  $t_1$  у функції  $g(t_1, y, z)$

$= f(x + t1(x_{k+1} - x_k), y, z)$  буде належати одиничному інтервалу  $t1 \in [0,1]$ . Тому, застосувавши до цієї функції написану вище оцінку, отримаємо нерівність

$$\exists C = \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} \left| \frac{\partial^{r1+r2+r3}}{\partial x^{r1} \partial y^{r2} \partial z^{r3}} f(x, y, z) \right| \times$$

$$\times G_{r1,1} G_{r2,1} G_{r3,1},$$

$$\|RLf(x, y, z)\|_{L_{\infty}[0,1]} \leq C \Delta 1^{r1} \Delta 2^{r2} \Delta 3^{r3}.$$

Якщо врахуємо ці оцінки у формулі (1), то отримаємо доведення наслідку зі сталими

$$\begin{aligned} M_{r1,r2,r3}(f)_{\substack{[x_k, x_{k+1}] \\ [y_l, y_{l+1}] \\ [z_p, z_{p+1}]}} &= \\ &= \max_{\substack{0 \leq t1 \leq 1 \\ 0 \leq t2 \leq 1 \\ 0 \leq t3 \leq 1}} \left| \frac{\partial^{r1+r2+r3}}{\partial t1^{r1} \partial t2^{r2} \partial t3^{r3}} f(t1, t2, t3) \right| = \\ &= \max_{\substack{0 \leq t1 \leq 1 \\ 0 \leq t2 \leq 1 \\ 0 \leq t3 \leq 1}} \left| \frac{\partial^{r1+r2+r3}}{\partial t1^{r1} \partial t2^{r2} \partial t3^{r3}} f(x_k + t1(x_{k+1} - x_k), y_l + \right. \\ &\quad \left. - x_k), y_l + t2(y_{l+1} - y_l), z_p + t3(z_{p+1} - z_p) \right. \\ &\quad \left. - z_p) \right| = \Delta 1^{r1} \Delta 2^{r2} \Delta 3^{r3} \times \\ &\quad \times \max_{\substack{x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ y_l \leq y \leq y_{l+1} \\ z_p \leq z \leq z_{p+1}}} \left( \left| \frac{\partial^{r1+r2+r3}}{\partial x^{r1} \partial y^{r2} \partial z^{r3}} f \right| (x, y, z) \right), \\ C &= G_{r1,1} \cdot G_{r2,1} \cdot G_{r3,1}. \end{aligned}$$

Наслідок доведений.

**Зауваження.** За допомогою формул (3) та (4) можна визначити коефіцієнт  $C$ .

Якщо  $r1 = r2 = r3 = 1$  (тобто відома перша похідна), тоді з нерівності (3) виходить, що  $C = 1/8$ , а якщо відомі ще й другі похідні, то завдяки (4) можемо встановити, що  $C = (1/8)^3$ .

### 3. Деякі аспекти робіт из томограмами в системі Matlab.

#### 3.1. Представлення томограм у середовищі Matlab

Кожний малюнок Matlab має площину (*Figures*) для рисування, яка, по суті, являється двовимірним масивом пікселів. Кожному елементу цього масива, в свою чергу, ставиться у відповідність атрибут, тобто колір. Відмітимо, що при програмуванні в Matlab використовується RGB модель кольору, у відповідності до якої будь – який колір можна представити як суперпозицію трьох основних кольорів – червоного (Red), зеленого (Green) та синього (Blue). Кожна з компонент Red, Green, Blue задається одним байтом і відповідає  $2^8=256$  відтінків кольорів (значення інтенсивності змінюється від 0 до 255, число 255 відповідає кольору найбільшої інтенсивності). Повна

кількість кольорів, яку можна задати трьома байтами, складає  $256^3=16777216$ , що є близьким до кольорової здатності ока людини (ця модель має назву TrueColor).

Комп'ютерний томограф видає томограми у спеціальному форматі, який є доступним лише для томографів. Існує спеціальна програма, яка переводить цей формат у формат .bmp, який розпізнає і комп'ютер.

Нехай задані п'ять томограм (рис. 1), які представляються у вигляді файлів у форматі .bmp - x1.bmp, x2.bmp, x3.bmp, x4.bmp, x5.bmp (розмір томограм повинен бути однаковим, в цьому випадку – 450\*450 пікселів).

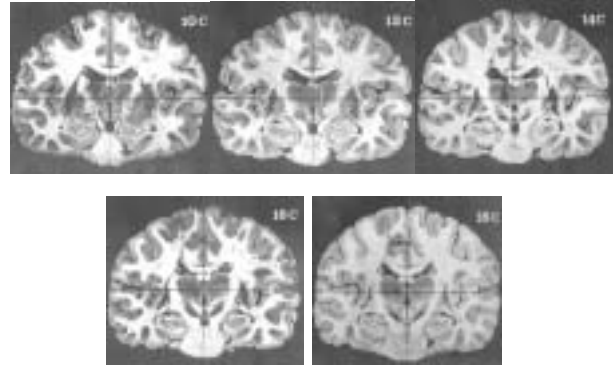


Рис.1. Томограми, що лежать на системі площин, які паралельні осі Oz.

Ці томограми представимо, як одномірний масив у вигляді наступної функції

1. function A = A(i)

Тут i – номер малюнку.

2. if i == 1

3. c = imread('x1.bmp');

Функція imread('x1.bmp') – читає графічний файл x1.bmp, тобто виводить матрицю чисел. Кожний елемент матриці інтерпретується як значення RGB, тобто відповідає інтенсивності кольору у відповідному пікселі.

4. elseif i == 2

5. c = imread('x2.bmp');

6. elseif i == 3

7. c = imread('x3.bmp');

8. elseif i == 4

9. c = imread('x4.bmp');

10. elseif i == 5

11. c = imread('x5.bmp');

12. end

13. A = image(c);

Функція image(c) перетворює матрицю чисел в малюнок.

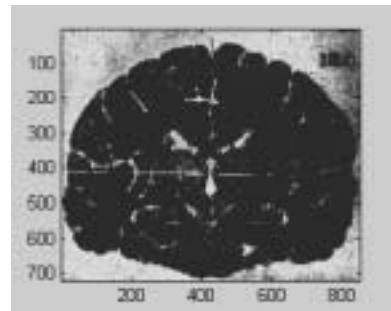


Рис.2. Результат роботи функції A(5)

Тобто ми представили набір томограм у вигляді функції  $A(i)$ .

Якщо треба працювати не з цілими малюнками, а з окремими пікселями, то в наведеній вище функції треба зробити зміни в рядках 1 та 13

1.  $function A = A(i,y,z)$

Тут  $i$  – номер малюнка,  $(y,z)$  – координати пікселя, з яким треба працювати.

13  $A=c(y,z)$

Наприклад, функція  $A(5, 100, 100)$  видає в результаті число 41. Тобто інтенсивність кольору в пікселі з координатами  $(100, 100)$  п'ятого малюнку дорівнює 41

### 3.2. Matlab-програми відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла між паралельними томограмами.

Нехай треба відновити внутрішню структуру головного мозку людини між томограмами, які лежать на паралельних площинах. Тобто треба знайти значення тривимірної функції між паралельними площинами.

Нехай задані тривимірні функції  $f(x, y, z)$  і рівняння площин:  $x = x_1$  та  $x = x_2$ . Відновлювати значення функції  $f(x, y, z)$  між заданими площинами будемо за допомогою оператора лінійної інтерполяції

$$P(f(x, y, z)) = f(x_1, y, z) \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2, y, z) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Продемонструємо роботу цього оператора на прикладі головного мозку людини.

Вхідними даними є набір томограм, які лежать на системі паралельних площин (рис.1).

Набір томограм представляється у вигляді функції  $A(i)$ , як це показано у додатку В

Функція, яка відновлює внутрішню структуру головного мозку між паралельними площинами, має вигляд:

1.  $function brainz = brainz(z)$

Тут  $z$  – число від 0 до 1. Тобто задається рівняння площини, в якій треба відновити внутрішню структуру (без обмеження загальності вважаємо, що тривимірне тіло лежить всередині одиничного куба).

2.  $M = 5$ ; ( $M$  – кількість заданих томограм)

3.  $k = \text{floor}(M * z)$ ;

Функція  $\text{floor}(A)$  округляє число  $A$  до найближчого цілого в меншу сторону, тобто  $\text{floor}(0,2)=0$  і  $\text{floor}(0,8)=0$ . Ця функція необхідна для того, щоб зробити перемасштабування, тобто помістити заданий тривимірний об'єкт в одиничний куб.

4.  $r1 = A(k)$ ;

5.  $r2 = A(k + 1)$ ;

На кроці 4 та 5 визначається, між якими томограмами лежить введена площина.

6.  $R1 = \text{imultiply}(r1, (k + 1 - z * M))$ ;

7.  $R2 = \text{imultiply}(r2, (k - z * M))$ ;

8.  $R = \text{imsubtract}(R1, R2)$ ;

Кроки 6 – 8 відповідають формулі (Г.1).

Оператор  $\text{immultiply}(X, a)$  визначає добуток зображення  $X$ , тобто масиву значень від 0 до 255, на число  $a$ . Якщо значення добутку перевищує заданий діапазон, то воно усикається, а дробові значення округляються.

Оператор  $\text{imsubtract}(X, Y)$  визначає різницю двох зображень  $X$  та  $Y$ , тобто двох масивів значень від 0 до 255. Розмірність матриць  $X$  та  $Y$  повинна бути однаковою.

9.  $brainz = \text{image}(R)$ ;

Функція  $\text{image}(R)$  перетворює отриману матрицю значень в малюнок.

Результати роботи функції  $brainz(z)$  представлені на рис 3.

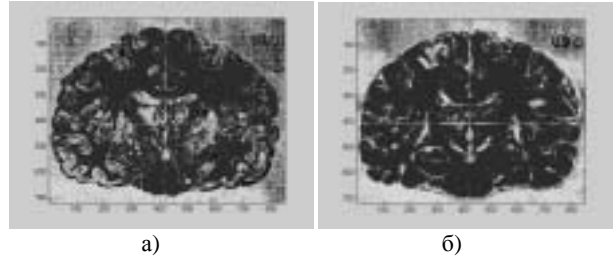


Рис. 3. Результати роботи програми  $brainz(z)$ .

a)  $brainz(0,3)$  – переріз головного мозку площиною  $z = 0.3$ , тобто відновлено зображення тривимірного тіла між першою та другою томограмою (Рис. 1);

б)  $brainz(0,9)$  – переріз головного мозку площиною  $z = 0.9$ , тобто відновлено зображення тривимірного тіла між четвертою та п'ятою томограмою (Рис. 1).

### 4. Висновки

Оцінка методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать в системі взаємно перпендикулярних площин, підтверджує той факт, що цей метод дає більш точний результат, ніж метод відновлення внутрішньої структури 3-D тіла за томограмами, які лежать на площинах, паралельних лише одній координатній вісі. Метод обробки обробки томограм, представлений в пункті 3, дає можливість працювати з томограмами як з функціями..

### 5. Література

- [1] Литвин О.М., Першина Ю.І. „Відновлення тривимірних об'єктів за їх слідами на системі перерізаних площин з використанням інтерфлетатції функцій”, 7 міжнародна конференція „Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів”, Київ. – 2004р. – С. 221 – 224.
- [2] Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544с.