Узагальнені оператори Хаара, побудовані на основі двовимірної мішаної апроксимації вейвлетами Хаара

С. І. Кулик, О. М. Литвин

Українська інженерно-педагогічна академія,
academ@kharkov.ua

Анотація

Класичні оператори двовимірної вейвлет-апроксимації будуються у вигляді добутку операторів одновимірної вейвлет-апроксимації, які ставлять у відповідність функції $f(x,y)$ одновимірні суми Хаара порядку n функції по змінних x, y відповідно. В монографії О.М.Литвина [1] викладено метод побудови операторів мішаної апроксимації вейвлетами Хаара. В даній роботі досліджується алгоритм побудови узагальнених двовимірних операторів Хаара, побудованих на основі двовимірної мішаної апроксимації вейвлетами Хаара у такому вигляді, який зберігає високу точність операторів мішаної апроксимації Хаара.
Досліджено їхні апроксимативні властивості і відмінності від класичних двовимірних вейвлетів Хаара.

1. Вступ

1.1. Формулювання основного результату

Мішана апроксимація Хаара функції $f(x,y)$ – це апроксимація операторами

$$H_n f(x,y) = (H_{1n} + H_{2n} - H_{12}H_{2n}) f(x,y),$$

де $H_{1,n} f(x,y)$ - сума Хаара порядку n функції $f(x,y)$ по змінній x (змінна y вважається параметром); $H_{2,n} f(x,y)$ - сума Хаара порядку n функції $f(x,y)$ по змінній y (змінна x вважається параметром). Нижче доведено, що оператори $H_n f(x,y)$ наближують функцію $f(x,y)$ з похибкою $O(\varepsilon^2)$, якщо оператори $H_{1,n} f$, $H_{2,n} f$ наближують $f(x,y)$ з похибкою $O(\varepsilon)$.
Зауважимо, що коефіцієнти Фур'є – Хаара в $H_{1,n} f$, $H_{2,n} f$ є функціями однієї змінної (y та x відповідно).
В даній роботі досліджується алгоритм побудови узагальнених операторів Хаара $\tilde{H}_n f(x,y)$, побудованих на основі двовимірної мішаної апроксимації вейвлетами Хаара $H_n f(x,y)$. Алгоритм полягає в заміні вказаних вище коефіцієнтів (як функцій однієї змінної) відповідними сумами Хаара такого порядку $N = N(\varepsilon)$, при якому зберігається вказана висока точність $O(\varepsilon^2)$ операторів H_n. Для порівняння досліджується також класична апроксимація двовимірними операторами вейвлет-апроксимації $H_{1,n}H_{2,n} f(x,y)$.

1.2. Огляд публікацій

Остання чверть 20-го століття може бути охарактеризована інтенсивним розвитком теорії вейвлетів. Перше згадування про вейвлети з'явилося в літературі з цифрової обробки й аналізу сейсмічних сигналів: в 1984 р. у статті А. Гроссмана і Д. Морле [2] з'являється новий термін – вейвлет (англ. wavelet – "хвилька", російськомовний переклад – "всплеск"). Деякі ідеї теорії вейвлетів частково були розроблені вже давно. Так, А. Хаар [3] опублікував у 1910 році повну ортонормовану систему базисних функцій з локальною областю визначення. Тепер ці функції називаються вейвлетами Хаара. Дискретизація вейвлет-перетворення була описана в статті І. Добеші [4], яка поєднала математиків і фахівців в області обробки сигналів. Популярність вейвлетів зросла після того, як наприкінці 80-х років С. Малла ввів поняття кратномасштабного аналізу [5] та визначив загальний підхід для відшукання різних вейвлет-базисів. Він же розробив основний алгоритм обчислення вейвлет-перетворення для дискретних сигналів, що відкрило широкі можливості для практичної реалізації цього методу. Результатом його досліджень стало застосування вейвлетів для кодування зображень. З цього часу теорія і практика вейвлет-аналізу починає активно розвиватися. У 1992 році І. Добеші опублікувала свою роботу (вийшла російською мовою у 2001 році [6]). У цій роботі та інших виданнях (наприклад, [7]) була викладена строга теорія вейвлет – аналізу (див. також [8]-[12],). В середині 90-х років Свелденсом був розроблений новий метод обчислення вейвлет - перетворень, що отримав назву ліфтинг [13]. Цей метод є більш ефективним ніж класичний алгоритм запропонований Малла [5]. Слід відмітити, що розробка математичної теорії вейвлетів супроводжувалась винаходами нових методів практичного її використання. Вейвлет-аналіз є потужною альтернативою аналізу Фур'є і дає більш гнучку техніку обробки сигналів різного походження. Тому сучасний етап розвитку науки може бути охарактеризований інтенсивним розвитком теорії вейвлетів, яка знаходить широке використання в математиці, фізиці, астрономії, медицині, радіоелектроніці тощо. Вейвлет - аналіз використовується до стиснення зображень, передбаченні землетрусів, прогнозуванні погоди, медицині (томографія, електрокардіографія), передбаченні курсу цінних паперів на ринку, гідродинаміці, гідроакустиці та інших галузях [12]-[16].

2. Вейвлети Хаара від однієї змінної

Відомо, що кожну функцію $f(t) \in L_2[-\pi,\pi]$ можна розкласти в ряд Фур'є

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},\ \ i^2=-1.$$

Тобто система функцій $\{e^{ikt}\}$ створює базис в $L_2[-\pi,\pi]$. Але функцію $f(t)\in L_2(R)$ взагалі кажучи, не можна розкласти в ряд Фур'є, бо

$$e^{ikt}\notin L_2(R)\ \ \forall k\in Z\ .$$

Базис в $L_2(R)$ повинен складатися з функцій $\{f_k(t)\}$, що прямують до нуля, якщо

$$t\to\infty:\lim_{t\to\infty} f_k(t)=0\ \ \forall k\ .$$

Такий базис в $L_2(R)$ дають вейвлети – добре локалізовані хвильки, що можуть бути побудовані з допомогою однієї функції - вейвлета $\chi(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)\,dt=0;\qquad \lim_{t\to\infty}\chi(t)=0\,.$$

Вейвлет - базис $\{\chi_{jk}(t)\}$ може бути побудований у вигляді зсувів та стисків цього одного вейвлета

$$\chi_{jk}(t)=2^{j/2}\chi(2^j t-k),\ j,k\in Z,\ \|\chi\|_{L_2(R)}=1$$

Зауваження 1. У $L_2[-\pi,\pi]$ базис $\{e^{ikt}\}$ теж будується з допомогою однієї функції $\chi(t)=e^{it}$.

Найбільш відомим і простим прикладом вейвлетів є вейвлет Хаара. Вейвлетом Хаара називається функція

$$\psi^H(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,1/2),\\ -1, & t\in[1/2,1),\\ 0, & t\notin[0,\ 1).\end{cases}$$

Відмітимо важливі достоїнства вейвлетів Хаара при розвиненні функцій в ряди Хаара, які відрізняють їх від інших розвинень функцій в ряди по системі ортогональних функцій.

1. Ряд Хаара добре локалізований: якщо нас цікавить поведінка $f(t)$ на $[a,b]\subset[0,1]$, то в ряді Хаара треба враховувати тільки ті індекси *j,k*, які задовольняють умову

$$t\in[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]\cap[a,b]\neq\varnothing\,,$$

$$\operatorname{supp}\chi_{j,k}=[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]\,.$$

2. Сума Хаара функції $f(t),\ t\in[0,1]$ має вигляд

$$S_N f(t)=C_0+\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{2^j-1}C_{j,k}\chi_{j,k}(t)\,,$$

де $C_0=\int_0^1 f(t)\,dt$,

$$C_{j,k}=2^{i/2}\left[\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+0,5}{2^j}} f(t)\,dt-\int_{\frac{k+0,5}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f(t)\,dt\right],$$

$$\chi_{j,0}(t)=\begin{cases}0, & t\notin(0;2^{-j}),\\ \sqrt{2^j}, & t\in[0;\,2^{-j-1}),\\ 0, & t=2^{-j-1},\\ -\sqrt{2^j}, & t\in(2^{-j-1};2^{-j}),\\ \dfrac{-\sqrt{2^j}}{2}, & t=2^{-j},\ \ j=\overline{1,N}\end{cases}$$

$$\chi_{j,2^j-1}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[1-2^{-j};1],\\ \dfrac{-\sqrt{2^j}}{2}, & t=(2^j-1)/2^j,\\ \sqrt{2^j}, & t\in(1-2^{-j};(2^j-0,5)/2^j),\\ 0, & t=(2^j-0,5)/2^j,\\ -\sqrt{2^j}, & t\in((2^j-0,5)/2^j;1],\ j=\overline{1,N},\end{cases}$$

$$\chi_{j,k}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[k2^{-j};(k+1)2^{-j}],\\ \dfrac{\sqrt{2^j}}{2}, & t=\dfrac{k}{2^j},\\ \sqrt{2^j}, & t\in\left(\dfrac{k}{2^j};\dfrac{k+0,5}{2^j}\right),\\ 0, & t=\dfrac{k+0,5}{2^j},\\ -\sqrt{2^j}, & t\in\left(\dfrac{k+0,5}{2^j};\dfrac{k+1}{2^j}\right),\\ \dfrac{-\sqrt{2^j}}{2}, & t=\dfrac{k+1}{2^j},\ \ j=\overline{1,n},\ \ k=\overline{1,2^j-2}.\end{cases}$$

3. Ряд Фур'є по системі функцій Хаара від довільної неперервної функції збігається до неї рівномірно. Якщо

$$\omega(f,\delta)=\max_{t,t+\delta\in[0,1]}\left|f(t+\delta)-f(t)\right|$$

– модуль неперервності функції *f*, то

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|f(t)-S_N f(t)\right|\le 12\omega(f,1/n),\ \ n=1,2,...$$

Тут $N=2^{n+1}$ – загальне число базисних функцій Хаара в сумі Фур'є – Хаара $S_N f$.

3. Класична апроксимація вейвлетами Хаара від двох змінних

Класична апроксимація вейвлетами Хаара від двох змінних визначається наступною формулою:

$$H_{12n}f(x,y)=H_{1n}H_{2n}f(x,y)\,, \tag{1}$$

де

$$H_{1n}f(x,y)=C_{10}f(y)\chi_{[0,1]}(x)+\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{2^j-1}C_{1,j,k}f(y)\chi_{j,k}(x) \tag{2}$$

$$H_{2n}f(x,y)=C_{20}f(x)\chi_{[0,1]}(y)+\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{2^i-1}C_{2,i,l}f(x)\chi_{i,l}(y) \tag{3}$$

$$C_{10}(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx$$

$$C_{20}(x)=\int_0^1 f(x,y)\,dy$$

$$C_{1,j,k}f(y):=\int_0^1 f(x,y)\chi_{j,k}(x)\,dx/\int_0^1\chi_{j,k}^2(x)\,dx$$

$$C_{2,i,l}f(x):=\int_0^1 f(x,y)\chi_{i,l}(y)\,dy/\int_0^1\chi_{i,l}^2(y)\,dy$$

$$\chi^H(t)=\begin{cases}1/2, & t=0,\\ 1, & t\in(0,1/2),\\ 0, & t=1/2,\\ -1/2, & t=1\\ 0, & t\notin[0,1]\end{cases}$$

$$\chi_{i,k}(t):=\chi^H\left(2^i t-k\right);1\le k\le 2^i-2,\ i=1,2,...,$$

$$\chi_{i,0}(0)=\lim_{t\to 0+0}\chi_{i,0}(t),\ \chi_{i,2^i-1}(1)=\lim_{t\to 1-0}\chi_{i,2^i-1}(t),\ i=1,2,...$$

Звертаємо увагу на відмінність між $\psi^H(t)$ та $\chi^H(t)$, які використовуються для побудови сум Хаара на всій осі R та на скінченому відрізку $[0,1]$, відповідно.

Теорема 1. Хай $R_{1n}f(x,y)=(I-H_{1n})f(x,y)$, $R_{2n}f(x,y)=(I-H_{2n})f(x,y)$ – залишки наближення функції $f(x,y)\in C^r(D), r\ge 0,$, $D=I^2$, $I=[0,1]$ операторами $H_{1n}f(x,y)$ та $H_{2n}f(x,y)$ відповідно. Тоді для залишку $R_{classic}f(x,y)=(I-H_{1,n}H_{2,n})f(x,y)$ наближення функції $f(x,y)$ класичними сумами Хаара від двох змінних $H_{12n}f(x,y)=H_{1n}H_{2n}f(x,y)$ виконується рівність

$$R_{classic}f(x,y)=(R_{1n}+R_{2n}-R_{1n}R_{2n})f(x,y) \qquad (4)$$

Наслідок 1. Хай

$$\left\|R_k f\right\|_{C(D)}=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0,\quad k=1,2$$

Тоді:

$$\left\|R_{classic}f\right\|_{C(D)}=O(\varepsilon),\varepsilon\to 0$$

4. Мішана апроксимація вейвлетами Хаара від двох змінних

В роботі Литвина О. М. [1, с. 484 – 490] викладено алгоритм побудови операторів $H_n f(x,y)=(H_{1n}+H_{2n}-H_{12n})f(x,y)$ $(x,y)\in[0,1]^2$ мішаної апроксимації функцій двох змінних на основі використання операторів одновимірної вейвлет апроксимації Хаара $H_{1n}f(x,y)$ та $H_{2n}f(x,y)$, що діють на одну змінну (x та y, відповідно). Для цих операторів справедлива наступна теорема.

Теорема 2. Хай $R_{1n}f(x,y)=(I-H_{1n})f(x,y)$, $R_{2n}f(x,y)=(I-H_{2n})f(x,y)$ – залишки наближення функції $f(x,y)\in C^2(D)$, $D=I^2$, $I=[0,1]$ операторами $H_{1n}f(x,y)$ та $H_{2n}f(x,y)$ відповідно. Тоді для залишку $Rf(x,y)=(I-H_n)f(x,y)$ наближення функції $f(x,y)$ мішаними сумами Хаара $H_n f(x,y)$ виконується рівність

$$Rf(x,y)=R_{1n}R_{2n}f(x,y) \qquad (5)$$

Доведення.

$$Rf(x,y)=(I-H_n)f(x,y)=\left(I-H_{1n}-H_{2n}+H_{12n}\right)f(x,y)=$$
$$=\left(I-H_{1n}-H_{2n}+H_{1n}H_{2n}\right)f(x,y)=$$
$$=\left(I-H_{1n}\right)\left(I-H_{2n}\right)f(x,y)=R_{1n}R_{2n}f(x,y)$$

Теорема 2 доведена.

Наслідок 2. Хай

$$\left\|R_k f\right\|_{C(D)}=O(\varepsilon),\quad k=1,2$$

Тоді:

$$\left\|Rf\right\|_{C(D)}=O(\varepsilon^2) \qquad (6)$$

5. Узагальнена двовимірна апроксимація Хаара на основі $H_n f$

У формулах (2), (3) замінимо функції

$$C_{10}f(y),\ C_{1,j,k}f(y),\ C_{20}f(x),\ C_{2,i,l}f(x),$$

$j,i=\overline{0,n},\ l,k=\overline{0,2^k-1}$ сумами Хаара

$$C_{10}f(y)\approx\tilde{C}_{10,N}f(y)=C_{0,0}+\sum_{i=0}^{N}\sum_{l=0}^{2^i-1}C_{0,i,l}\chi_{i,l}(y)$$

$$C_{0,0}=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy,$$

$$C_{0,i,l}=\int_{\frac{l}{2^i}}^{\frac{l+1}{2^i}}C_{10}f(y)\chi_{i,l}(y)dy=2^{i/2}\left[\int_{\frac{l}{2^i}}^{\frac{l+0,5}{2^i}}C_{10}f(y)dy-\int_{\frac{l+0,5}{2^i}}^{\frac{l+1}{2^i}}C_{10}f(y)dy\right]=$$
$$=2^{i/2}\left[\int_0^1\int_{\frac{l}{2^i}}^{\frac{l+0,5}{2^i}}f(x,y)dxdy-\int_0^1\int_{\frac{l+0,5}{2^i}}^{\frac{l+1}{2^i}}f(x,y)dxdy\right];$$

$$C_{1,j,k}f(y)\approx\tilde{C}_{1,j,k,N}f(y)=C_{j,k,0}+\sum_{i=0}^{N}\sum_{l=0}^{2^i-1}C_{j,k,i,l}\chi_{i,l}(y),$$

$$C_{j,k,0}=\int_0^1 C_{1,j,k}f(y)dy=\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\chi_{j,k}(x)\,dx\right]dy/\int_0^1\chi_{j,k}^2(x)\,dx$$

$$C_{j,k,i,l}=\int_0^1 C_{1,j,k}f(y)\chi_{i,l}(y)\,dy=$$
$$=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\chi_{j,k}(x)\chi_{i,l}(y)\,dxdy$$

Аналогічно визначаються суми Хаара $\tilde{C}_{20,N}f(x)$, $\tilde{C}_{2,i,l,N}f(x)$ для наближення $C_{20}f(x)$, $C_{2,i,l}f(x)$.

$$C_{20}f(x)\approx\tilde{C}_{20,N}f(x)=C_{0,0}+\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{2^j-1}C_{0,j,k}\chi_{j,k}(x),$$

$$C_{0,0}=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dydx,$$

$$C_{0,j,k}=\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} C_{20}f(x)\chi_{j,k}(x)dx=2^{j/2}\left[\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+0,5}{2^j}} C_{20}f(x)dx-\int_{\frac{k+0,5}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} C_{20}f(x)dx\right]=$$

$$=2^{j/2}\left[\int_0^1\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+0,5}{2^j}} f(x,y)dydx-\int_0^1\int_{\frac{k+0,5}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f(x,y)dydx\right];$$

$$C_{2,i,l}f(x)\approx\tilde{C}_{2,i,l,N}f(x)=C_{i,l,0}+\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{2^j-1}C_{j,k,i,l}\chi_{j,k}(x),$$

$$C_{i,l,0}=\int_0^1 C_{2,i,l}f(x)dx=\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\chi_{i,l}(y)dy\right]dx/\int_0^1\chi_{i,l}^2(y)dy$$

Вибравши число $N=N(\varepsilon^2)$ так, щоб виконувались рівності

$$\left\|C_{10}(\cdot)-\tilde{C}_{10,N}(\cdot)\right\|_{C(I)}=O(\varepsilon^2) \quad (7)$$

$$\left\|C_{1,j,l}(\cdot)-\tilde{C}_{1,j,l,N}(\cdot)\right\|_{C(I)}=O(\varepsilon^2) \quad (8)$$

$$\left\|C_{20}(\cdot)-\tilde{C}_{20,N}(\cdot)\right\|_{C(I)}=O(\varepsilon^2) \quad (9)$$

$$\left\|C_{2,i,k}(\cdot)-\tilde{C}_{2,i,k,N}(\cdot)\right\|_{C(I)}=O(\varepsilon^2) \quad (10)$$

В результаті отримаємо оператор

$$\tilde{H}f(x,y)=(\tilde{H}_1+\tilde{H}_2-H_{12})f(x,y) \quad (11)$$

$$\tilde{H}_1f(x,y)=\tilde{C}_{10,N}(y)\chi_{[0,1]}(x)+\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{2^j-1}\tilde{C}_{1,j,k,N}f(y)\chi_{j,k}(x) \quad (12)$$

$$\tilde{H}_2f(x,y)=\tilde{C}_{20,N}(x)\chi_{[0,1]}(y)+\sum_{i=0}^{N}\sum_{l=0}^{2^j-1}\tilde{C}_{2,i,l,N}f(x)\chi_{i,l}(y) \quad (13)$$

У зв'язку з обмеженістю об'єму статті, явні вирази для операторів:

$$\tilde{C}_{10,N}f(y):=\tilde{C}_{10,N}(f;y),\ \tilde{C}_{1,j,k,N}f(y):=\tilde{C}_{1,j,k,N}(f;y),$$

$$\tilde{C}_{20,N}f(x):=\tilde{C}_{20,N}(f;x),\ \tilde{C}_{2,i,l,N}f(x):=\tilde{C}_{2,i,l,N}(f;x)$$

опускаємо. Відмітимо лише, що кожна з цих формул є сумою Хаара, коефіцієнти якої C_{jlik} є подвійними інтегралами по прямокутниках, а не по квадратах, як у випадку $H_{12n}f(x,y)$.

Теорема 3. Оператори $\tilde{H}f(x,y)$ наближують функцію $f(x,y)$ з похибкою

$$\left\|f(\cdot,\cdot)-\tilde{H}f(\cdot,\cdot)\right\|_{C(D)}=O(\varepsilon^2) \quad (14)$$

Таким чином оператори $\tilde{H}f(x,y)$ є операторами, двовимірної вейвлет - апроксимації, яка має таку ж точність, як і класична двовимірна вейвлет - апроксимація Хаара у якій замість n стоїть N

$$H_{N,N}f(x,y)=H_{1N}H_{2N}f(x,y), \quad (15)$$

але використовує значно меншу кількість інтегралів виду

$$C_{jkil}=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\chi_{j,k}(x)\chi_{i,l}(y)dxdy \quad (16)$$

Крім того, оператори $\tilde{H}_N f(x,y)$ мають таку ж похибку $O(\varepsilon^2)$ як і оператори мішаної апроксимації Хаара $H_n f(x,y)$, але використовують для своєї побудови не систему функцій однієї змінної $C_{10}f(y)$, $C_{1,j,k}f(y)$, $j=\overline{0,N}$, $k=\overline{0,2^j-1}$, $C_{20}f(x)$, $C_{2,i,l}f(x)$, $i=\overline{0,N}$, $l=\overline{0,2^i-1}$, а систему чисел C_{jlik}.

6. Висновки

Таким чином в даній роботі вперше запропоновано алгоритм побудови узагальнених операторів вейвлет - апроксимації Хаара $\tilde{H}f(x,y)$, оснований на використанні операторів мішаної апроксимації Хаара функцій 2-х змінних $H_n f(x,y)$. Ці оператори для наближення з точністю $O(\varepsilon^2)$ використовують значно менше число коефіцієнтів типу C_{jlik} порівняно з класичною апроксимацією двовимірними функціями Хаара.

7. Література

[1] Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544 с.

[2] Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Analysis. 1984. Vol. 15. P. 723-736.

[3] Haar A. Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen-Systeme // Math. Ann. 1910. № 69. P. 331-371.

[4] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets // Comm. Pure and Appl. Math. 1988. Vol. 41. P. 909 – 996.

[5] Mallat S. Multiresolution Approximation and Wavelet Orthonormal Bases $L_2(R)$ // Trans. AMS. 1989. Vol. 1, № 315. P. 69-87.

[6] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.

[7] Wojtaszczyk P. A Mathematical Introduction to Wavelets. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[8] Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53, вып. 6(324). С. 53-128.

[9] Чуи К. Введение в вейвлеты: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 412 с., ил.

[10] Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в Matlab. -2003. – 200 с

[11] Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: Солон –Р, 2002.- 430 с.

[12] Петухов А. П. Введение в теорию базисов всплесков. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999.

[13] Sweldens W. The Lifting Scheme: A Construction of Second Generation Wavelets // SIAM J. Math. Anal. 1996. Vol. 3, № 2. P. 186-200.

[14] .DeVore R., Jawerth W., Lucier B. Image Compression Trough Wavelet Transform Coding // IEEE Trans. on Information Theory. 1992. Vol. 39, № 2. P. 719-746.

[15] Стаховский И. Р. Вейвлетный анализ временных сейсмических рядов // ДАН. – 1996. – Т. 350, № 3. – С. 393-396.

[16] Захаров В. Г. Разработка и применение методов вейвлет-анализа к нелинейным гидродинамическим системам: Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 – Пермь, 1997.