Одне узагальнення поняття тренду для неперіодичних функцій двох змінних

Олег М. Литвин, Володимир М.Удовиченко

Українська інж.-педагог. академія, Національний техн. ун-тет “ХПІ”, Україна
academ@kharkov.ua, vlad_udov@ic.kharkov.ua

Анотація

Запропоновано загальний алгоритм побудови оператора двовимірного тренду $Tr(x,y)$ для неперіодичної фінітної функції $f(x,y)\in C^r(D)$, $D=[a,b]\times[c,d]$, для якої її періодичне продовження $\tilde{f}(x,y)$ з періодом $b-a$ по змінній x та $d-c$ по змінній y може бути розривною функцією: $\tilde{f}(x,y)\notin C(R^2)$. Алгоритм використовує оператор поліноміальної інтерлінації функцій на чотирьох сторонах прямокутника D [1]. Пропонується також періодичну складову функції $f(x,y)$, яка визначається рівністю $v(x,y)=f(x,y)-Tr(x,y)$, наближувати операторами, що використовують експериментальні дані і є точними на тригонометричних поліномах заданого порядку. Це дозволяє підвищити ефективність обробки результатів експерименту.

1. Вступ

1.1. Постановка проблеми.

Як відомо, неперіодичні функції $f(x,y)\in C(D)$, $D=[a,b]\times[c,d]$ при періодичному їх продовжені на всю площину R^2 не зберігають неперервність. Це означає, що їх ряди Фур’є мають явище Гіббса. Тобто при збільшені порядку частинних сум Фур’є точність наближення в точках розриву прямує до величини, яка залежить від стрибків $\delta_1(x)=\left|f(x,c+0)-f(x,d-0)\right|$, $\delta_2(y)=|f(a+0,y)-$ $-f(b-0,y)|$. Одним із ефективних методів боротьби з явищем Гіббса є метод, оснований на використанні процедури видалення тренду. Хай $f(x,y)\in C^r(D)$, $D=[a,b]\times[c,d]$. Позначимо через $\tilde{f}(x,y)$ її періодичне продовження з періодом $b-a$ по змінній x та $d-c$ по змінній y:

$$\tilde{f}(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in D,\ \tilde{f}[x+m(b-a),y]=$$

$=\tilde{f}[x,y+n(d-c)]=\tilde{f}(x,y)\,\forall(x,y)\in R^2,\ m,n\in Z$. Для функцій $f(x,y)$, для яких $\delta_1(x)\neq 0,\ \delta_2(y)\neq 0$ їх періодичне продовження $\tilde{f}(x,y)$ може бути розривною функцією: $\tilde{f}(x,y)\notin C(R^2)$. В даній роботі вперше ставиться задача відновлення таких функцій $f(x,y)$ сумами Фур’є або Хартлі (для дійсних функцій) з використанням тренду у вигляді відповідного оператора поліноміальної інтерлінації на сторонах D. Звертаємо увагу на те, що в деяких працях (напр. [2, С.173], [3, С.253]) для наближення функції $f(x)$ однієї змінної використовуються не повні тригонометричні поліноми порядку $N/2$:

$$T_{N/2}(x)=\sum_{-N/2<q\le N/2} A_q \exp\{2\pi jqx\},\ j=\sqrt{-1}.$$

В [2, С.173] на конкретному прикладі показано, що не повні суми Фур’є не мають гарних апроксимативних властивостей. Відмітимо також, що відомі алгоритми побудови операторів наближення функцій за допомогою експериментальних даних, точні на тригонометричних поліномах заданого порядку, вимагають розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) [4, С.425], розмірність якої дорівнює кількості коефіцієнтів тригонометричного полінома. Нами пропонується метод такої побудови операторів наближення функцій за допомогою експериментальних даних, точних на тригонометричних поліномах заданого порядку, який не вимагає розв’язання відповідної СЛАР.

1.2. Аналіз літератури.

В роботі [5, С.165] запропоновано метод побудови тренда та обгрунтована доцільність його використання в одновимірному випадку. В роботі [6, С.98] відзначено, що присутність в даних (одержаних шляхом технічних вимірювань) лінійного тренду може призвести до великих помилок при визначені щільності спектра потужності сигналів. Для обчислення одновимірного поліноміального тренду в роботі [6] використано метод найменших квадратів. Авторам не відомі дослідження, у яких пропонувався б загальний метод побудови тренда для функцій двох змінних.

1.3. Метою роботи є

1) побудова оператора обчислення тренду $Tr\,f(x,y,a,b,c,d)$ для фінітної неперіодичної функції $f(x,y)\in C^r(D),\ r=1,2,...$, $D=[a,b]\times[c,d]$ у вигляді оператора поліноміальної інтерлінації Лагранжа та оператора поліноміальної інтерлінації Ерміта функцій двох змінних на сторонах D;

2) розробка і дослідження методу відновлення $f(x,y)$ у вигляді суми тренду і операторів Фур’є або Хартлі для різниці $f(x,y)-Tr\,f(x,y,a,b,c,d)$;

3) застосування до цієї різниці, яка є періодичною функцією, методу побудови операторів, точних на тригонометричних поліномах заданого порядку [7]- [9].

2. Оператор двовимірного тренду на основі інтерлінації функцій

2.1. Алгоритм побудови оператора двовимірного тренду на основі ітерлінації функцій

2.1.1. Побудова двовимірного тренду з використанням поліноміальної інтерлінації Лагранжа

Розглянемо частинний випадок побудови тренда, який використовує лише сліди $f(x,y)$ на границі D. Зобразимо фінітну функцію $f(x,y)$, $\operatorname{supp} f(x,y)=D$ у вигляді: $f(x,y)=Tr\, f(x,y,a,b,c,d)+v(x,y)$, де функція $v(x,y)$ визначається $v(x,y)=f(x,y)-Tr\, f(x,y,a,b,c,d)$, а двовимірний тренд будуємо у вигляді оператора поліноміальної інтерлінації функцій [1, С.167]:

$$Tr\, f(x,y,a,b,c,d)=\frac{x-b}{a-b}f(a,y)+\frac{x-a}{b-a}f(b,y)+$$

$$+\frac{y-d}{c-d}f(x,c)+\frac{y-c}{d-c}f(x,d)-$$

$$-\frac{x-b}{a-b}\left[O_{2,0}f(a,y)\right]-\frac{x-a}{b-a}\left[O_{2,0}f(b,y)\right],$$

$$O_{2,0}f(x,y)=f(x,c)\frac{y-d}{c-d}+f(x,d)\frac{y-c}{d-c}$$

Оператор $Tr\, f(x,y,a,b,c,d)\in C(D)\ \forall\ f(x,y)\in C(D)$ і має властивості:

$$Tr\, f(x,y,a,b,c,d)_{x=a}=f(a,y),$$

$$Tr\, f(x,y,a,b,c,d)_{x=b}=f(b,y),$$

$$Tr\, f(x,y,a,b,c,d)_{y=c}=f(x,c),$$

$$Tr\, f(x,y,a,b,c,d)_{y=d}=f(x,d). \qquad (1)$$

Зауважимо, що для побудови оператора поліноміальної інтерлінації граничні сліди функції $f(x,y)$ повинні у кутових точках D задовольняти умови стикування:

$$f(a,y)\big|_{y=c}=f(x,c)\big|_{x=a}=f(a,c),$$

$$f(b,y)\big|_{y=c}=f(x,c)\big|_{x=b}=f(b,c),$$

$$f(a,y)\big|_{y=d}=f(x,d)\big|_{x=a}=f(a,d),$$

$$f(b,y)\big|_{y=d}=f(x,d)\big|_{x=b}=f(b,d).$$

Ці умови автоматично виконуються лише, якщо $f(x,y)\in C^r(\overline{D}),\ r\ge 0$. При цьому функція $v(x,y)$ буде мати властивості:

$$v(x,y)\big|_{x=a}\equiv 0;\ v(x,y)\big|_{x=b}\equiv 0;$$

$$v(x,y)\big|_{y=c}\equiv 0;\ v(x,y)\big|_{y=d}\equiv 0; \qquad (2)$$

Позначимо через $\tilde{v}(x,y)$ її періодичне продовження з періодом $b-a$ по змінній x та $d-c$ по змінній y: $\tilde{v}(x,y)=v(x,y),\ (x,y)\in D$:

$$\tilde{v}\left[x+m(b-a),y\right]=\tilde{v}\left[x,y+n(d-c)\right]=$$

$$=\tilde{v}(x,y)\,\forall\,(x,y)\in R^2;\ m,n\in \mathrm{Z}.$$

Для функцій $v(x,y)$ з властивостями (2), їх періодичне продовження $\tilde{v}(x,y)$ є неперервною функцією: $\tilde{v}(x,y)\in C(R^2)$. Тобто для $v(x,y)$ з властивостями (2) при її розкладі у двовимірний ряд Фур'є або Хартлі явище Гіббса буде відсутнє.

2.1.2. Побудова двовимірного тренду з використанням поліноміальної інтерлінації Ерміта

Для розгляду загального випадку припустимо, що $f(x,y)\in C^r(D),\ r\ge 0$. Введемо базисні поліноми $e_{k,p}(t),\ k=0,1;\ p=\overline{0,r}$ степеня $2r+1$ поліноміальної двоточкової інтерполяції Ерміта [1, с.163] з властивостями:

$e_{k,p}^{(j)}(q)=\delta_{k,q}\delta_{p,j};\ k,q\in\{0,1\};\ p,j\in\overline{0,r}$. Введемо також двоточкові поліноми Ерміта $O_{1,r}f(x,y)$ та $O_{2,r}f(x,y)$ за змінними x та y відповідно:

$$O_{1,r}f(x,y)=\sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{r}f^{(p,0)}[a+k(b-a),\,y]\times$$

$$\times e_{k,p}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)(b-a)^p;$$

$$O_{2,r}f(x,y)=\sum_{m=0}^{1}\sum_{j=0}^{r}f^{(0,j)}[x,c+m(d-c)]\times$$

$$\times e_{m,j}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)(d-c)^j.$$

За допомогою цих операторів побудуємо для функції $f(x,y)$ оператор поліноміальної інтерлінації Ерміта:

$O_{1,2,r}f(x,y)=(O_{1,r}+O_{2,r}-O_{1,r}O_{2,r})f(x,y)$, де

$$O_{1,r}O_{2,r}f(x,y)=\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{1}\sum_{p=0}^{r}\sum_{j=0}^{r}f^{(p,j)}\left[a+k(b-a),c+\right.$$

$$\left.+m(d-c)\right]e_{k,p}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)(b-a)^p e_{m,j}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)(d-c)^j.$$

Зокрема, при $r=0$ маємо формулу (1).

Відмітимо деякі властивості введених операторів.

Твердження 1. Оператори $O_{1,r}f, O_{2,r}f$, мають властивості див. [1, С.158]

$$\left.\frac{\partial^s O_{1,r}f}{\partial x^s}\right|_{x=z}=\left.\frac{\partial^s f}{\partial x^s}\right|_{x=z},\ z=a\vee z=b;\ s=\overline{0,r};$$

$$\left.\frac{\partial^p O_{2,r}f}{\partial y^p}\right|_{y=z}=\left.\frac{\partial^p f}{\partial y^p}\right|_{y=z},\ z=c\vee z=d;\ p=\overline{0,r}.$$

Твердження 2. Оператор $O_{1,2,r}f$ має властивості (див. [1, С.157])

$$\left.\frac{\partial^s O_{1,2,r}f}{\partial x^s}\right|_{x=z}=\left.\frac{\partial^s f}{\partial x^s}\right|_{x=z},\ z=a\vee z=b;\ s=\overline{0,r}, \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial^p O_{1,2,r}f}{\partial y^p}\right|_{y=z}=\left.\frac{\partial^p f}{\partial y^p}\right|_{y=z},\ z=c\vee z=d;\ p=\overline{0,r},$$

які отримуються застосуванням твердження 1. З твердження 2 витікає, що у випадку, якщо покласти

$Tr\, f(x,y,a,b,c,d)=O_{1,2,r}\, f(x,y)$, то функція $v(x,y)$ буде мати наступні властивості:

$$\left.\frac{\partial^s v}{\partial x^s}\right|_{x=z}=0,\ z=a\vee z=b,\ s=\overline{0,r};$$

$$\left.\frac{\partial^p v}{\partial y^p}\right|_{y=z}=0,\ z=c\vee z=d,\ p=\overline{0,r}.$$

2.2. Похибка наближення диференційовних функцій двох змінних операторами, що використовують тренд

З попереднього підрозділу випливає наступне. Якщо позначити через $\bar{v}(x,y)$ функцію, продовжену періодично з періодом 2π по x і 2π по y на всю площину Oxy (залишимо за нею те ж саме позначення $v(x,y)$), то $v(x,y)\in C^r(R^2)$. Це дозволяє довести наступну теорему.

Теорема 1. Нехай $a=-\pi,\ b=\pi,\ c=-\pi,\ d=\pi;\ D=$

$$=[-\pi,\pi]^2;\ Tr\, f(x,y)=Tr\, f(x,y;-\pi,\pi,-\pi,\pi),$$

$$f(x,y)=Tr\, f(x,y)+v(x,y),\ f\in C^r(\bar{D}),\ r=1,2,\ldots.$$

Тоді для суми Фур'є

$$F_n v=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{p=-n}^{n} C_{k,p}(f)\exp[j(kx+py)],\ \text{де}$$

$$C_{k,p}(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x,y)\exp[-j(kx+py)]\,dx\,dy$$

та для суми Хартлі

$$H_n v=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{p=-n}^{n} C_{k,p}(f)\,cas(kx+py),\ \text{де}$$

$$C_{k,p}(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x,y)\,cas(kx+py)\,dx\,dy,$$

де $cas(t)=:\cos(t)+\sin(t)$, похибки $(v-F_n v)$, $(v-H_n v)$ будуть задовольняти асимптотичні співвідношення:

$$\|v-F_n v\|_C=\frac{8}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r},\ r=1,2,\ldots,n\to\infty,$$

$$\|v-H_n v\|_C=\frac{8}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r},\ r=1,2,\ldots,n\to\infty.$$

Ці оцінки отримані за допомогою відповідної оцінки наближення диференційовних функції однієї змінної тригонометричними поліномами порядку n [10, С.172].. Звідси випливає наступне.

Теорема 2. Якщо $f(x,y)\in C^r(D),\ r\ge 1$, то для похибки наближення $Rf(x,y)=f(x,y)-Trf(x,y)-F_n v(x,y)$, де $F_n v(x,y)$ - сума Фур'є порядку n для періодичної складової $v(x,y)$, має місце наступна оцінка:

$$\|Rf\|_{C(D)}=O\left(\frac{8}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}\right).$$

Аналогічна теорема справедлива також для випадку, коли функція $v(x,y)$ наближується сумою Хартлі.

Теорема 3. Нехай $a=-\pi,\ b=\pi,\ c=-\pi,\ d=\pi;\ D=$

$$=[-\pi,\pi]^2;\ Tr\, f(x,y)=Tr\, f(x,y;-\pi,\pi,-\pi,\pi),$$

$$f(x,y)=Tr\, f(x,y)+v(x,y),\ f\in C^r(\bar{D}),\ r=1,2,\ldots.$$

$H_n v(x,y)-$ сума Хартлі для функції $v(x,y)$, то для похибки $Rf(x,y)=f(x,y)-Trf(x,y)-H_n v(x,y)$ має місце наступна оцінка:

$$\|Rf\|_{C(D)}=O\left(\frac{8}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}\right).$$

3. Оператори фінітного n – вимірного дискретно–неперервного перетворення Фур'є (Хартлі), точні на тригонометричних поліномах заданого порядку

Теорема 4, [1, С.519]. Якщо вузли і коефіцієнти кубатурних формул $\tilde{C}_k(f)$ задовольняють умови

(при $\delta_{k,p}=\prod_{s=1}^{n}\delta_{k_s,p_s}$. $j^2=-1$)

$$\tilde{C}_k(e^{jpx})=\gamma_k\delta_{k,p},\ p=(p_1,\ldots p_n),\ |k_s|,|p_s|\le N;\ \gamma_k\ne 0,$$

$px=p_1x_1+\ldots p_nx_n$, то оператор

$$A_N(f;x)=\sum_{q_1=-N}^{N}\ldots\sum_{q_n=-N}^{N}\frac{\tilde{C}_q(f)}{\gamma_q}e^{jkx},\ q=(q_1,\ldots,q_n)$$

є точним на тригонометричних поліномах порядку N по кожній змінній $x_s,\ s=\overline{1,n}$.

Зокрема, для випадків наближення кусково-сталими сплайнами та сплайнами першого порядку для $n=2$ твердження теореми 3 реалізовані в [7]-[9]. Зупинимось детальніше на випадку побудови кубатурної формули з використанням кусково-сталих сплайнів. В [7] досліджено оператор фінітного двовимірного дискретно–неперервного перетворення Фур'є (ОФДДНПФ_Sp0) у вигляді:

$$L_{N,M}^{F,2d,\,Sp0}f(u_1,u_2)=\sum_{k_1=-N_1}^{N_1}\sum_{k_2=-N_2}^{N_2} g_{N,M,k_1,k_2}^{F,2d,Sp0}(f)\times$$

$$\times\exp\left(j\sum_{t=1}^{2}k_t u_t\right),\ u_s\in[-\pi,\pi],\ u_s\in R,\ s=1,2. \quad (4)$$

$$g_{N,M,k_1,k_2}^{F,2d,Sp0}(f)=e_1e_2\sum_{p_1=-M_1}^{M_1}\sum_{p_2=-M_2}^{M_2} f(x_{p_1},y_{p_2})\times$$

$$\times\Big\{[1,(k_1=0\wedge k_2=0)]\vee[\exp(-jk_1p_1\Delta_1),(k_1\ne 0\wedge k_2=0)]\vee$$

$$\vee[\exp(-jk_2p_2\Delta_2),(k_1=0\wedge k_2\ne 0)]\vee$$

$$\vee\left[\exp\left(-j\sum_{t=1}^{2}k_t p_t\Delta_t\right),(k_1\ne 0\wedge k_2\ne 0)\right]\Big\},$$

$$N=(N_1,N_2),\ M=(M_1,M_2),\ e_s=1/(2M_s+1),$$

$$\Delta_s=2\pi e_s,\ k_s=\overline{-N_s,N_s},\ N_s\le M_s,\ s=1,2. \quad (5)$$

При застосуванні в ком'ютерних технологіях $u_s=p_s\tilde{\Delta}_s$,

$$\tilde{\Delta}_s=\Delta_s/\mu_s,\mu_s=1,2,3..,\ Q_s=\mu_sM_s,\ p_s=\overline{-Q_s,Q_s},s=1,2. \quad (6)$$

В [7, теорема 1] доведено, що ОФДДНПФ_Sp0 (4), (5) має такі властивості:

1°. $L_{M,M}^{F,2d,Sp0}f\equiv f$, якщо

$$f=\sum_{r_1=-M_1}^{M_1}\sum_{r_2=-M_2}^{M_2} C_{r_1,r_2}\exp\left[j(r_1x+r_2y)\right], \forall C_{r_1,r_2}\in\Re .$$

$2^o.\ L_{M,M}^{F,2d,Sp0} f(x_{p_1},y_{p_2})=f(x_{p_1},y_{p_2}),\ p_s=\overline{-M_s,M_s},\ s=1,2$.

В [9] досліджено оператор фінітного двовимірного дискретно–неперервного перетворення Хартлі (ОФДДНПХ_Sp0) у вигляді:

$$L_{N,M}^{H,2d,\,Sp0} f(u_1,u_2)=\sum_{k_1=-N_1}^{N_1}\sum_{k_2=-N_2}^{N_2} g_{N,M,k_1,k_2}^{H,2d,Sp0}(f)\times$$

$$\times cas\left(\sum_{t=1}^{2}k_t u_t\right),\ u_s\in[-\pi,\pi],\ u_s\in R,\ s=1,2 .$$

$$g_{N,M,k_1,k_2}^{H,2d,Sp0}(f)=e_1e_2\sum_{p_1=-M_1}^{M_1}\sum_{p_2=-M_2}^{M_2} f(x_{p_1},y_{p_2})\times$$

$$\times\{[1,(k_1=0\wedge k_2=0)]\vee[cas(k_1p_1\Delta_1),(k_1\neq 0\wedge k_2=0)]\vee$$

$$\vee[cas(k_2p_2\Delta_2),(k_1=0\wedge k_2\neq 0)]\vee$$

$$\vee[cas(k_1p_1\Delta_1+k_2p_2\Delta_2),(k_1\neq 0\wedge k_2\neq 0)]\},$$

$$e_s=1/(2M_s+1),\ \Delta_s=2\pi e_s,\ k_s=\overline{-N_s,N_s},\ N_s\le M_s,\ s=1,2 .$$

В ком'пютерних технологіях для визначення v_s використовуємо (6).

В [9, теорема 1] доведено, що ОФДДНПХ_Sp0 має такі властивості:

$1^o.\ L_{M,M}^{H,2d,Sp0} f\equiv f$, якщо

$$f=\sum_{r_1=-M_1}^{M_1}\sum_{r_2=-M_2}^{M_2} C_{r_1,r_2}\ cas(r_1x+r_2y), \forall C_{r_1,r_2}\in\Re$$

$2^o.\ L_{M,M}^{H,2d,Sp0} f(x_{p_1},y_{p_2})=f(x_{p_1},y_{p_2}),\ p_s=\overline{-M_s,M_s},\ s=1,2$.

Аналогічне твердження для сплайнів першого степення див. [8, теорема 1].

4. Висновки

Наукова новизна полягає в наступному:

1) побудовано оператор обчислення тренду для неперіодичної фінітної функції двох змінних $f(x,y)\in C^r(D),\ r=1,2,...$ з властивостями (3). Цей оператор дозволяє довільну фінітну функцію двох змінних подати у вигляді суми тренду і функції двох змінних, яка при періодичному її продовженні на всю площину, зберігає клас диференційованості $v(x,y)\in C^r(R^2)$;

2) в цьому випадку суми Фур'є або Хартлі функції $v(x,y)$, яка отримується з $f(x,y)$ вилученням тренда, не будуть мати явище Гіббса;

3) наведена оцінка похибки $(v-F_n v)$ та $(v-H_n v)$ наближення $v(x,y)$ тригонометричними сумами Фур'є та Хартлі заданого порядку, коефіцієнти яких знаходяться на основі експериментальних даних.;

4) наведена оцінка похибки наближення функції $f(x,y)$ сумою $Tr\ f(x,y)+v(x,y),\ f\in C^r(\bar{D}),\ r=1,2,...$ для випадків, коли $v(x,y)$ наближується відповідними сумами Фур'є або Хартлі.

6 Література

[1] Литвин О.М., *Інтерлінація функцій та деякі її застосування*, Основа, Харків, 2002.

[2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., *Численные методы*. ФИЗМАТЛИТ, Москва–Санкт-Петербург, 2001.

[3] Сергиенко А.Б., Цифровая обработка сигналов, ПИТЕР, Москва, 2003.

[4] Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах, т.3, "Наука", Москва, 1966.

[5] Крылов А.Н., *Лекции о приближённых вычислениях*, Изд. 6, Гос. издат. техн.-теорет. лит., Москва, 1954.

[6] Отнес Р. Эноксон Л., *Прикладной анализ временных рядов*, "Мир", Москва, 1982.

[7] Литвин О.М., Удовиченко В.М., "Оператори двовимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі кусково сталих сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого порядку", *Вестник НТУ "ХПИ", 9'2003, т.2, С.108-117.*

[8] Литвин О.М., Удовиченко В.М., "Оператори двовимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі сплайнів першого степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого порядку", *Вестник НТУ "ХПИ", 7'2003, т.4, С.49-58.*

[9] Литвин О.М., Удовиченко В.М., "Оператори двовимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Хартлі на основі кусково сталих сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого порядку", *Вестник НТУ "ХПИ", 7'2003, т.3, С.105-114.*

[10] Корнейчук Н.П., *Точные константы в теории приближения*. Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва, 1987.