Обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних за допомогою квадратичної сплайн-інтерполяції, побудованої на основі сплайн-інтерлінації

О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків
academ@kharkov.ua olesya@email.com

Анотація

В цифровій обробці двовимірних сигналів виникає задача ефективного обчислення коефіцієнтів Фур'є. В даній роботі досліджується алгоритм наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних за допомогою біквадратичної сплайн-інтерполяції, побудованої на основі сплайн-інтерлінації та відповідного узагальнення методу Файлона. Для побудови системи базисних квадратичних сплайнів, використовуються методи, які не вимагають задання додаткових граничних умов та додаткових вузлів (крім вузлів інтерполяції). Досліджується похибка запропонованого методу.

1. Вступ

1.1. Постановка задачі

Задача, яку ми досліджуємо в даній роботі полягає в побудові біквадратичних інтерполяційних сплайнів на основі сплайн-інтерлінації (за аналогією з п 4.5. монографії О.М.Литвина [1]). При цьому для побудови кубатурних формул для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних

$$C_{pq} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)e^{-ip\pi x}e^{-iq\pi y}dxdy\ , \quad p,q = 0,\dots,R,$$

використовується узагальнення методу Файлона, яке полягає в заміні функції $f(x,y)$ побудованим наближуючим біквадратичним сплайном.

1.2. Огляд літературних джерел

Класичні методи побудови інтерполяційних сплайнів добре досліджені для сплайнів парного та непарного степеня (лінійних, квадратичних, кубічних, тощо) [2]-[4]. Такі методи побудови інтерполяційних сплайнів мають недоліки: вимагають використання додаткових граничних умов та (у випадку сплайнів парного степеня) додаткових вузлів (крім вузлів інтерполяції). Відмітимо, що сучасний підхід до побудови сплайнів однієї та двох змінних [1], [5], [6] дозволяє відмовитись від використання додаткових вузлів (крім вузлів інтерполяції) та додаткових граничних умов. В даній роботі досліджуються алгоритми наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних за допомогою біквадратичної сплайн-інтерполяції та біквадратичної сплайн-інтерполяції, побудованої на основі сплайн-інтерлінації. При цьому квадратичні сплайни, що використовуються в роботі будуються за розробленим в [1], [5], [6] методом.

2. Параболічний сплайн функції однієї змінної

2.1. Класичний параболічний сплайн

В класичній теорії сплайн-інтерполяції [4] пропонується метод побудови параболічних сплайнів, який використовує дві сітки вузлів: $\{\bar{x}_i\}$, $i=\overline{1,n}$ - вузли сплайна та $\{x_i\}$, $i=\overline{0,n}$ - вузли інтерполяції

$$x_0 < \bar{x}_1 < x_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_n < x_n..$$

Означення 1. Функція $S_2(f;x)=S_2(x)$, називається інтерполяційним параболічним сплайном для $f(x)\in C[a,b]$, якщо

1. $S_2(x)=\sum_{j=0}^{2} a_{ij}x_j, \quad x\in[\bar{x}_i,\bar{x}_{i+1}], \quad i=\overline{0,n};$
2. $S_2(x)\in C^1[a,b];$
3. $S_2(x_i)=f(x_i), \quad i=\overline{0,n}.$ (1)

Побудований таким чином сплайн залежить від (n+3) параметрів, має два вільних параметри, тому цей інтерполяційний сплайн повинен задовольняти ще двом додатковим умовам. У загальному випадку використовують такі умови

1. $S_2^{(i)}(a)=S_2^{(i)}(b), \quad i=1,2;$ (2)
2. $S_2'(a)=a_n, \quad S_2'(b)=b_n;$ (3)
3. $S_2''(a)=A_n, \quad S_2''(b)=B_n,$ (4)

де A_n, a_n, B_n, b_n деякі дійсні числа. Конкретний вибір цих чисел залежить від задачі. Якщо функція $f(x)$ має відповідні похідні, то можна покласти

$$a_n = f'(a), b_n = f'(b), \text{ або } A_n = f''(a), B_n = f''(b).$$

Можна вимагати, щоб сплайн мав неперервну другу похідну в точках $x=x_1$, $x=x_{n-1}$. Це еквівалентно таким умовам

$$S_2''(z-0)=S_2''(z+0), \quad z=\bar{x}_i, \quad i=1,n-1. \tag{5}$$

Покладемо

$$m_i = S_2'(x_i), \quad M_i = S_2''(x_i), \quad i=\overline{0,n}. \tag{6}$$

Оскільки $S_2''(x_i)$ -кусково-стала функція, то $S_2''(x)=M_i$, $\bar{x}_i \le x \le \bar{x}_{i+1}$, $i=\overline{0,n-1}$. Нехай

$$h_i = x_{i+1}-x_i, \quad \bar{h}_i = \bar{x}_{i+1}-\bar{x}_i, \quad i=\overline{0,n-1},$$

$$f(x_{k-1},x_k,x_{k+1})=\frac{f(x_k,x_{k+1})-f(x_{k-1},x_k)}{x_{k+1}-x_{k-1}}.$$

Теорема 1. [4, ст. 35]
Якщо $0<\bar{h}_i<h_i$, $i=0,1,...,n-1;$ $n\ge 2$, то інтерполяційний сплайн, що задовольняє інтерполяційним умовам (1) та одній з груп граничних умов (2)- (4) існує та визначається єдиним способом.
Доведення цієї теореми зводиться до доведення єдиності розв'язку відповідної тридіаганальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

2.2. Квадратичний сплайн, який не використовує допоміжні вузли

Викладемо метод побудови квадратичного сплайна, який не використовує додаткової системи вузлів, крім вузлів інтерполяції, не потребує використання додаткових граничних умов, дає явне представлення цих сплайнів (не вимагає розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1) та (2) або (3) або (4)) [1, ст. 54-55].
Розглянемо функцію $f(x)\in KC^2[-1,1]=\{f(x):$ $f^{(s)}(x)\in C[-1,1],$ $s=0,1$, f'' -кусково-неперервна на $[-1,1]$ $\|f''\|_{L_\infty[-1,1]}\le K\}$. Нехай задана сітка $\Delta: -1=x_1<x_2...<x_n=1$.
Сплайн другого степеня має вигляд

$$S_2(x)=\frac{1}{h_i}[(x-x_i)y_{i+1}-(x-x_{i+1})y_i]+ \\ +\frac{M_{i,i+1}}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1}),\quad x\in[x_i,x_{i+1}], \tag{9}$$

$h_i=x_{i+1}-x_i$, $i=\overline{1,n-1}$, де $M_{i,i+1}$ – -деякі невідомі сталі. Для знаходження $M_{i,i+1}$, $i=\overline{1,n-1}$, використаємо умови неперервності 1-ї похідної сплайна та наступний критерій: $\int_a^b (S_2''(x))^2dx\to \min_{M_{0,1}}$. Тоді $M_{i,i+1}, i=\overline{1,n-1}$ знаходяться за формулами:

$$M_{1,2}=\frac{2}{a_1h_1}\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{i-1}(\Delta_{1,i+1}-\Delta_{1,i})a_{i+1}, \tag{10}$$

$$M_{i,i+1}=[2(\Delta_{1,i}-\Delta_{1,i-1})-M_{i-1,i}h_{i-1}]/h_i,\quad i=\overline{1,n-1}, \tag{11}$$

або у явному вигляді:

$$M_{i,i+1}=\frac{2}{h_i}\left[\sum_{k=2}^{i}(-1)^{k+i}(\Delta_{1,k}-\Delta_{1,k-1})+(-1)^{i-1}h_1M_{1,2}\right], \tag{12}$$

$$\Delta_{1,i}=\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i},\quad i=\overline{1,n-1},$$

де. $a_i=\sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{h_j}$, $i=\overline{2,n-1}$.
При рівномірному розбитті [7]

$$h_1=h_2=...=h_{n-1}=h=2/(n-1)$$

для $M_{i,i+1}$, $i=\overline{1,n}$ виконуються рівності $M_{1,2}=0$, $n=2$,
(нижче використовуємо правило $\sum_{s=3}^{p}*=0$, $p<3$)

$$M_{1,2}=\frac{2}{(n-1)h^2}\Bigg[(n-2)y_1-(3n-7)y_2+ \\ +4\sum_{s=3}^{n-1}(-1)^{n-1}(n-s)y_s+(-1)^{n-1}y_n\Bigg],\qquad n\ge 3; \tag{13}$$

$$M_{2,3}=\frac{2}{h^2}(y_1-2y_2+y_3)-M_{1,2},$$

$$M_{i,i+1}=\frac{2(-1)^i}{h^2}\left(y_1-3y_2+4\sum_{s=3}^{i-1}(-1)^{s-1}y_s+(-1)^{n-1}y_n\right)+ \\ +(-1)^{i-1}M_{1,2}\quad i=\overline{3,n-1}. \tag{14}$$

2.3. Базисні сплайни другого порядку функції однієї змінної

Запис квадратичних сплайнів у вигляді (9) дуже зручний при обчисленні цих сплайнів у конкретних точках, бо вимагає найменшого числа арифметичних операцій. Але в деяких випадках форма запису (9) є менш привабливою ніж форма запису

$$S_2(x)=\sum_{k=1}^{n}S_{2k}(x)\cdot y_k \tag{15}$$

де $S_{2k}(x)$ $k=\overline{1,n}$ – базисні квадратичні сплайни з властивостями

$$S_{2k}(x_p)=\delta_{k,p},\quad k,p=\overline{1,n}.$$

Теорема 2. Оператор $S(Y,x)$, що визначається сіткою вузлів $\Delta: -1=x_1<x_2...<x_n=1$ та значеннями $y_1,...,y_n$ є лінійним оператором на класі функцій $f(x)$ з властивостями $f(x_k)=y_k$, $k=\overline{1,n}$.
Доведення безпосередньо випливає з того, що у формулу (9) значення $f(x_k)=y_k$, $k=\overline{1,n}$ входять лінійно в обидва доданки. З формул (13)-(14) випливає, що існують базисні сплайни і формулу (9) можна представити у вигляді (15).
Зауваження. Обчислення величин $M_{i,i+1}$, $i=\overline{1,n-1}$ для кожного $S_{2k}(x)$ $k=\overline{1,n}$ можна провести раз і назавжди при фіксованих n, тобто додаткової кількості арифметичних операцій у зв'язку з використанням базисних сплайнів не виникає.
Викладемо один з можливих алгоритмів побудови таких базисних сплайнів. Він повністтю може бути оснований на використанні формул (13) – (14) і його можна розбити на кроки.
Крок 1. Для побудови базисного сплайна $S_{2k}(x)$, $k=\overline{1,n}$ задамо значення $y_j=\delta_{j,k}$, $j=\overline{1,n}$.
Крок 2. Підставляємо значення y_j, $j=\overline{1,n}$ у формули (13) – (14). У кожній з них буде не дорівнювати нулю тільки один доданок.
Нижче для $n=3$ наведемо значення величин та явні вирази для перших кількох базисних квадратичних сплайнів. Маємо:
1. $y_1=1$, $y_2=0$, $y_3=0$,

$$S_{21}(x)=\begin{cases}\frac{x-x_2}{x_1-x_2}+\frac{M_{1,2}}{2}(x-x_1)(x-x_2), & x_1\le x\le x_2,\\ \frac{M_{2,3}}{2}(x-x_2)(x-x_3), & x_2\le x\le x_3,\end{cases}$$

$$M_{1,2}=\frac{1}{h^2},\quad M_{2,3}=\frac{1}{h^2},$$

2. $y_1=0,\quad y_2=1,\quad y_3=0$,

$$S_{22}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}+\dfrac{M_{1,2}}{2}(x-x_1)(x-x_2), & x_1\le x\le x_2,\\ \dfrac{x-x_3}{x_3-x_2}+\dfrac{M_{2,3}}{2}(x-x_2)(x-x_3), & x_2\le x\le x_3,\end{cases}$$

$$M_{1,2}=-\frac{2}{h^2},\quad M_{2,3}=-\frac{2}{h^2},$$

3. $y_1=0,\quad y_2=0,\quad y_3=1$,

$$S_{23}(x)=\begin{cases}\dfrac{M_{1,2}}{2}(x-x_1)(x-x_2), & x_1\le x\le x_2,\\ \dfrac{x-x_2}{x_3-x_2}+\dfrac{M_{2,3}}{2}(x-x_2)(x-x_3), & x_2\le x\le x_3,\end{cases}$$

$$M_{1,2}=\frac{1}{h^2},\quad M_{2,3}=\frac{1}{h^2},$$

Отже, $S_2(x)=y_1S_{21}(x)+y_2S_{22}(x)+y_3S_{23}(x)$.

3. Біквадратичний сплайн

Побудуємо біквадратичний сплайн. Нехай $\Omega=[-1,1]\times[-1,1]$, $f(x,y)\in C^{2,2}(\Omega)$. Введемо розбиття:

$$-1=x_1<x_2<\ldots<x_n=1,\quad -1=y_1<y_2<\ldots<y_n=1,$$

$f_{i,j}=f(x_i,y_j)$, $i,j=\overline{1,n}$ – інтерполяційні дані.

Інтерполяційний сплайн $S_{2,2}(x,y)$ шукаємо у вигляді:

$$S_{2,2}(x,y)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}f(x_i,y)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1},y)+ +\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2}M_{i,i+1}(f;y),\qquad (16)$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}],\quad i=\overline{0,n-1},\quad y\in[-1,1].$$

Невідомі $M_{i,i+1}(y)$ знаходимо із умов $S_{2,2}(x,y)\in C^{(1,0)}[-1,1]$, $\int_a^b\left((S_{2,2}(x,y))''_{xx}\right)^2dx\to\min\limits_{M_{0,1}(f;y)}$. Тобто, для знаходження $M_{i,i+1}(f;y)$, можна скористатися умовами і формулами (10) - (12), тільки замість $\Delta_{1,i}$ розглядати

$$\Delta S_i(f;y)=\frac{f(x_{i+1},y)-f(x_i,y)}{x_{i+1}-x_i}$$

$$M_{1,2}(f;y)=\frac{2}{a_1h_1}\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{i-1}\left(\Delta S_{i+1}(f;y)-\Delta S_i(f;y)\right)a_{i+1},$$

$$a_k=\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{h_i},\quad k=\overline{2,n-1}$$

$$M_{i,i+1}(f;y)=\left[2\left(\Delta S_i(f;y)-\Delta S_{i-1}(f;y)\right)-M_{i-1}(f;y)h_{i-1}\right]/h_i,$$

$$i=\overline{1,n}$$

або у явному вигляді:

$$M_{i,i+1}(f;y)=\frac{2}{h_i}\left[\sum_{k=2}^{i}(-1)^{k+i}\left(\Delta S_k(f;y)-\Delta S_{k-1}(f;y)\right)+\backslash(-1)^{i-1}h_1M_{1,2}\right],$$

$$i=\overline{1,n-1}.$$

Невідомі $f(x_i,y)$, $i=\overline{1,n}$, знаходяться знову у вигляді інтерполяційних параболічних сплайнів

$$f(x_i,y)=\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}f(x_i,y_i)+\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}f(x_{i+1},y_{j+1})+ +\frac{(y-y_j)(y-y_{j+1})}{2}\overline{M}^i_{j,j+1},$$

$y\in[y_j,y_{j+1}]$, $j=\overline{1,n-1}$, де невідомі $\overline{M}^i_{j,j+1}$ визначаються за формулами

$$\overline{M}^i_{j,j+1}=\frac{2}{H_j}\left[(-1)^{k+j}\left(\Delta^i_{k+1}-\Delta^i_k\right)+(-1)^j\frac{H_1}{H_j}\overline{M}^i_{1,2}\right],\quad j=\overline{1,n-1},$$

$$\overline{M}^i_{1,2}=\frac{2}{d_1H_1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}d_{k+1}\left(\Delta^i_{k+1}-\Delta^i_k\right),$$

$$d_k=\sum_{l=k}^{n-1}\frac{1}{H_i},k=\overline{2,n-1},\Delta^i_k=\frac{f_{i,k+1}-f_{i,k}}{H_k},H_k=y_{k+1}-y_k,k=\overline{1,n-1}.$$

Процедура побудови біквадратичних сплайнів значно спрощується, якщо використовувати отримані в попередньому підрозділі базисні квадратичні сплайни. Кожний квадратичний сплайн від двох змінних, може бути представлений у вигляді

$$S_{22}(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}f_{kl}\,S_{nk}(x)S_{nl}(y).\qquad 17)$$

4. Обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних за допомогою біквадратичного сплайна, побудованого на основі біквадратичного сплайн-інтерлінанта

4.1. Біквадратичний сплайн-інтерлінант

Означення 2. Інтерлінацією функцій двох змінних $f(x,y)$ на системі ліній Γ_k, $k=\overline{1,M}$, $(M\ge 2)$ є відновлення (можливо наближене) $f(x,y)$ за допомогою її слідів на Γ_k, $k=\overline{1,M}$, та слідів її похідних до порядку N $(N\ge 0)$.

Нехай $f(x,y)=f(x+2\pi,y+2\pi)$. Позначимо через $Of(x,y)$ – біквадратичний сплайн-інтерлінант

$$Of(x,y)=\left(S_{2x}+S_{2y}-S_{2x}S_{2y}\right)f(x,y),\qquad (18)$$

де $S_{2x}(x,y)$ є квадратичним сплайном на $[-1,1]$ по змінній x при фіксованому y

$$S_{2x}f(x,y)=\sum_{k=1}^{m}f(x_k,y)S_{mk}(x),\qquad (19)$$

$S_{2y}(x,y)$ - квадратичний сплайн на $[-1,1]$ по змінній y при фіксованому x

$$S_{2y}f(x,y)=\sum_{s=1}^{n}f(x,y_l)S_{ns}(y),\qquad (20)$$

$S_{2x}S_{2y}=S_{22}(x,y)$ – побудований в пункті 3 квадратичний сплайн по змінним x та y одночасно.

Теорема 3.

Якщо $R_xf(x,y)=(I-S_{2x})f(x,y)$, $R_yf(x,y)=(I-S_{2y})f(x,y)$,

то залишок $Rf(x,y)=(I-O)f(x,y)$, можна представити у вигляді $Rf(x,y)=R_xR_y f(x,y)$.

Наслідок. Якщо $|R_x f(x,y)|=O(\varepsilon)$, $|R_y f(x,y)|=O(\varepsilon)$, то $|Rf(x,y)|=O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon\to 0$.

4.2. Біквадратичний інтерполяційний сплайн, побудований на основі сплайн-інтерлінації

Теорема 4.
Якщо у формулах (19), (20) зробити заміни слідів

$$f(x_k,y)\approx \tilde{f}_{N_2}\left(\frac{k}{m},y\right)=\sum_{l=1}^{N_2} f\left(\frac{k}{m},\frac{l}{N_2}\right)S_{2N_2 l}(y), \qquad (21)$$

$$f(x,y_l)\approx \tilde{f}_{N_1}\left(x,\frac{l}{n}\right)=\sum_{k=1}^{N_1} f\left(\frac{k}{N_1},\frac{l}{n}\right)S_{2N_1 k}(x), \qquad (22)$$

то отримаємо формулу

$$\tilde{O}f(x,y)=\left(\tilde{S}_{2x}+\tilde{S}_{2y}-S_{2x}S_{2y}\right)f(x,y). \qquad (23)$$

з властивістю

$$\left\| f-\tilde{O}f\right\|_{C(\Omega)}=O(\varepsilon^2), \qquad (24)$$

якщо у формулах (21), (22) вибираємо N_1, N_2 з умови

$$\left\| f\left(\frac{k}{m},y\right)-\tilde{f}_{N_2}\left(\frac{k}{m},y\right)\right\|_{C_{[-1,1]}}=O(\varepsilon^2),\quad k=\overline{1,m},$$

$$\left\| f\left(x,\frac{l}{n}\right)-\tilde{f}_{N_1}\left(x,\frac{l}{n}\right)\right\|_{C_{[-1,1]}}=O(\varepsilon^2),\quad l=\overline{1,n}.$$

Зауваження. Якщо $m=n$, то $N_1=N_2=n^2$. В цьому випадку формула (23) для досягнення потрібної точності буде використовувати значно меншу кількість значень функції f(x,y).

4.3. Обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних за допомогою біквадратичного сплайна

Теорема 5. Якщо

$$\left\| f(\cdot,y)-S_2 f(\cdot,y)\right\|_{C[-1,1]}=O(\varepsilon),\quad \left\| f(x,\cdot)-S_2 f(x,\cdot)\right\|_{C[-1,1]}=O(\varepsilon)$$

і для обчислення коефіцієнтів Фур'є C_{pq} використовувати формулу

$$C_{pq}\approx \overline{C}_{pq}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} S_{2,2}(x,y)e^{-ip\pi x}e^{-iq\pi y}dxdy,\quad p,q=1,\dots,R.$$

то $\left|C_{pq}-\overline{C}_{pq}\right|=O(\varepsilon)$.

4.4. Обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних за допомогою біквадратичного сплайна, побудованого на основі біквадратичного сплайн-інтерлінанта

Теорема 6. Якщо для обчислення коефіцієнтів Фур'є C_{pq} використовувати формулу, у якій функція $f(x,y)$ замінюється на біквадратичний сплайн (23), побудований на основі біквадратичного сплайн-інтерлінанта

$$C_{pq}\approx \overline{\overline{C}}_{pq}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \tilde{O}f(x,y)e^{-ip\pi x}e^{-iq\pi y}dxdy,\quad p,q=1,\dots,R,$$

і виконується співвідношення (24), то $\left|C_{pq}-\overline{C}_{pq}\right|=O(\varepsilon^2)$.

Безпосередні підрахунки показують, що для досягнення потрібної точності $O(\varepsilon^2)$, $(\varepsilon>0)$ при використанні $\overline{\overline{C}}_{pq}$, потрібно на порядок менше число значень функції $f(x_k,y_l)$, ніж при використанні $\overline{C}_{pq}$.

5. Висновки

1. У даній роботі запропоновано використовувати для побудови квадратичних сплайнів базисні квадратичні сплайни. При цьому їх побудова не вимагає дуже великих обсягів обчислювальної роботи.
2. Наявність базисних квадратичних сплайнів другого порядку по кожній змінній дозволяє легко побудувати сплайни від двох змінних.
3. Запис сплайнів двох змінних у вигляді лінійної комбінації базисних сплайнів від двох змінних дозволяє спростити задачу обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних, яка є задачею обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій.
4. Використовування при розв'язуванні цієї задачі методу Файлона і побудованого квадратичного сплайну двох змінних, дає можливість зменшити вплив осциляції при обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних.
5. Найбільш ефективно ця процедура виконується, якщо використовувати сплайн-інтерполяцію, побудовану на основі сплайн-інтерлінації з квадратичними базисними сплайнами. Вона для досягнення точності $O(\varepsilon^2)$ потребує значно меншого числа значень $f(x_k,y_l)$.

6. Література

[1] Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. –Харків. Основа. 2002. –544с.

[2] Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука, -1984. –350 с.

[3] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн функций. –М., Наука.-1980. –352с.

[4] Стечкин С.Б. Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. –М., Наука.-1976. –248с.

[5] Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В. Про сходимость интерполяционных параболических сплайнов // Мат. Моделирование. !995. т.7, №1. –С. 77-95.

[6] Крикова И.В., Литвин О.М. Построение семейства параболических сплайнов // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. / Ин-т математики НАНУ. Киев, 1995. –С. 137-139.

[7] Бабенко К.Е., Литвин О.М. Про чисельну реалізацію прямого методу Фур'є у комп'ютерній томографії // Доп. НАН України. –2003. -№ 11. –С. 7-12.