Обчислення коефіцієнтів Фур'є за даними Радона на основі формули Файлона

Олег М. Литвин, Віктор В. Міхалкін

Кафедра прикладної математики,
Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків, Україна
akadem@kharkov.ua, mikhalkin@yahoo.co.uk

Abstract

There's the description of the new method (at first time it has been proposed in [1]) of the solution of computer tomography (CT) flat task with linear radiation is given in this report. The initial information for the restoration of unknown substance distribution function is the set of linear integrals of the function. The general algorithm of the double integrals reduction to Filone type quadrature formula is proposed. It makes possible to find the integral of oscillatory factor accurately.

1. Вступ

Серед напрямків розвитку КТ (див. [2]) одним з перспективних вважається клас методів Фур'є (див. [3]) внаслідок можливості використання швидких інтегральних перетворень для зменшення об'єму обчислень. Саме цим обумовлена актуальність досліджень в КТ методів, що використовують для відновлення невідомої функції її коефіцієнти ряду Фур'є. На відміну від інших підходів до розв'язання цієї проблеми для нашого притаманим є слабкий вплив осцилюючого множника при обчисленні коефіцієнтів. Це досягається за рахунок побудови квадратурних формул, у яких інтеграли від експоненти можна точно обчислити заздалегідь.

2. Використання даних Радона для обчислення коефіцєнтів Фур'є

Коефіцієнти Фур'є $c_{k,\ell}$ $(k,\ell \in \mathbb{Z})$ для функції $f(x,y) \in C^{2,2}[I]$, $I=[0,1]^2$, точно знаходяться за формулою:

$$c_{k,\ell} = \iint\limits_I f(x,y)\, e^{-i2\pi(kx+\ell y)} dxdy. \tag{1}$$

Введемо позначення

$$\gamma(x) = \int\limits_0^1 f(x,y)\, dy.$$

Функція $\gamma(x)$ є проекційною функцією, що моделює проекційні дані (дані Радона), які поступають з комп'ютерного томографу.

Метод апроксимації $c_{k,\ell}$ полягає у заміні $\gamma(x)$ кусково-сталим сплайном $(p=\overline{0,M-1})$:

$$\gamma(x) \approx \tilde{\gamma}(x) = \sum_{p=0}^{M-1} \varphi_p(x)\,\gamma(z_p), \;\; z_p = \frac{x_p + x_{p+1}}{2}, \tag{2}$$

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} 1, x \in [x_p, x_{p+1}] \\ 0, x \notin [x_p, x_{p+1}] \end{cases}, \;\; x_p = \frac{p}{M}. \tag{3}$$

З (2) випливає, що заміна проекційної функції інтерполяційними сплайнами дає змогу наближенно знайти $c_{k,\ell}$, використовуючи скінчену множину значень $\gamma(x)$ — даних Радона.

3. Квадратурні формули для коефіцієнтів Фур'є

З урахуванням (2) формула (1) набуде вигляду

$$c_{k,\ell} \approx \tilde{c}_{k,\ell} = \int\limits_0^1 \left(\sum_{p=0}^{M-1} \varphi_p(x)\,\gamma(z_p) \right) e^{-i2\pi(kx+\ell y)} dx. \tag{4}$$

Нижче будемо розглядати окремі випадки (4) при різних значеннях k і ℓ.

3.1. Коефіцієнти $c_{k,0}$ $(k>0,\ \ell=0)$

Теорема 1. Для коефіцієнтів $c_{k,\ell}$ $(k \geqslant 0$ і $\ell = 0)$ справедливі наступні співвідношення:

$$c_{0,0} \approx \tilde{c}_{0,0} = \sum_{p=0}^{M-1} \gamma(z_p) \int\limits_{x_p}^{x_{p+1}} dx \tag{5}$$

$$\begin{aligned} c_{k,0} \approx \tilde{c}_{k,0} &= \int\limits_0^1 \left(\sum_{p=0}^{M-1} \varphi_p(x)\gamma(z_p) \right) e^{-i2\pi kx} dx \\ &= \sum_{p=0}^{M-1} \gamma(x_p) \int\limits_{x_p}^{x_{p+1}} e^{-i2\pi kx} dx. \end{aligned} \tag{6}$$

З (6) витікає, що осцилюючий множник можна проінтегрувати точно.

Теорема 2. Для похибки наближення $c_{k,\ell}$ $(k \geqslant 0$ і $\ell = 0)$ виконуються відповідно співвідношення:

$$\begin{aligned} |c_{0,0} - \tilde{c}_{0,0}| &= \left| \int\limits_0^1 (\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x))\, dx \right| \leqslant \int\limits_0^1 |(\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x))|\, dx \\ &\leqslant \|\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)\|_{C[0,1]} := \max_{x\in[0,1]} |\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)|, \end{aligned} \tag{7}$$

$$|c_{k,0}-\tilde{c}_{k,0}|=\left|\int\limits_0^1(\gamma(x)-\tilde{\gamma}(x))\,e^{-i2\pi kx}dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^1\left|(\gamma(x)-\tilde{\gamma}(x))\,e^{-i2\pi kx}\right|dx=\int\limits_0^1|\gamma(x)-\tilde{\gamma}(x)|dx \tag{8}$$
$$\leqslant\|\gamma(x)-\tilde{\gamma}(x)\|_{C[0,1]}.$$

3.2. Коефіцієнт $c_{0,\ell}$ $(\ell>0)$

Квадратурна формула для $c_{0,\ell}$ та її похибка будуть аналогічні результатам попереднього підпункту:

$$c_{0,\ell}\approx\tilde{c}_{0,\ell}=\int\limits_0^1\left(\sum_{p=0}^{M-1}\varphi_p(y)\gamma(z_p)\right)e^{-i2\pi\ell y}dy$$
$$=\sum_{p=0}^{M-1}\gamma(z_p)\int\limits_{y_p}^{y_{p+1}}e^{-i2\pi\ell y}dy, \tag{9}$$

$$|c_{0,\ell}-\tilde{c}_{0,\ell}|=\left|\int\limits_0^1(\gamma(y)-\tilde{\gamma}(y))\,e^{-i2\pi\ell y}dy\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^1\left|(\gamma(y)-\tilde{\gamma}(y))\,e^{-i2\pi\ell y}\right|dy=\int\limits_0^1|\gamma(y)-\tilde{\gamma}(y)|\,dy$$
$$\leqslant\|\gamma(y)-\tilde{\gamma}(y)\|_{C[0,1]}.$$

Тут використані позначення:

$$\gamma(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx,\ y_p=\frac{p}{M},\ z_p=\frac{y_p+y_{p+1}}{2}.$$

3.3. Коефіцієнт $c_{k,\ell}$ $(k,\ell>0)$

Множина прямих

$$kx+\ell y=0, kx+\ell y=k,$$
$$kx+\ell y=\ell, kx+\ell y=k+\ell$$

розбиває область I на три підобласті. Тоді вираз для $c_{k,\ell}$ можна переписати так:

$$c_{k,\ell}=\iint\limits_I f(x,y)\,e^{-i2\pi(kx+\ell y)}dxdy=J_1+J_2+J_3, \tag{10}$$

де

$$J_1=\int\limits_0^1\int\limits_0^{(k-kx)/\ell}f(x,y)\,e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy$$
$$=\int\limits_0^1\gamma_1(x)\,e^{-i2\pi(kx+ly)}dx$$

$$J_2=\int\limits_0^1\int\limits_{(k-kx)/\ell}^{(\ell-kx)/\ell}f(x,y)\,e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy$$
$$=\int\limits_0^1\gamma_2(x)\,e^{-i2\pi(kx+ly)}dx,$$

$$J_3=\int\limits_0^1\int\limits_{(\ell-kx)/\ell}^1 f(x,y)\,e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy$$
$$=\int\limits_0^1\gamma_3(x)\,e^{-i2\pi(kx+ly)}dx$$

мають відповідні проекційні функції

$$\gamma_1(x)=\int\limits_0^{(k-kx)/\ell}f(x,y)\,dy,\gamma_2(x)=\int\limits_{(k-kx)/\ell}^{(\ell-kx)/\ell}f(x,y)\,dy,$$

$$\gamma_3(x)=\int\limits_{(\ell-kx)/\ell}^1 f(x,y)\,dy.$$

Скориставшись підстановками

$$\begin{cases}kx+\ell y=(k+\ell)\,\xi\\ -lx+ky=\eta\end{cases}, \tag{11}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{k(k+l)\,\xi-l\eta}{k^2+l^2}\\ y=\dfrac{\ell(k+l)\,\xi+k\eta}{k^2+l^2}\end{cases},\ 0\leqslant\xi\leqslant1, \tag{12}$$

перепишемо вирази для інтегралів J_1, J_2, J_3 $(f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))=f(\cdot))$:

$$J_1=|D|\int\limits_0^{k/(k+\ell)}\int\limits_{-\ell(k+\ell)\xi/k}^{k(k+\ell)\xi/\ell}f(\cdot)e^{-i2\pi(k+l)\xi}d\xi d\eta$$
$$=\left\{\bar{\gamma}_1(\xi)=\int\limits_{-\ell(k+\ell)\xi/k}^{k(k+\ell)\xi/\ell}f(\cdot)d\eta\right\} \tag{13}$$
$$=|D|\int\limits_0^{k/(k+\ell)}\bar{\gamma}_1(\xi)\,e^{-i2\pi(k+\ell)\xi}d\xi,$$

$$J_2=|D|\int\limits_{k/(k+\ell)}^{\ell/(k+\ell)}\int\limits_{\left(k(k+\ell)\xi-k^2-\ell^2\right)/\ell}^{k(k+\ell)\xi/\ell}f(\cdot)e^{-i2\pi(k+l)\xi}d\xi d\eta$$
$$=\left\{\bar{\gamma}_2(\xi)=\int\limits_{\left(k(k+\ell)\xi-k^2-\ell^2\right)/\ell}^{k(k+\ell)\xi/\ell}f(\cdot)\,d\eta\right\}$$
$$=|D|\int\limits_{k/(k+\ell)}^{\ell/(k+\ell)}\bar{\gamma}_2(\xi)\,e^{-i2\pi(k+\ell)\xi}d\xi, \tag{14}$$

$$J_3 = |D| \int\limits_{\ell/(k+\ell)}^{1} \int\limits_{\left(k(k+\ell)\xi - k^2 - \ell^2\right)/\ell}^{\left(k^2+\ell^2-\ell(k+\ell)\xi\right)/k} f(\cdot) e^{-i2\pi(k+l)\xi} d\xi d\eta$$

$$= \left\{ \bar{\gamma}_3(\xi) = \int\limits_{\left(k(k+\ell)\xi - k^2 - \ell^2\right)/\ell}^{\left(k^2+\ell^2-\ell(k+\ell)\xi\right)/k} f(\cdot)\, d\eta \right\}$$

$$= |D| \int\limits_{\ell/(k+\ell)}^{1} \bar{\gamma}_3(\xi) e^{-i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi, \tag{15}$$

де $|D| = \frac{k+\ell}{k^2+\ell^2}$ є модулем якобіана.

За аналогією до (6) побудуємо наступні формули наближення для J_1, I_2, J_3 ($J_1 \approx \tilde{J}_1$, $J_2 \approx \tilde{J}_2$, $J_3 \approx \tilde{J}_3$):

$$\tilde{J}_1 = |D| \int\limits_{0}^{k/(k+\ell)} \left(\sum_{p=0}^{M-1} \varphi_p(\xi) \bar{\gamma}_1\left(z_p^{(1)}\right) \right) e^{-i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi$$

$$= |D| \sum_{p=0}^{M-1} \bar{\gamma}_1\left(z_p^{(1)}\right) \int\limits_{\xi_p^{(1)}}^{\xi_{p+1}^{(1)}} e^{-i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi, \tag{16}$$

$$\tilde{J}_2 = |D| \int\limits_{k/(k+\ell)}^{\ell/(k+\ell)} \left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{M|\ell-k|}{k}\right]} \varphi_p(\xi) \bar{\gamma}_2\left(z_p^{(2)}\right) \right) e^{-i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi$$

$$= |D| \sum_{p=0}^{M-1} \bar{\gamma}_2\left(z_p^{(2)}\right) \int\limits_{\xi_p^{(2)}}^{\xi_{p+1}^{(2)}} e^{-i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi, \tag{17}$$

$$\tilde{J}_3 = |D| \int\limits_{\ell/(k+\ell)}^{1} \left(\sum_{p=0}^{M-1} \varphi_p(\xi) \bar{\gamma}_3\left(z_p^{(3)}\right) \right) e^{-i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi$$

$$= |D| \sum_{p=0}^{M-1} \bar{\gamma}_3\left(z_p^{(3)}\right) \int\limits_{\xi_p^{(3)}}^{\xi_{p+1}^{(3)}} e^{-i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi, \tag{18}$$

де

$$\xi_p^{(1)} = \frac{k}{(k+\ell)M} p, \ \xi_p^{(2)} = \frac{k}{k+\ell} + \frac{\ell-k}{(k+\ell)M} p, \quad \xi_p^{(3)} = \frac{\ell}{k+\ell} + \frac{k}{(k+\ell)M} p, \tag{19}$$

$$z_p^{(1)} = \frac{\xi_p^{(1)} + \xi_{p+1}^{(1)}}{2}, \ z_p^{(2)} = \frac{\xi_p^{(2)} + \xi_{p+1}^{(2)}}{2}, \quad z_p^{(3)} = \frac{\xi_p^{(3)} + \xi_{p+1}^{(3)}}{2}. \tag{20}$$

Тоді остаточно наближення для $c_{k,l}$ набуде вигляду

$$c_{k,\ell} \approx \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 + \tilde{J}_3. \tag{21}$$

Похибку наближення для кожного з інтегралів J_1, J_2, J_3 можна оцінити таким же чином, як це зроблено для коефіцієнтів $c_{k,\ell}$, коли $k = \ell = 0$ і $k > 0, \ell = 0$.

3.4. Коефіцієнт $c_{k,\ell}$ ($k > 0, \ell < 0$)

Тут формули наближення та оцінка його похибки одержуються аналогічно до попередніх підпунктів.

При $k > 0$, $\ell < 0$ дістанемо з (1)

$$c_{k,\ell} = \iint\limits_{I} f(x,y) e^{-i2\pi(kx-\ell y)} dxdy. \tag{22}$$

В (22) враховано, що $\ell < 0$, тому будемо вважати далі номер ℓ додатнім.

Множина прямих

$$kx - \ell y = 0, \qquad kx - ly = -\ell,$$
$$kx - \ell y = k - \ell, \ kx - \ell y = k$$

розбиває область I на три підобласті. Тоді як і в (10)

$$c_{k,-\ell} = J_1 + J_2 + J_3, \tag{23}$$

де

$$J_1 = |D| \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{kx/\ell} f(\cdot) e^{-i2\pi(kx-\ell y)} dxdy$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \bar{\bar{\gamma}}_1(x) e^{-i2\pi(kx+\ell y)} dx,$$

$$J_2 = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{kx/\ell}^{kx/\ell-(k-\ell)/\ell} f(\cdot) e^{-i2\pi(kx-\ell y)} dxdy$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \bar{\bar{\gamma}}_2(x) e^{-i2\pi(kx-\ell y)} dx,$$

$$J_3 = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{kx/\ell-(k-\ell)/\ell}^{1} f(\cdot) e^{-i2\pi(kx-\ell y)} dxdy$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \bar{\bar{\gamma}}_3(x) e^{-i2\pi(kx-\ell y)} dx$$

мають такі проекційні функції

$$\bar{\bar{\gamma}}_1(x) = \int\limits_{0}^{kx/\ell} f(x,y)\, dy, \bar{\bar{\gamma}}_2(x) = \int\limits_{kx/\ell}^{kx/\ell-(k-\ell)/\ell} f(x,y)\, dy,$$

$$\bar{\bar{\gamma}}_3(x) = \int\limits_{kx/\ell-(k-\ell)/\ell}^{1} f(x,y)\, dy.$$

Перейдемо до нової системи координат (ξ, η) і одержимо підстановки:

$$\begin{cases} kx - \ell y = k - (k+\ell)\xi \\ kx - ly = \eta \end{cases}, \tag{24}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{k^2 - \left(k^2 + k\ell\right)\xi + \ell\eta}{k^2 + \ell^2} \\ y = \dfrac{\left(k\ell + \ell^2\right)\xi + k\eta - k\ell}{k^2 + \ell^2}. \end{cases} \tag{25}$$

Тоді

$$\begin{aligned} J_1 &= |D| \int\limits_0^{k/(k+\ell)} \int\limits_{\left(k(k+\ell)+\ell^2\right)/\ell}^{\ell(k-(k+\ell)\xi)/k} f(\cdot) e^{i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi d\eta \\ &= \left\{ \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_1(\xi) = \int\limits_{\left(k(k+\ell)+\ell^2\right)/\ell}^{\ell(k-(k+\ell)\xi)/k} f(\cdot) d\eta \right\} \\ &= |D| \int\limits_0^{k/(k+\ell)} \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_1(\xi) e^{i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= |D| \int\limits_{k/(k+\ell)}^{\ell/(k+\ell)} \int\limits_{\left(k(k+\ell)+\ell^2\right)/\ell}^{k((k+\ell)\xi-k)/\ell} f(\cdot) e^{i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi d\eta \\ &= \left\{ \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_2(\xi) = \int\limits_{\left(k(k+\ell)+\ell^2\right)/\ell}^{k((k+\ell)\xi-k)/\ell} f(\cdot) d\eta \right\} \\ &= |D| \int\limits_{k/(k+\ell)}^{\ell/(k+\ell)} \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_2(\xi) e^{i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} J_3 &= |D| \int\limits_{\ell/(k+\ell)}^{1} \int\limits_{\left(k^2+\ell^2+k\ell-\ell(k+\ell)\xi\right)/k}^{k((k+\ell)\xi-k)/\ell} f(\cdot) e^{i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi d\eta \\ &= \left\{ \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_3(\xi) = \int\limits_{\left(k^2+\ell^2+k\ell-\ell(k+\ell)\xi\right)/k}^{k((k+\ell)\xi-k)/\ell} f(\cdot) d\eta \right\} \\ &= |D| \int\limits_{\ell/(k+\ell)}^{1} \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_3(\xi) e^{i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi, \ |D| = \frac{k+\ell}{k^2+\ell^2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Знайдемо наближено J_1, I_2, J_3.

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1 &= |D| \int\limits_0^{k/(k+\ell)} \left(\sum_{p=0}^{M-1} \varphi_p(\xi) \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_1\left(z_p^{(1)}\right) \right) e^{i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi \\ &= |D| \sum_{p=0}^{M-1} \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_1\left(z_p^{(1)}\right) \int\limits_{\xi_p^{(1)}}^{\xi_{p+1}^{(1)}} e^{i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_2 &= |D| \int\limits_{k/(k+\ell)}^{\ell/(k+\ell)} \left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{M|\ell-k|}{k}\right]} \varphi_p(\xi) \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_2\left(z_p^{(2)}\right) \right) e^{i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi \\ &= |D| \sum_{p=0}^{M-1} \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_2\left(z_p^{(2)}\right) \int\limits_{\xi_p^{(2)}}^{\xi_{p+1}^{(2)}} e^{i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_3 &= |D| \int\limits_{\ell/(k+\ell)}^{1} \left(\sum_{p=0}^{M-1} \varphi_p(\xi) \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_3\left(z_p^{(3)}\right) \right) e^{i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi \\ &= |D| \sum_{p=0}^{M-1} \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_3\left(z_p^{(3)}\right) \int\limits_{\xi_p^{(3)}}^{\xi_{p+1}^{(3)}} e^{i2\pi(k+\ell)\xi} d\xi, \end{aligned} \tag{31}$$

де величини $\xi_p^{(j)}$, $\xi_{p+1}^{(j)}$, $z_p^{(j)}$ $(j = \overline{1,3})$ визначаються за формулами (19)–(20).

4. Зауваження

Зробимо наступні зауваження:

1. Коефіцієнти Фур'є $c_{-k,-\ell}$ й $c_{-k,\ell}$ обчислювати не треба внаслідок рівностей
$$c_{-k,-\ell} = \bar{c}_{k,\ell}, \ \ c_{-k,\ell} = \bar{c}_{k,-\ell}.$$
2. Підстановки (12)–(12) та (24)–(25) зводять обчислення коефіцієнтів $c_{k,\ell}$, $c_{k,-\ell}$ до трикратного використання процедури обчислення $c_{k,0}$ з точністю до сталих.

5. Висновки

Таким чином, у праці запропоновано однотипний алгоритм обчислення коефіцієнтів Фур'є за допомогою даних Радона, у якому точно інтегрується осцилюючий множник. Далі результати планується використати при створенні математичного забезпечення для діючих комп'ютерних томографів.

6. References

[1] Литвин О.М., Міхалкін В.В. Обчислення коефіцієнтів Фур'є на основі формули Файлона з використанням даних Радона. Матеріали X Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука, Київ, 2004, стор. 435.

[2] Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. Под ред. В.П. Паламодова. М.: Мир, 1990.

[3] Gottlieb D., Gustafsson B. On the Direct Fourier Method for Computer Tomography. Technical report, Brown University and Uppsala University, March, 1998.