Відновлення структури 3D об'єкту на основі томограм в трьох системах взаємно-перпендикулярних площин та мішаної апроксимації поліномами Бернштейна

Олег М. Литвин, Юрій Ващук

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків 61003, Україна
academ@kharkov.ua yvaschuk@mail.ru

Анотація

Досліджується відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкту за допомогою операторів мішаної апроксимації функцій поліномами Бернштейна від 3-х змінних на основі двовимірних томограм, зроблених у системі трьох взаємно-перпендикулярних площин. Використання цього методу відновлення дозволяє підвищити точність зображення та надає можливість відновлювати структуру 3D об'єкту в площинах, що не належать вказаній системі площин.

1. Вступ

1.1. Постановка задачі

Задано три сімейства томограм, отриманих перерізами тіла трьома взаємно-перпендикулярними множинами площин (паралельними координатним площинам). Треба відновити внутрішню структуру тіла в точках, що не належать заданим площинам.

1.2. Означення інтерлінації та інтерфлетації

Оператори, які відновлюють або наближують функції $n(n \geq 2)$ змінних по їхнім слідам до заданого порядку N на $M(M>1)$ m-вимірних $(0 \leq m < n)$ поверхнях в R^n, у випадку $m=0$ (інтерполяційні оператори) розглядаються у дослідженнях багатьох авторів. [3], [1]

У випадку, коли $m=1$ оператори відновлення або наближення називаються інтерлінаційними (від англ. *interlination*: *inter* – між, *line* - лінія). Використовуються для наближення функції за допомогою інформації про неї, заданої на сім'ї ліній. Ці оператори можуть більш ширше застосовуватися в автоматизації проектування корпусів літаків, суден, автомобілів, для оброблення результатів гідро- та радіо локації, при розв'язанні задач комп'ютерної томографії, в цифровій обробці сигналів тощо. [4]

У випадку, коли $m \geq 2$ та $n \geq 3$ оператори відновлення або наближення називаються інтерфлетаційними (від англ. *interflation*: *inter* – між, *flat* – плоска поверхня). Виконується наближення функції за допомогою інформації про неї, заданої на сім'ї поверхонь. [4]

Вперше розглядається використання операторів мішаної апроксимації функцій при вирішенні проблеми відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкту. Наведено приклад можливого використання операторів мішаної апроксимації функцій та більш докладно розглянуто розв'язання радонівської задачі комп'ютерної томографії з використанням операторів мішаної апроксимації функцій поліномами Бернштейна від 3-х змінних.

2. Деякі приклади використання інтерлінації

2.1. Відновлення рельєфу для океану за даними гідролокації

Відтворення поверхні дна моря за даними гідролокації – типова задача інтерлінації функції двох змінних по її слідах на декількох лініях. [5]

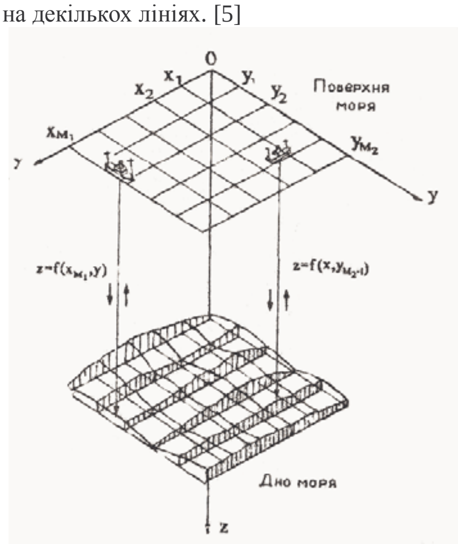

Рис. 1 Схема гідролокації

При побудові рівняння рельєфу дна моря $z = f(x, y)$ де x, y – координати змінної точки поверхні моря, z - відстань від поверхні моря до дна у точці (x, y) використовуються сліди

$$\varphi_k(x, y)\big|_{\Gamma_k} = f(x, y)\big|_{\Gamma_k} \tag{1}$$

функції $f(x, y)$ (результати гідролокації) на $M(M \geq 2)$ лініях $\Gamma_k\left(k = \overline{1, M}\right)$ (курси кораблів з гідролокаторами). За вказаними лініями і функціями $\varphi_k(x, y)$ будується функція $f(x, y)$ на основі формул кусково-поліноміальної інтерлінації.

2.2. Відновлення рельєфу поверхні космічного тіла за даними радіолокації

Задача відновлення поверхні тіла по результатам радіолокації використовується в астрономії та у оборонній промисловості. [2]

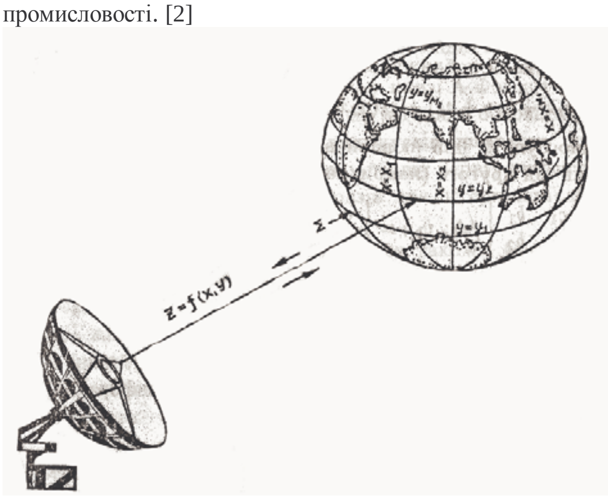

Рис. 2 Радіолокаційна схема

При використанні радіолокаційних методів слід враховувати що промінь радіолокатора, який рухається вздовж системи ліній Γ_k, $k=\overline{1,M}$ відбивається від об'єкта. Це дозволяє обчислити віддаль $z=f(x,y)$ до точки відбиття, де x, y - координати відбиваючої точки поверхні, z - відстань від радіолокатора до точки поверхні (x,y).

При практичному використанні, обробка результатів повинна проходити досить швидко і потребує розвиненого математичного апарату у якому також можливо використовувати інтерлінацію. [5]

3. Оператори класичної апроксимації функцій 3-х змінних за допомогою поліномів Бернштейна

Наведені вище приклади дозволяють відновлювати функції $f(x,y)$ двох змінних. Якщо ж нам треба відновити функцію 3-х змінних $f(x,y,z)$ за допомогою її слідів на системі площин, то потрібно використовувати оператори інтерфлетації.

Припустимо що нам задано три системи томограм у взаємно-перпендикулярних площинах отриманих з комп'ютерного томографа. Не зменшуючи загальності вважаємо, що ці три групи площин паралельні координатним площинам. Тобто припустимо що нам задані три системи функцій від двох змінних.

$$\varphi_{j,k_j}(x)=f(x)\big|_{x_j=k_j/m_j},\ k_j=\overline{0,m_j},\ j=1,2,3 \qquad (2)$$

означимо $x=(x_1,x_2,x_3)$, $f(x)$ - щільність тіла в точці x.

<u>Означення 1</u>. Поліномами Бернштейна (або операторами Бернштейна степеня n для функції $g(t)\in C[0,1]$ однієї змінної є

$$p_n g(t)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right), \qquad (3)$$

де $C_n^k=\dfrac{n!}{k!-(n-k)!}$.

Для кожної неперервної функції $g(x)\in C[0,1]$ і довільного числа $r>0$ знайдеться таке натуральне число n, що $\left|g(x)-P_n g(x)\right|\le r$ та $\forall t\in[0,1]$.

Зауважимо що формулювання цього твердження для довільного відрізку $t\in[a,b]$ проводиться з використанням заміни $t=a+x(b-a)$, тобто замість функції $f(t)$, $t\in[a,b]$ достатньо розглянути функцію $g(x)=f(a+x(b-a))$, $x\in[0,1]$.

<u>Твердження 1.</u> Поліноми Бернштейна рівномірно збігаються до кожної неперервної функції на $[a,b]$. Якщо функція $g(t)$ обмежена в точці c, $a<c<b$ і має розрив першого роду в цій точці, то

$$\lim_{x\to c} P_n g(t)=\frac{g(c-0)+g(c+0)}{2},\ n\to\infty.$$

Якщо функція $g(t)$ двічі диференційована в точці $c\in[a,b]$, то

$$p_n g(c)-g(c)=\frac{g''(c)(c-a)(b-c)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

<u>Означення 2</u>. Класичне узагальнення поліномів Бернштейна для випадок функцій $f(x,y)$, $(x,y)\in[0,1]^2$ двох змінних має такий вигляд:

$$p_{m,n} f(x,y)=p_{m,x} p_{n,y} f(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} C_m^k C_n^l x^k \times$$

$$\times(1-x)^{m-k} y^l (1-y)^{n-l} f\left(\frac{k}{m},\frac{l}{n}\right),$$ де введені позначення

$$p_{m,x} f(x,y)=\sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k (1-x)^{m-k} f\left(\frac{k}{m},y\right),$$

$$p_{n,y} f(x,y)=\sum_{l=0}^{n} C_n^l y^l (1-y)^{n-l} f\left(x,\frac{l}{n}\right),$$ тобто

оператор $p_{m,x}$ діє на зміну x, а оператор $p_{n,y}$ - на y.

Зауважимо що ці оператори $p_{m,n} f$ використовують

$(m+1)(n+1)$ значень функції $f\left(\frac{k}{m},\frac{l}{n}\right)$, але $p_{m,n} f\left(\frac{k}{m},\frac{l}{n}\right) \neq f\left(\frac{k}{m},\frac{l}{n}\right)$, $k=\overline{0,m}$, $l=\overline{0,n}$.

Введемо до розгляду оператори Бернштейна $P_{1,m_1} f(x)$, $P_{2,m_2} f(x)$, $P_{3,m_3} f(x)$, за однією змінною x_1, x_2, x_3 відповідно до формули (3):

$$P_{j,m_j} f(x)=\sum_{k_j=0}^{m_j} C_{m_j}^{k_j} x_j^{k_j} (1-x_j)^{m_j-k_j} \varphi_{j,k_j}(x),$$

де $\varphi_{j,k_j}(x)=f(x)\Big|_{x_j=k_j/m_j}$.

Означення 3. Класичне узагальнення поліномів Бернштейна на випадок функцій трьох змінних $f(x)$, $x=(x_1,x_2,x_3)$ має такий вигляд

$$P_m f(x)=P_{1,m_1} P_{2,m_2} P_{3,m_3} f(x).$$

4. Оператори мішаної апроксимації функцій 3-х змінних за допомогою поліномів Бернштейна

Означення 4. Операторами мішаної апроксимації Бернштейна називаються ,

$$O_m f(x)=\left(P_{1,m_1}+P_{2,m_2}+P_{3,m_3}-P_{1,m_1}P_{2,m_2}-\right.$$
$$\left.-P_{1,m_1}P_{3,m_3}-P_{2,m_2}P_{3,m_3}+P_{1,m_1}P_{2,m_2}P_{3,m_3}\right) f(x),$$

$m=(m_1,m_2,m_3)$.

Теорема 1. Хай $R_{j,m_j} f(x)=\left(I-P_{j,m_j}\right) f(x)$ де $j=\overline{1,3}$ - похибки наближення функції операторами $P_{j,m_j} f(x)$. Тоді похибка $R_m f(x)=(I-O_m) f(x)$ наближення $f(x)$ оператором $O_m f(x)$ визначається співвідношенням $Rf(x)=R_{1,m_1} R_{2,m_2} R_{3,m_3} f(x)$

Теорема 2. Оператор $O_m f(x), m=(m_1,m_2,m_3)$ мішаної апроксимації:

$$O_m f(x)=\left(P_{1,m_1}+P_{2,m_2}+P_{3,m_3}-P_{1,m_1}P_{2,m_2}-\right.$$
$$\left.-P_{1,m_1}P_{3,m_3}-P_{2,m_2}P_{3,m_3}+P_{1,m_1}P_{2,m_2}P_{3,m_3}\right) f(x) \qquad (4)$$

побудований за допомогою вказаної системи томограм наближує кожну функцію $f(x) \in C^{2,2,2}(I^3)$, $I=[0,1]$ з похибкою $\|f-O_m f\|=O\left((m_1 m_2 m_3)^{-1}\right)$.

5. Приклад відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкту на основі двовимірних томограм у паралельних площинах

Для відновлення тривимірної моделі голови людини при використанні техніки візуалізації *isosurface* у праці Андерса Бекмена [6] було використано 167 томограм зроблених у площинах паралельних одній площині (рис.3) з роздільною здатністю 256×256 пікселів.

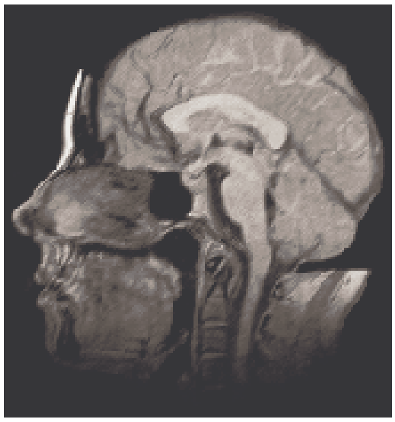

Рис.3 Одна з 167 томограм використаних А.Бекменом

Отже теоретично при використанні оператора $O_m f(x)$ для відновлення внутрішньої структури тіла з тією ж якістю достатньо меншої кількості томограм зроблених у системі трьох взаємно-перпендикулярних площин.

Рис.4 Поверхнева модель відновлена

технікою візуалізації *isosurface*

Цей приклад демонструє високу точність відновлення внутрішньої структури і поверхні тривимірного тіла. Основним недоліком цього методу є те, що він використовує тільки зрізи в площинах паралельних одній площині.

Якщо ж інформація про внутрішню структуру 3D тіла задана 3-х взаємно-перпендикулярних системах площин, то техніка візуалізації *isosurface* не зможе їх використати.

6. Тестовий приклад відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкту на основі двовимірних томограм у взаємно-перпендикулярних площинах

Авторами створено комплекс програм для обчислення операторів $O_m f(x)$, тестування яких було проведено на функціях $f(x,y,z)$ вигляду (5), де $h_1(x,y)$, $h_2(x,z)$, $h_3(y,z)$ - задані функції 2-х змінних.

Приклад. Треба відновити функцію

$$f(x,y,z)=h_1(x,y)+h_2(x,z)+h_3(y,z) \qquad (5)$$

за допомогою $3\times 5=15$ томограм зробленим у трьох взаємно-перпендикулярних площинах (по 5 томограм на кожну площину).

Згідно із розділом *3* та при використанні 15 томограм (по 5 в кожній площині) поліноми (3) будуть мати вигляд:

$$P_{1,5} f(x,y,z)=\sum_{i=0}^{5} C_5^i x^i (1-x)^{5-i} f\left(\frac{i}{5},y,z\right)$$

$$P_{2,5} f(x,y,z)=\sum_{j=0}^{5} C_5^j x^j (1-y)^{5-j} f\left(x,\frac{j}{5},z\right)$$

$$P_{3,5} f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{5} C_5^k x^k (1-z)^{5-k} f\left(x,y,\frac{k}{5}\right)$$

$$P_{1,5}P_{2,5} f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} C_5^i C_5^j x^i (1-x)^{5-i}\times$$

$$\times y^j (1-y)^{5-j} f\left(\frac{i}{5},\frac{j}{5},z\right)$$

$$P_{1,5}P_{3,5} f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{5}\sum_{k=1}^{5} C_5^i C_5^k x^i (1-x)^{5-i}\times$$

$$\times z^k (1-z)^{5-k} f\left(\frac{i}{5},y,\frac{k}{5}\right)$$

$$P_{2,5}P_{3,5} f(x,y,z)=\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5} C_5^j C_5^k y^j (1-y)^{5-j}\times$$

$$\times z^k (1-z)^{5-k} f\left(x,\frac{j}{5},\frac{k}{5}\right)$$

$$P_{1,5}P_{2,5}P_{3,5}(x,y,z)=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5} C_5^i \tilde{N}_5^j C_5^k\times$$

$$\times x^i (1-x)^{5-i} y^j (1-y)^{5-j} z^k (1-z)^{5-k} f\left(\frac{i}{5},\frac{j}{5},\frac{k}{5}\right)$$

Згідно із описаними поліномами оператор мішаної апроксимації (4) буде мати вигляд:

$$O_{5,5,5} f(x,y,z)=P_{1,5} f(x,y,z)+P_{2,5} f(x,y,z)+$$

$$+P_{3,5} f(x,y,z)-P_{1,5}P_{2,5} f(x,y,z)-$$

$$-P_{1,5}P_{3,5} f(x,y,z)-P_{2,5}P_{3,5} f(x,y,z)+$$

$$+P_{1,5}P_{2,5}P_{3,5} f(x,y,z)$$

7. Висновки

Задача відновлення структури тривимірного об'єкту операторами мішаної апроксимації поліномами Бернштейна від трьох змінних $O_m f(x)$ в площині, яка не належить системі площин в котрій зроблені томограми виникає, зокрема при експлуатації медичних томографів, коли лікар для уточнення діагнозу хотів би мати інформацію про внутрішню структуру тіла в площинах, що не досліджувалися раніше.

Автори вважають що після створення відповідного програмного забезпечення, узгодженого із програмним забезпеченням на діючих комп'ютерних томографах, викладені вищі твердження можуть бути використані в медичній практиці, а також при неінвазійному контролю.

8. Література

1. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов.-М.: Наука, 1978.-400 с.-библ.: 410.
2. Курикша А.А., Панов С.Л. "Анализ условий получения радиолокационных изображений искусственных спутников Земли", "Вопросы радиоэлектроники", серия РЛТ, вып. 2, 2001 г.
3. Уолш Дж.Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Перев. с англ.М.: ИЛ, 1961.-508 с.
4. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування.-Х.: Основа, 2002.-544с.
5. Литвин О.М. Інтерлінація функцій.-Х.: Основа, 1992.-236 с.
6. Anders Backman. Visualisation of Positron Emission Tomography (PET) scan data. A Master thesis. Department of Computing Science – Umeå University, Sweden, Aug 1998.-37p.