ІТЕРАЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ КРИВОЇ БЕЗЬЄ ПО ЗАДАНИХ ТОЧКАХ

В.В. Вишневський, Т.М. Романенко

Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, м. Київ,
e-mail: vit@immsp.kiev.ua; romanenko@immsp.kiev.ua

Abstract

The Bezier curves appears the fundamental basis of many applications for computer graphics. Intuitively clear geometrical interpretation of the Bezier curves allows to assume that they can be effectively used in the tasks of pattern recognition. One of such tasks can be binary raster images perception. In this case the use of the Bezier curves guarantees the invariance of algorithms of recognition to affine transformations.

However much the wide use of the Bezier curves in the tasks of pattern recognition restrains by complication of computational algorithms of approximation of experimental data by parametric splines which the Bezier curves are. The iteration algorithm of middle calculable complication, which enables to approximate the areas of contour of binary image or other experimental data described to the smooth curve with one or two extremums, is expounded in the represented publication.

1. Введення

Відомо, що криві Безьє є фундаментальною основою практично всіх комп'ютерних додатків для комп'ютерної графіки. Так, наприклад, для CAD/CAM/CAE систем вищого і середнього рівня, а також для комерційних, внутрішніх виробничих додатків і додатків для обміну даними промисловим стандартом стає геометричне ядро Parasolid компанії Unigraphics Solutions Inc., в основу якого, у свою чергу, покладена теорія неоднорідних раціональних В-сплайнів (NURBS) і кривих Безьє [1] .

Інтуїтивно зрозуміла геометрична інтерпретація кривих Безьє дозволяє зробити припущення, що вони можуть бути ефективно використані і в задачах розпізнавання образів. Однією з таких задач може бути розпізнавання бінарних растрових зображень. Для цієї задачі використання кривих Безьє може забезпечити інваріантність алгоритмів розпізнавання до афінних перетворень. Проте широке використання кривих Безьє в задачах розпізнавання образів стримується складністю обчислювальних алгоритмів апроксимації експериментальних даних параметричними сплайнами, до яких саме й відносяться криві Безьє.

У даній публікації описується ітераційний алгоритм середньої обчислювальної складності, що дозволяє апроксимувати ділянки контуру бінарного зображення або інші експериментальні дані, які можуть бути описані гладкою кривою з одним або двома екстремумами.

2. Математична постановка задачі

Хай є впорядкована послідовність різних точок на площині $P_i = (x(P_i), y(P_i))$, $0 \le i \le N+1$, що містить, принаймні, чотири точки. Треба провести криву Безьє так, аби вона проходила через дві крайні точки P_0, P_{N+1} і розташовувалася якомога ближче до проміжних точок P_i, $1 \le i \le N$.

Під кривою Безьє розуміється дуга плоскої кривої третього порядку $Bz(t) = (Bx(t), By(t))$, $0 \le t \le 1$, що задана у такому параметричному вигляді:

$$Bx(t) = \sum_{j=0}^{3} Ber_j(t) \cdot x(Q_j),$$

$$By(t) = \sum_{j=0}^{3} Ber_j(t) \cdot y(Q_j) \qquad (1)$$

де $Ber_j(t)$ – базові скалярні поліноми Бернштейна третього степеня, $Q_j = (x(Q_j), y(Q_j))$ – коефіцієнти кривої, а параметр t змінюється в одиничному інтервалі [0,1]. Поліноми Бернштейна визначаються таким чином:

$$Ber_j(t) = C_3^j \cdot (1-t)^{3-j} t^j = \frac{3!}{j!(3-j)!} \cdot (1-t)^{3-j} t^j,$$

$$0 \le j \le 3, \qquad (2)$$

де C_3^j, $0 \le j \le 3$, - біноміальні коефіцієнти.

Крива Безьє задається у параметричному вигляді, оскільки у загальному випадку геометричні контури не можуть бути описані у вигляді однозначної функції $y=f(x)$. У цьому й полягає одна зі складностей безпосереднього використання класичних чисельних методів поліноміальної апроксимації [2].

Зазначимо, що коефіцієнти кривої Безьє Q_0 і Q_3 визначають крайні точки, через які проходить крива:

$$Bz(0) = (Bx(0), By(0)) = Q_0,$$
$$Bz(1) = (Bx(1), By(1)) = Q_3. \qquad (3)$$

Коефіцієнти Q_1 і Q_2 визначають величини дотичних у крайніх точках («вуса» кривої).

Як міра відхилення кривої від заданих точок використовується квадратична функція нев'язки:

$$f(Q,U) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left[(Bx(t_i) - x(P_i))^2 + (By(t_i) - y(P_i))^2 \right]. \qquad (4)$$

Тут сумуються квадрати евклідових відстаней між точками $Bz(t_i) = (Bx(t_i), By(t_i))$ і $P_i = (x(P_i), y(P_i))$. Вектор коефіцієнтів кривої $Q = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ і параметричний вектор $U = (t_1, \ldots t_N)$, де всі t_i належать одиничному інтервалу [0,1], є аргументами цієї функції. Кожну точку $Bz(t_i)$ можна розглядати як «представника» на кривій Безьє, який відповідає початковій точці P_i, тому функцію нев'язки потрібно мінімізувати як по Q, так і по U.

Оскільки функція нев'язки нелінійно залежить від параметричного вектора, то в цілому цю задачу можна розглядати як нелінійну проблему найменших квадратів і розв'язувати її відомими чисельними методами [3, гл. 10]. Але реалізація цих методів може вимагати в даному випадку дуже великого об'єму обчислень, оскільки доведеться обчислювати багатовимірні якобіани і гессіани. Тому, враховуючи можливу розмірність задачі (від декількох десятків до сотень точок), був розроблений інший метод рішення.

Авторами пропонується розбити задачу на декілька підзадач. Спочатку можна розв'язати лінійну задачу найменших квадратів і провести мінімізацію цільової функції по першому аргументу Q при фіксованому значенні другого аргументу U, а потім, навпаки, зафіксувати Q і провести мінімізацію по кожній компоненті вектора U. Нарешті, на завершальному етапі, комбінуючи ці методи, маємо ітераційний алгоритм мінімізації цільової функції.

3. Лінійна задача найменших квадратів

Зафіксуємо параметричний вектор $U = (t_1, \ldots t_N)$ і шукатимемо криву Безьє, яка мінімізує значення нев'язки (4) при заданих значеннях проміжних параметрів.

$$\begin{aligned} x(F) &= Ber(U) \cdot x(Q) - x(P), \\ y(F) &= Ber(U) \cdot y(Q) - y(P) \end{aligned} \quad (5)$$

Функцію нев'язки (4) можна також представити у векторній формі:

$$f(Q, U) = \frac{1}{2}\|x(F)\|^2 + \frac{1}{2}\|y(F)\|^2, \quad (6)$$

де норма вектора береться у N–мірному евклідовому просторі [4].

З формули (5) видно, що вектор абсцис базових функцій *x(F)* лінійно залежить від вектора абсцис *x(Q)* і аналогічно вектор ординат базових функцій *y(F)* лінійно залежить від вектора *y(Q)*. Таким чином, маємо класичну лінійну задачу про найменші квадрати [3]. Добре відомим є метод Гауса для розв'язання цієї задачі, а саме, вектори *x(Q)* і *y(Q)*, на яких досягається мінімум нев'язки (6), мають задовольняти такій системі лінійних рівнянь [3 § 3.6]:

$$\begin{aligned} A(U) \cdot x(Q) &= Ber(U)^T \cdot x(P), \\ A(U) \cdot y(Q) &= Ber(U)^T \cdot y(P) \end{aligned} \quad (7)$$

де $A(U) = Ber(U)^T Ber(U)$, а $Ber(U)^T$ - транспонований бернштейніан.

4. Мінімізація нев'язки по параметрах кривої Безьє

Розглянемо тепер задачу мінімізації нев'язки (4) для фіксованої кривої Безьє, тобто при фіксованому векторі Q. Тоді нев'язка залежатиме тільки від параметричного вектора $U = (u_1, \ldots u_N)$ і, отже, в цьому випадку маємо нелінійну задачу найменших квадратів.

У загальному випадку така нелінійна задача найменших квадратів зводиться до локалізації і знаходження коренів многочлена п'ятого степеня, яка є складною обчислювальною задачею. Наприклад, метод Ньютона вимагає обчислення других похідних функції нев'язки [3 §2.2]. Крім того, екстремальна точка може виявитися локальним максимумом або точкою перегину функції нев'язки. До того ж точне розв'язання проміжної задачі може істотно збільшити загальний час мінімізації нев'язки по всіх змінних. Тому, замість точного розв'язання, був використаний наближений локальний алгоритм мінімізації нев'язки градієнтного типу.

Цей алгоритм ґрунтується на геометричних міркуваннях і полягає у зміні значення змінної t_i таким чином, аби зменшувалася нев'язка (4). З геометричної точки зору це означає виконання умови перпендикулярності дотичного вектора $Bz'(t) = (Bx'(t), By'(t))$ у точці $t = t_i$ векторові $Bz(t_i) - P_i = (Bx(t_i) - x(P_i), By(t_i) - y(P_i))$. При цьому, якщо косинус кута між цими плоскими векторами більше нуля, то параметр t_i треба зменшувати, аби збільшити кут між векторами $Bz'(t_i)$ і $Bz(t_i) - P_i$. Якщо ж $\cos(\alpha_i) < 0$, то параметр t_i треба збільшувати, аби зменшити кут між цими векторами. Іншими словами, зміщення має відбуватися начебто у бік перпендикуляра, опущеного з точки P_i на криву Безьє. На рис. 1 ілюструються ситуації, що виникають. Зміщення проводиться методом половинного ділення між сусідніми значеннями параметра.

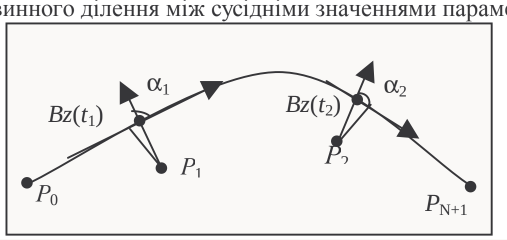

Рис. 1. Геометрична інтерпретація алгоритму

Зміщення закінчуються, коли зміна нев'язки стає меншою від наперед заданого значення.

5. Моделювання алгоритму та експериментальна перевірка

Для чисельного розв'язання лінійної задачі найменших квадратів була розроблена процедура *LLSquare(U)*, яка по заданому параметричному вектору U обчислює вектор коефіцієнтів кривої Безьє Q. Для реалізації алгоритму мінімізації по параметрах була розроблена процедура *Midpoints*(*Q*,*U*), яка по заданій кривій Безьє Q *і* параметричному вектору U зміщує вектор U по всіх параметрах t_i, $1 \le i \le N$ з метою зменшення нев'язки (4).

Загальний алгоритм мінімізації починає роботу з рівномірного параметричного вектора $t_i = i/(N+1)$, $1 \le i \le N$ і полягає у почерговому виклику процедур *LLSquare(U)* і *Midpoints*(*Q,U)*, поки зміна нев'язки стане меншою, від заданого числа $\varepsilon > 0$.

На рис.2 наведені приклади роботи алгоритму для перших 3-х ітерацій. Хрестиками позначені початкові значення даних, через які має пройти шукана крива Безьє.

Після проведення моделювання алгоритму була розроблена динамічна бібліотека, яка, у свою чергу, була успішно використана в експерименті розпізнавання бінарних зображень нейрокомп'ютером. На рис.3 наведено приклад перетворення бінарного растрового зображення у криві Безьє.

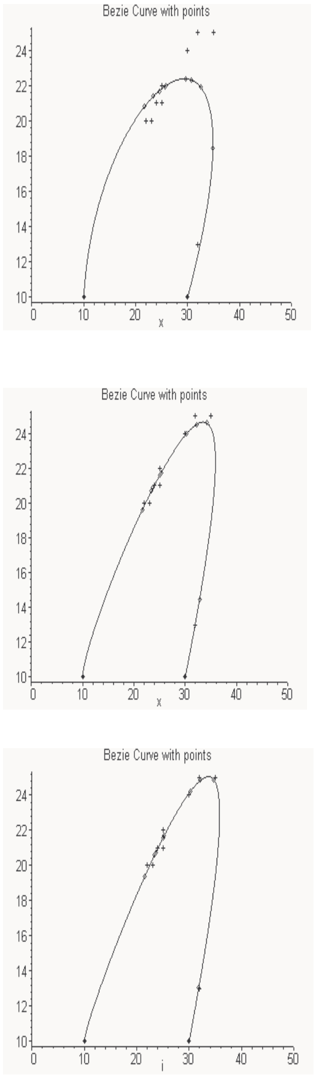

Рис.2. Приклад моделювання ітераційного алгоритму

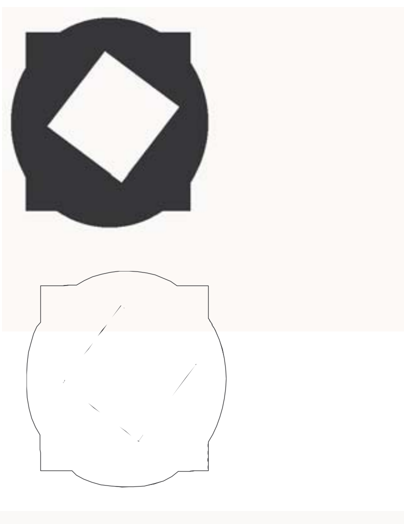

Рис.3. Приклад перетворення бінарного растрового зображення у криві Безьє.

6. Висновки

Криві Безьє можуть використовуватися в задачах розпізнавання образів, у тому числі і служити ознаками при розпізнаванні зображень. Для цього необхідно використовувати алгоритми апроксимації ділянок контуру зображень сплайнами у вигляді параметричних кривих Безьє.

Для розв'язання задачі апроксимації ділянок контуру кривими Безьє можна використовувати ітераційну процедуру підбору параметрів, що дозволяє мінімізувати нев'язку (4) з будь-якою точністю.

7. Література

1. Денискин Ю.И. Особенности аппроксимации обводов параметрическими полиномами в форме Бернштейна // Прикладная геометрия, вып. 2, № 2, 1999.
2. Хемминг Р.В. Численные методы. – М., Наука, 1972. – 400 с.
3. Денис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решение нелинейных уравнений. – М., Мир, 1988. - 440 с.
4. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. – М.: ФМ, 1963. – 263 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М., Наука, 1970. – 720 с.