Дуга цифрової кривої - визначення і застосування

Володимир Г. Калмиков

Інстиут проблем математичних машин і систем НАН України, Київ
kvg@immsp.kiev.ua

Abstract

The recognition of the digital curve arches in the structural analysis of images is one of the tasks of the visual information processing in the systems of artificial intellect. The use of curve arches as the structural elements of images will approach their description to intuitive, human interpretation, essentially reduce memory expenses for a visual information storage and processing time. In the article the definition of a digital curve arch is considered, from which the algorithm is developed to define if a part of a contour is really a smooth curve arch or not.

1. Вступ

Структурний аналіз контурів зображень як послідовностей відрізків прямих і дуг кривих є однією з задач оброблення зображень з метою їхньої інтепретації у системах штучного інтелекту.

У більшості випадків зображення можна представити як частину площини, розділену на області з постійними або такими, що змінюються, параметрами, наприклад, оптичною щільністю, кольором, текстурою та ін. Невід'ємною властивістю кожної з цих областей є її межа, тобто контур – однозв'язна послідовність, що складається з відрізків прямих і дуг кривих.

У процесі структурного аналізу растрових зображень контури визначаються у вигляді послідовностей особливих точок або відрізків прямих. Відомо також, що у великій кількості застосувань криволінійні елементи зображень застосовуються у вигляді сплайнів, кривих Безье і т.п. Проте дуги довільних кривих, як елементи контурів не часто застосовуються при обробленні зображень. Принаймні, однією з причин цього є відсутність загального визначення дуги довільної цифрової кривої. У той же час використання дуг кривих як структурних елементів зображень наблизило б опис до інтуїтивного, природного представлення зображень людиною, істотно скоротило б витрати пам'яті для збереження зображення і часу його оброблення.

У роботі [1] відзначається: “Поняття безперервної кривої на площині (у просторі) є одним із понять, що інтуїтивно здаються простим, але фактично дуже складно визначуваним. У різні періоди розвитку математики найвидатніші представники цієї області людських знань по-різному визначали безперервну криву. Кожне нове визначення виходило з потреб практичної діяльності людини, а також рівня знань відповідної епохи”. Потреби теперішнього часу тісно пов'язані з необхідністю створення і масового використання засобів оброблення візуальної інформації, поданої в дискретному вигляді. Однією з основних проблем оброблення візуальної інформації є штучна ідентифікація або інтерпретація зображень. Проте вирішення цих задач є неможливим без автоматичного виявлення й ідентифікації узвичаєних основних елементів зображення, до яких відноситься дуга кривої.

Знайти визначення дуги цифрової кривої, і сформулювати такі умови, при виконанні котрих щодо деякої ламаної лінії можна було б вважати її дугою цифрової кривої, є метою даної роботи.

2. Дуга цифрової кривої

У даному розділі має бути сформульоване таке визначення дуги цифрової кривої, що дозволяє встановити або відкинути факт: частина послідовності відрізків цифрових прямих контуру утворена як результат дискретизації дуги деякої довільної кривої.

Будемо виходить з того, що дуги кривих, використовуваних у графічних зображеннях, є дугами безперервних кривих ліній із безперервними похідними.

Під безперервними кривими лініями [1], заданими рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, будемо розуміти криві Жордана без кратних точок або прості дуги, тобто такі, що для будь-яких двох різних значень t' і t'' відповідні їм точки на площині M' $[\varphi(t'), \phi(t')]$ і M'' $[\varphi(t''), \phi(t'')]$ різні. Оскільки множина точок замкнутої кривої, наприклад, усієї окружності або усього еліпса, не є простою дугою, при необхідності замкнуті криві завжди можна представити як замкнуті послідовності простих дуг, наприклад дуг окружностей, еліпсів і т.д.

Розглянуті у даній роботі дуги кривих являються

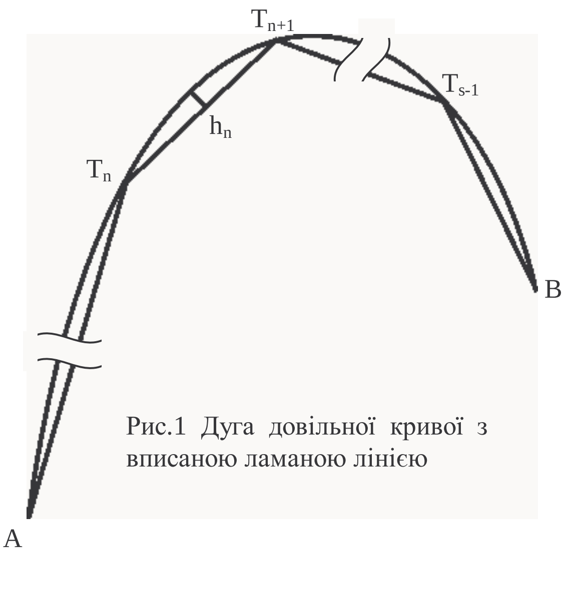

Рис.1 Дуга довільної кривої з вписаною ламаною лінією

опуклими. Нехай $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, де $\varphi(t)$, $\phi(t)$ – безперервні функції параметра t, визначені на відрізку $[a, b]$. При зростанні t від a до b точка з координатами x, y описує дугу AB. Розглянемо розбивку відрізка $[a, b]$ точками розподілу

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{s-1} < t_s = b, \quad (1)$$

і нехай цим точкам розподілу відповідають точки кривої A, $T1$, …, T_{s-1}, B (рис.1). Поєднавши послідовно відрізками прямих точку A з точкою T_1, точку T_1 із точкою T_2, …, точку T_{s-1}, із точкою B, побудуємо ламану лінію, та назвемо її ламаною, вписаною у дугу AB. Фігуру, обмежену відрізком ламаної лінії T_n,T_{n+1} та відповідною ланкою дуги $\cap Tn,Tn_{+1}$ будемо називати сегментом дуги T_n,T_{n+1}, а максимальну довжину лінії між відрізком T_n,T_{n+1} і $\cap T_n,T_{n+1}$, перпендикулярної до відрізка T_n,T_{n+1} – висотою сегмента дуги h_n. Нехай

$$\beta = \max_{n=0,1,\ldots,s-1} l(T_n, T_{n+1}) \quad (2)$$

Якщо β буде прагнути до нуля при відповідному збільшенні s, то до нуля буде прагнути довжина кожної з ланок вписаної ламаної, також як і висота кожного сегмента дуги, завдяки безперервності функцій $\varphi(t)$, $\phi(t)$.

При відображенні дуги та вписаної ламаної лінії у дискретному просторі дискретності d, відрізки вписаної ламаної будуть відображатися відрізками цифрових прямих. Оскільки у дискретному просторі значення координат приймають цілочисельні значення, кратні d, то, починаючи з моменту, коли $h_n < d$, об'єкти, менші величини дискретності, зокрема, висоти сегментів не будуть відображені в цьому просторі, – довжини їх стануть рівними нулю. Отже, при $h_n < d$ дискретні відображення ланок дуги співпадуть з відповідними відрізками цифрових прямих вписаної ламаної.

Таким чином, контур, що складається з відрізків прямих і дуг довільних кривих, після дискретизації визначений як послідовність відрізків цифрових прямих. Послідовності відрізків цифрових прямих, що відповідають дугам кривих, можуть розглядатися як ламані лінії, вписані у ці дуги кривих. Такі вписані ламані лінії будемо називати дугами цифрових кривих. Крім того, контур може включати як окремі відрізки, так і послідовності таких відрізків - ламані лінії, що не є дугами цифрових кривих.

Координати точок злому вписаних ламаних ліній можуть бути використані для визначення й аналізу кінцевих різниць тих функцій, що відповідають дугам кривих. Кінцева різниця першого порядку приблизно характеризує дотичну відповідної частини дуги кривої. Кінцева різниця другого порядку приблизно характеризує кривизну відповідної частини дуги кривої.

Відповідно до поширених уявлень у процесі зорового сприйняття визначаються та використовуються градієнти яскравостей і криві першого і другого порядків. У практичній діяльності одержали широке поширення криві Безье, що є кривими третього порядку і використовуються при рішенні багатьох практичних задач. Тому далі будемо розглядати кінцеві різниці

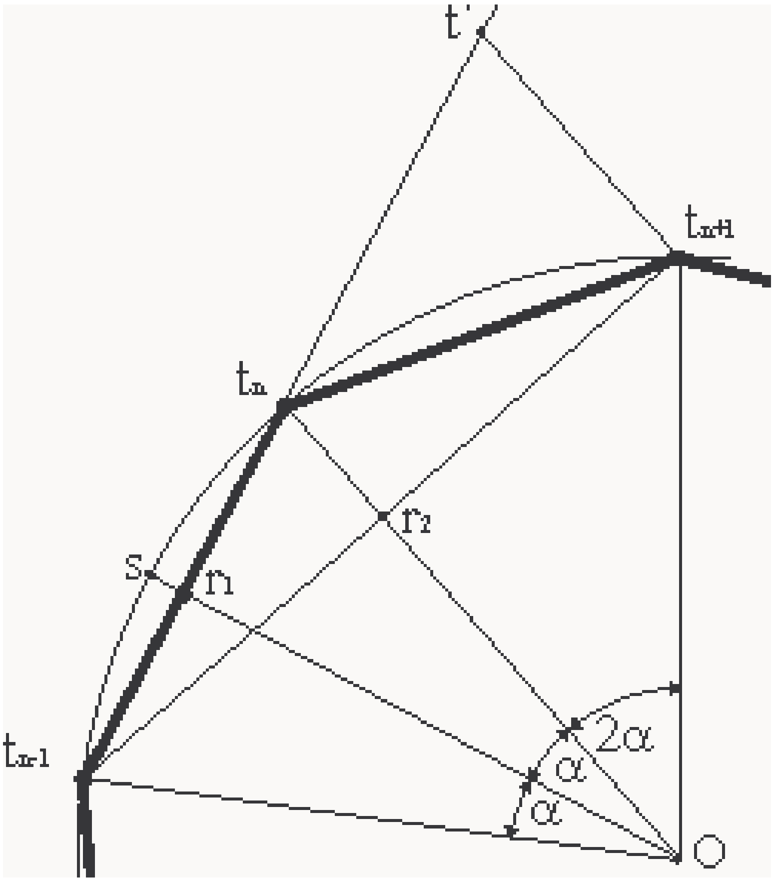

Рис.2. Дотична окружність, проведена через три кінцеві точки пари відрізків вписаної ламаної лінії.

першого, другого і третього порядку.

Розглянемо умови, при котрих деяка послідовність сегментів ламаної лінії контуру може бути визначена як дуга цифрової кривої.

Будемо розглядати пари сусідніх відрізків цифрових прямих у послідовності, що відповідає дузі кривої. Пара сусідніх відрізків визначає кінцеву різницю другого порядку. Дві пари, що мають загальний відрізок, будемо називати сусідніми парами. Сусідні пари визначають кінцеву різницю третього порядку.

Якщо кінцеві різниці другого порядку не рівні нулю (для цілочисельних значень координат точок кінцеві різниці повинні бути більше 1), то не виключено, що пара відрізків цифрових прямих є частиною дуги цифрової кривої. Взагалі, через три точки, що визначені парою відрізків, можна провести багато кривих. Проте, як уже відзначалося, величини висот сегментів дуг кривих, що відповідають відрізкам вписаної ламаної лінії, не мають перевищувати значення дискретності простору d. Таким чином, для того щоб вважати пару відрізків цифрових прямих $T_{n-1}T_n$, T_nT_{n+1} частиною дуги цифрової кривої, необхідно встановити існування кривої, що проходить через точки T_{n-1}, T_n, T_{n+1}, такої, для якої виконується умова: $(h_{n-1}<d)\&(h_n<d)$.

Залишаючи осторонь рішення цієї задачі у загальному випадку, розглянемо окремий випадок цієї задачі коли кривою другого порядку, що проходить через три точки є окружність.

Побудувавши таку окружність по точках T_{n-1},T_n,T_{n+1}, зробимо оцінку величини відхилення кожного такого відрізка від напрямку лінії попереднього відрізка (рис. 2). Величиною відхилення може служити довжина відрізка $T_{n+1}T'$ за умови, що $l(T_nT'')\cong l(T_n,T_{n+1})$.

Визначимо спочатку довжину відрізка T_nR_2 - висоти трикутника $T_{n-1}T_n\,T_{n+1}$.

Як уже було відзначено, максимальна відстань між точками ліній дуги кривої і відповідного відрізка цифрової прямої $SR_1= d$.

У той же час $SR_1= OT_{n-1} - OT_{n-1}\times \cos \alpha = r - r \cos \alpha = r(1- \cos \alpha)$.

Довжина висоти $\Delta(T_{n-1}T_n\,T_{n+1})$ $T_nR_2 = OT_n - OT_n\times \cos 2\alpha = r - r \cos \alpha = r(1- \cos 2\alpha) = 2(1- \cos2 \alpha)$.

$T_nR_2 / SR_1 = 2(1 + \cos \alpha)$; або $T_nR_2 = 2(1 + \cos \alpha) \times SR_1$. Якщо $SR_1 \approx d$ і $\alpha \le 30°$, то висота трикутника $(T_{n-1}T_n\ T_{n+1})$ $T_nR_2 \le 3{,}85_d$. Неважко бачити, що максимальне відхилення

$$T_{n+1}T' = 2\times T_nR_2 \approx 7.\,7d. \qquad (3)$$

Це означає, що для того, щоб розглянута пара відрізків могла бути віднесена до дуги цифрової кривої необхідно, щоб величина максимального відхилення T_nT' не перевищувала б 7.7d. Мінімальна величина відхилення $T_{n+1}T' > d$, оскільки при меншому значенні відхилення напрямки відрізків $T_{n-1}T_n$ і T_nT_{n+1} нерозрізненні, і пара відрізків різних напрямків перетворюється у один відрізок прямої.

Величина відхилення $d < g_n = T_{n+1}T' < 7.7d$ також є значенням другої кінцевої різниці на сегменті контуру $T_{n-1}T_n\,T_{n+1}$, у точці T_n за умови, що даний сегмент є частиною дуги кривої.

На підставі приведених обгрунтувань можна сформулювати наступне ***визначення***.

Під дугою цифрової кривої у двомірному дискретному просторі дискретності d будемо розуміти таку послідовність відрізків цифрових прямих, що через кінцеві три точки кожної пари сусідніх відрізків можна провести окружність, висота сегментів якої для сусідніх відрізків не перевищує d.

Це визначення справедливо у тій мірі, наскільки правомірно ототожнювати сегмент дуги довільної кривої, що відповідає парі сусідніх відрізків з дугою дотичної окружності.

Виконання вимоги безперервності вихідної дуги кривої і її похідних в умовах дискретного простору можна розглядати як обмеження на величини кінцевих різниць. Насамперед, величина відхилення $d< g_n = T_{n+1}T' < 7.7d$ є другою кінцевою різницею на сегменті контуру $T_{n-1}T_n\,T_{n+1}$, у точці T_n за умови, що даний сегмент є частиною дуги кривої. Необхідно також, щоб виконувалася умова $|g_n-g_{n+1}|\le d$, що відповідає сталості другої кінцевої різниці, або $|g_n-g_{n+1}|=\text{const}$, що відповідає сталості третьої кінцевої

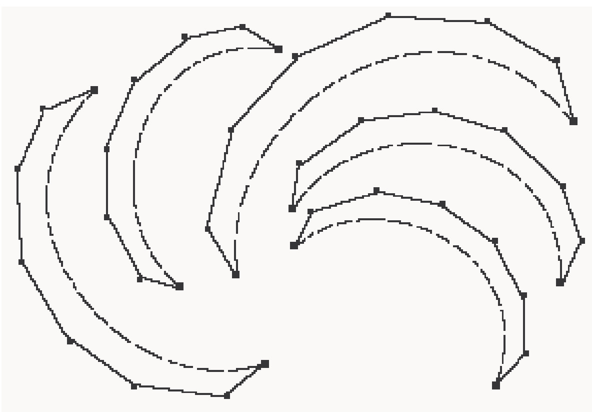

Рис.3 Застосування визначення дуги цифрової кривої для сегментації контурів об'єктів, що відрізняються масштабом, положенням у просторі, поворотом

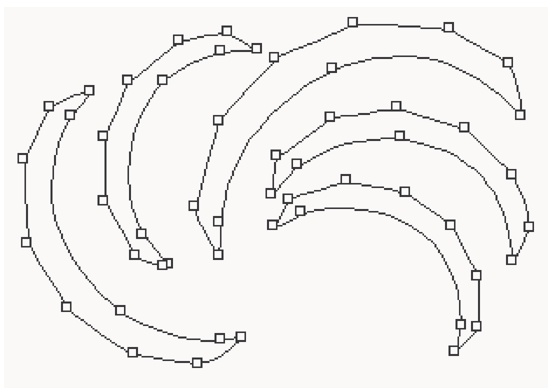

Рис.4 Приклад сегментації тих же самих об'єктів, що на рис.3 засобами Coral Trace

різниці. Отже, усякий контур може бути поданий ламаною лінією. Деякі відрізки прямих є самостійними структурними елементами контуру. Деякі ж частини послідовності відрізків прямих відображають дуги кривих ліній.

Як випливає зі сказаного вище, для того щоб можна було вважати, що послідовність із відрізків прямих відображає дугу кривої, необхідно виконання наступних умов.

1. Кількість відрізків у послідовності, що відображають одну дугу кривої, повинно бути трьох або більш, тобто не менше двох сусідніх пар, щоб можна було обчислити кінцеві різниці до третього порядку.

2. Для кожній пари відрізків $T_{n-1}T_n$ і $T_n\ T_{n+1}$ виконується умова $d<g_n<7.7d$ - обмеження на кінцеву різницю другого порядку.

3. Для кожних двох сусідніх пар виконується умова $|g_n-g_{n+1}|\leq d$ або $|g_n-g_{n+1}|=$ const - обмеження на кінцеву різницю третього порядку.

3. Приклади застосування

Алгоритм розпізнавання контурів зображень як послідовності відрізків цифрових прямых і дуг цифрових кривих, що використовує запропонований метод, був реалізований у складі лабораторного програмного комплексу оброблення зображень колективом авторів у складі Вишневський В.В., Власова Т.М., Калмиков В.Г., Масол Д.І., Чубун М.В., Шарипанов В.М., що є предметом окремих публікацій.

При обробленні зображень зокрема виконувались такі операції:

- визначення контурів об’єктів бінарних зображень,
- розпізнавання відрізків цифрових прямих, які утворюють кожен з контурів,
- розпізнавання дуг цифрових кривих серед послідовностей відрізків цифрових прямих.

Розпізнавання відрізків цифрових прямих виконано за методом, викладеним у роботі [2], хоча немає завад для застосування іншого методу, наприклад, [3].

Приклад роботи програми розпізнавання контуру як послідовності відрізків цифрових прямих і дуг цифрових кривих приведені на рис. 3. На цьому рисунку представлені контури об’єктів бінарних зображень, оброблених алгоритмом, що застосовує запропонований метод визначення дуг цифрових кривих. Кожен з п’яти об’єктів, що представлені на рисунку, утворений з одного й того ж об’єкту шляхом змінення масштабу, кута повороту відносно деякого центру та положення у полі зору. На даному етапі роботи використовувались зображення об’єктів, не ушкоджених поміхами. Контур кожного з об’єктів є замкненою однозв’язною послідовністю семи відрізків прямих та однієї дуги довільної кривої. Як видно з рисунку, дуги цифрових кривих і відрізки прямих у контурах відновлені відповідно до природного уявлення людини, незалежно від аффінних перетворень, у даному випадку, від повороту, масштабу, та положення у просторі. Кульками позначені межі окремих елементів контурів: відрізків цифрових прямих та дуг цифрових кривих. Дуги цифрових кривих представлені штрихами визначеної довжини. Кожен штрих відповідає ланці вписаної ламаної лінії, яка відповідає дузі цифрової кривої.

Для порівняння приведений результат оброблення того ж зображення програмою Corel Trace, що входить до складу Corel Draw (рис.4). Як видно з рисунку, відрізки прямих розпізнані майже так, як і у попередньому експерименті. Але кожна з дуг кривих представлена декількома дугами, причому для кожного з об’єктів визначені різні набори дуг, як за параметрами дуг, так і за їх кількістю. Такий опис контурів об’єктів важко застосовувати у системах штучного інтелекту без додаткового оброблення.

4. Висновки

1. Сформульоване визначення, відповідно до якого однозв’язна послідовність відрізків цифрових прямих може бути ідентифікована, як дуга цифрової кривої, отриманої в результаті дискретизації довільної безперервної кривої.

2. Отримані умови ідентифікації послідовності сегментів ламаної лінії контуру як дуги цифрової кривої дозволили створити алгоритм і програму для розпізнавання контуру у вигляді послідовності відрізків цифрових прямих і джуг цифрових кривих.

3. Запропонований метод опису контурів дозволяє не тільки зменшити обсяги пам’яті при при зберіганні зображень, але й істотно зменшити час оброблення за рахунок природнього представлення контурів.

4. Розроблені на основі досягнутих результатів алгоритми і програми дозволяють, на відміну від відомих, виконувати сегментацію контурів природнім образом на відрізки цифрових прямих і дуги цифрових кривих.

5. Отримані результати застосовуються при створенні систем інтерпретації не тільки бінарних, але й напівтонових та кольорових зображень, як без втрати інформації, так і при наявності завад.

Література

[1] Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. – Москва: Просвещение, 1968.

[3] Калмыков В.Г. Структурный метод описания и распознавания отрезков цифровых прямых в контурах бинарных изображений.// Штучний інтелект 4’2002, Інститут проблем штучного інтелекту НАНУ – Донецьк: "Наука і освіта" 2002 – с.450-457.

[3] V.A.Kovalevsky: Applications of Digital Straight Segments to Economical Image Encoding, In Proceedings of the 7th International Workshop, DGCI’97, Montpellier, France, December 3-5, 1997, Springer 1997, pp. 51-62.