Псевдоперіодичні сигнали та функції деформації періоду

Галина Глушаускене

МННЦ ІТіС НАН України

Київ, просп. Академіка Глушкова 40

The conception of the pseudo-periodical signal is determined and the properties of the function of the period deformation are adduced.

1. Вступ

В різних технічних та біологічних системах досить часто спостерігаються сигнали, графік яких не є графіком періодичної функції, але візуально схожий на нього. Такі сигнали іноді називають циклічними, ритмічними, квазіперіодичними, псевдоперіодичними. В більшості моделей, пропонованих для таких сигналів, відхилення від періодичності стосується в основному значень сигналу всередині періоду, але відхилення довжини періоду найчастіше вважається результатом деякого збурення і тому не перевищує деякої малої величини. Але така модель не прийнятна для електрокардіосигналів (ЕКС). Справа в тому, що частота серцевих скорочень не прямує до стабільної величини, а постійно зазнає суттєвих флуктуацій навіть при відсутності зовнішніх збурень. Більш за те, як показують дослідження Р.М.Байєвського [1], стабільний серцевий ритм є симптомом виснаження регуляторних функцій організму. Таким чином, модель ЕКС вимагає допущення о довжині періоду, яка постійно змінюється. Саме зміна довжини періоду буде головним в запропонованому визначенні псевдоперіодичної функції. Більш за те, зміна значень функції всередині періоду буде ігноруватись. Визначення буде побудовано як розширення відомого визначення періодичної функції в сторону допущення постійної зміни довжини періоду.

2. Періодичність з заданим еталоном

Згідно зі стандартним визначенням, неперервна функція x(t) періодична з періодом T, якщо для будь-якого t виконано:

$$x(t) = x(t - T), \tag{1}$$

або

$$x(t) = x(t - L \cdot T). \tag{2}$$

Згідно з цим визначенням будь-який період періодичної функції є повторенням попереднього періоду, а також будь-якого з передпопередніх періодів. Тобто, по суті, періодична функція є результатом тиражування деякого еталону $x^0(t)$, визначеного на інтервалі [0,T]. Тоді наступне визначення цілком еквівалентне.

Визначення. Неперервна функція x(t) періодична з еталоном $x^0(t)$, визначеним на інтервалі [0,T], якщо для будь-якого t виконано:

$$x(t) = x^0(t - T(t)), \tag{3}$$

де T(t) - ступінчата функція:

$$T(t) = [t / T] \cdot T. \tag{4}$$

Таким чином, якщо T(t) – ступінчата функція виду (4), то x(t) в (3) визначає звичайну періодичну функцію, коли еталон $x^0(t)$ тиражується в незмінному вигляді. З метою розширити клас періодичних функцій природньо припустити, що функція T(t) не обов'язково ступінчата.

3. Функція деформації періоду

Функцію T(t) в (3) назвемо функцією деформації періоду. Неважко помітити, що при такому визначенні еталон тиражується, зберігаючи в цілому свою форму, але на участках росту/спадання функції T(t) відповідні участки еталону розтягуються/зтискуються по часовій вісі. Але не будь-яка функція може бути функцією деформації періоду. Вона повинна задовольняти деяким умовам, які гарантують коректність визначення. Розглянемо ці умови.

1. Перш за все, кожна точка функції x(t)визначаєтьсячерез значення еталону на його області визначення, тобто [0,T]. Тоді повинна виконуватись умова:

$$t - T \le T(t) \le t \quad \forall t. \tag{5}$$

Інакше кажучи, функція T(t) не виходить за границі тунелю, визначеного нерівностями (5).

2. Згідно з визначенням, еталон, визначений на [0,T] тиражується з деякими деформаціями по вісі t), утворюючи окремі псевдоперіоди на деяких інтервалах $[0,T_1]$, $[T_1,T_2]$, …,$[T_i,T_{i+1}]$,…Таким чином, послідовність $0=T_0<T_1<\ldots<T_i<\ldots$ утворює послідовність початків окремих псевдоперіодів. При цьому, оскільки довільна точка T_i з цього ряду є початковою точкою псевдоперіоду $[T_i,T_{i+1}]$, то

$$x(T_i) = x^0(T_i - T(T_i)) = x^0(0),$$

тобто

$$T(T_i) = T_i. \tag{6}$$

Оскільки одночасно T_i є останньою точкою $[T_{i-1},T_i]$, то

$$\lim_{t \to T_i,\, t<T_i} x(T_i) =$$

$$= x^0(T_i - \lim_{t \to T_i,\, t<T_i} T(t)) = x^0(T)$$

тобто

$$\lim_{t \to T_i,\, t<T_i} T(t) = T_i - T. \tag{7}$$

Отже, функція T(t) на початку кожного псевдоперіоду співпадає з T_i (верхня межа тунелю), наприкінці – з T_{i+1}-T (нижня межа тунелю).

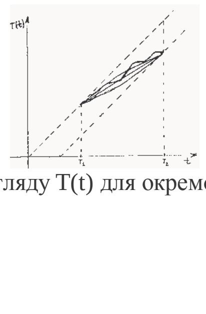

Рис.1. Варіанти вигляду T(t) для окремого псевдоперіоду.

3. Якщо врахувати, що час може розтягуватись або стискатись, але не повертати назад, ми повинні вимагати, щоб для будь-яких точок t_1,t_2 таких, що $T_i \le t_1 < t_2 \le T_{i+1}$ виконувалось наступне:

$$t_i - T(t_i) < t_{i+1} - T(t_{i+1}),$$

Або

$$\frac{T(t_{i+1}) - T(t_i)}{t_{i+1} - t_i} < 1. \qquad (8)$$

Таким чином, на будь-якій дільниці псевдоперіоду кут нахилу функції T(t) не може перевищувати 45^0, отже похідна повинна бути менша за одиницю.

Умовам (5)-(8) повинна задовольняти функція T(t) для того, щоб її можна було розглядати як функцію деформації періоду.

Визначення. Функція T(t), $t \ge 0$ є функцією деформації періоду T, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1. для будь-якого значення t, $t \ge 0$ виконана умова (5);
2. існує послідовність точок $0=T_0<T_1<\ldots<T_i<\ldots$ така, що виконуються умови (6),(7);
3. для будь-яких t_1,t_2 таких, що $T_i \le t_1 < t_2 \le T_{i+1}$ виконана умова (8).

Оскільки ступінчата функція виду (4) задовольняє цим вимогам, вона також може бути функцією деформації періоду.

4. Псевдоперіодична функція

Визначення. Неперервна функція x(t) псевдоперіодична з еталоном $x^0(t)$, $t \in [0,T]$ якщо існує функція деформації періоду така, що для будь-якого T(t) t, $t \ge 0$ виконано:

$$x(t) = x^0\,(t - T(t)).$$

Наведене визначення є природнім поширенням визначення періодичної функції виду (3) в бік неперервної зміни довжини періоду.

Якщо задано еталон $x^0(t)$ та функцію деформації періоду T(t) то легко сгенерувати псевдоперіодичну функцію. Звичайно має місце обернена задача: є псевдоперіодична функція, а еталон та функція деформації невідомі. Звичайно в таких випадках припускається, що кожний псевдоперіод є результатом рівномірного розтягу або стискання, тобто фактично припускається, що функція деформації прямолінійна на кожному псевдоперіоді. Тоді для оцінки еталону у часовому просторі усереднюються окремі псевдоперіоди, розтягнені/стиснені до однієї довжини. Розглянемо елементарний приклад, коли припущення щодо характеру T(t) невірне.

5.Приклад

Задано еталон $x^0(t)$ та функцію деформації періоду T(t):

$$x^0(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2, \\ 4 - t, & 2 \le t < 4. \end{cases}$$

$$T(t) = \begin{cases} -t, & t \le 1, \\ t/3 - 4/3, & 1 \le t < 4, \\ t/3 + 8/3, & 4 \le t < 7, \\ -t + 12, & 7 \le t < 8. \end{cases}$$

Тоді псевдоперіодична функція має вигляд:

$$x(t) = \begin{cases} 2t, & t < 1, \\ -2t/3 + 8/3, & 1 \le t < 4, \\ 2t/3 - 8/3, & 4 \le t < 7, \\ -2t + 16, & 7 \le t < 8. \end{cases}$$

При традиційному усередненні в часовому просторі отримуємо таку оцінку еталону:

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} 4t/3, & t < 1, \\ 4/3, & 1 \le t < 3, \\ -4t/3 + 16/3, & 3 \le t < 4. \end{cases}$$

Неважко переконатись, що середньоквадратичне відхилення оцінки еталону від заданої функції навіть менше, ніж середньоквадратичне відхилення самого еталону. Тобто ми отримали прекрасну оцінку, яка в той же час не зберігає форми функції, яка усереднюється, що ілюструє малюнок (пунктир – усереднювані псевдоперіоди)

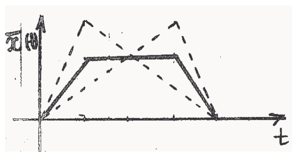

Рис.2. Оцінка еталону.

6. Висновки

Оскільки форма функції деформації звичайно невідома, а модель рівномірної деформації, як показав приклад, може спричинити викривлення форми еталону, більш прийнятною є модель кусково-лінійної деформації [2]. Вид функції деформації допустимо ігнорувати, якщо оцінку еталону проводити не в часовому просторі, а в фазовому, де по одній вісі відкладаються значення функції, а по другій – значення похідної [3]. Неважко переконатись, що для наведеного вище прикладу оцінка еталону в фазовому просторі повністю відтворює форму еталону.

7. Література

[1] Баевский Р.М., Барсукова Ж.Ю. Оценка функционального состояния организма на основе математического анализа сердечного ритма. – Методические рекомендации. – Владивосток: ДВО АН СССР, 1989.-40с.

[2] Файнзильберг Л.С. Восстановление эталона циклических сигналов на основе использования хаусдорфовой метрики в фазовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. –2003. - №3. – С. 20-28.

[3] Fainzilberg L.S., Aksenova T.I.,Potapova T.P., Shelechova V.Ju. Cognitive Graphic Image of Electrocardiosignal as Means for Functional Human State Interpretation // International Journal of Information Theories and Applications. – 1994.- Vol.2. – P.20-26.