КОГЕРЕНТНИЙ КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ СТОХАСТИЧНИХ ЦИКЛІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Юзефович Р.М.[♥], *Михайлишин В.Ю.*[♥♦], *Яворський І.М.*[♥♠]

[♥]Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАН України, Львів

[♦]Інститут комп'ютерних наук та інформаційних технологій
Національний університет "Львівська політехніка"

[♠]Інститут телекомунікації Технічно-сільськогосподарської академії, Бидгощ, Польща

МСП, вул. Наукова 5, м. Львів, 79601
Тел: 8 (0322) 65-48-80, факс: 8 (0322) 64-94-27
E-mail: abzac@ipm.lviv.ua, mykhai@ipm.lviv.ua, iavor@ipm.lviv.ua

Розглянуто властивості когерентних оцінок ймовірнісних характеристик періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП). Досліджено ймовірнісну структуру циклічних навантажень при вібрації підшипникового вузла з нерівномірним радіальним натягом.

1. ВСТУП

Різноманітні конструкції в процесі їх експлуатації зазнають навантажень, які здебільшого змінюються в часі стохастично. Такі навантаження зумовлені як зовнішніми чинниками (пориви вітру, акустичний шум, морське хвилювання), так і внутрішніми (обертовий рух підшипників, валів, коліс трибових передач, приводних ременів, поступово-зворотний рух поршнів). Втома конструкційних матеріалів, яка виникає під впливом стохастичних навантажень, теж має стохастичний характер. Її можна розглядати як неспадний випадковий процес $\xi(t)$, характеристики якого залежать від характеристик навантажень. Для оцінки ступеня втоми конструкційних матеріалів необхідно знати ті характеристики навантажень, які найбільш істотні для розвитку втоми. Такі характеристики можуть бути обгрунтовані тільки на основі певних математичних моделей навантажень. Побудова математичних моделей навантажень є одним з основних етапів при дослідженні втомних пошкоджень матеріалів [1].

Особливу роль у виникненні втомних пошкоджень відіграють так звані циклічні навантаження, під впливом яких *напруження в певні моменти часу* змінюють свій знак на протилежний. При традиційному підході до аналізу втоми циклічні навантаження описуються за допомогою детермінованих періодичних функцій часу. За основну характеристику ступеня втоми тоді приймається число циклів при заданій амплітуді гармонічної зміни напружень. Детерміновані періодичні моделі в ідеалізованій формі описують повторюваність навантаження, але не відображають їх стохастичності. Однією з найпростіших моделей стохастичної циклічності є періодично корельовані випадкові процеси (ПКВП) [2]. Властивості циклічних навантажень в рамках такого підходу описуються за допогою імовірнісних характеристик даного класу нестаціонарних випадкових процесів. Верифікація такої моделі може бути проведена тільки на основі методів статистики ПКВП. Один з таких методів, що грунтується на усередненні відліків через період корельованості ПКВП, аналізується в даній праці.

2. ВЛАСТИВОСТІ КОГЕРЕНТНИХ ОЦІНОК ЙМОВІРНІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Математичне сподівання ПКВП $m(t)=E\xi(t)$, де E – оператор усереднення, і кореляційна функція $b(t,u)=E\,\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}(t)=\xi(t)-m(t)$ є періодичними функціями часу і можуть бути подані у вигляді рядів Фур'є:

$$m(t)=\sum_{k\in Z} m_k e^{ik\omega_0 t}=m_0+\sum_{k\in Z}\left(\begin{matrix} m_k^c\cos k\omega_0 t+\\ +m_k^s\sin k\omega_0 t\end{matrix}\right),$$

де $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$,

$$b(t,u)=\sum_{k\in Z} B_k(u)e^{ik\omega_0 t}=$$

$$=B_0(u)+\sum_{k\in Z}\left[B_k^c(u)\cos k\omega_0 t+B_k^s(u)\sin k\omega_0 t\right]. \quad (1)$$

Математичне сподівання описує регулярні цикли навантажень, дисперсія $d(t) = b(t,0)$ – зміну потужності флуктуацій, а кореляційна функція – зміну кореляційних зв'язків між значеннями флуктуаційних навантажень в моменти часу t і $t+u$.

Когерентний кореляційний аналіз ПКВП містить наступні завдання. По-перше, це оцінювання періодичного в часі математичного сподівання $m(t)$, $t \in [0,T]$, а також коефіцієнтів Фур'є m_k, які є параметрами форми регулярної складової циклу. По-друге, це оцінювання кореляційної функції $b(t,u)$, яка залежить від двох аргументів: часу t і зсуву u. Особливості зміни кореляційної функції відносно t і u зумовлюють різні підходи до оцінювання характеристик цих змін. Періодичність кореляційної функції, а також математичного сподівання відносно часу t забезпечує можливість використання такого методу оцінювання, який грунтується на усередненні відліків реалізації через період T. Оскільки для періодичної функції таке усереднення дає її значення в моменти часу, що відповідають точкам відліків, то є підстава сподіватися, що у випадку ПКВП, характеристики яких задовільняють певні умови, аналогічні дії будуть зменшувати вплив флуктуаційних складових. Такий метод оцінювання називають когерентним [2]. Знання значень характеристик для $t \in [0,T]$ дає можливість оцінити компоненти m_k і $B_k(u)$ на основі перетворень Фур'є. При такому оцінюванні зсув u вважається параметром, який можна змінювати. Вирази для оцінок компонентів тоді подібні до виразів для оцінок кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу з тією різницею, що у випадку ПКВП при усередненні застосовують вагові функції $\varphi_n(t) = e^{-in\omega_0 t}$, $n \in Z$. Можливості когерентного методу оцінювання, його ефективність, очевидно, можуть бути досліджені тільки при проведені аналізу стохастичних властивостей оцінок з врахуванням специфічних особливостей певного типу циклічних навантажень. Припустимо, що усереднення виконується з використанням відрізка реалізації довжиною $\theta = NT$, N – натуральне число. Когерентна оцінка математичного сподівання має вигляд:

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT), \qquad t \in [0,T]. \tag{2}$$

Така оцінка є незміщеною $E\hat{m}(t) = m(t)$, а її дисперсія визначається виразом

$$D\big[\hat{m}(t)\big] = \frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)b(t,nT). \tag{3}$$

Якщо кореляції загасають зі збільшенням зсуву u

$$\lim_{|u|\to\infty} b(t,u) = 0 \tag{4}$$

то $D\big[\hat{m}(t)\big] \to 0$ при $N \to \infty$. Це означає, що оцінка (2) є слушною. Дисперсія $D\big[\hat{m}(t)\big]$, як видно з (3), є періодичною функцією часу. Тому її можна подати у вигляді:

$$D\big[\hat{m}(t)\big] = \gamma_0 + \sum_{l\in N}(\gamma_l^c \cos l\omega_0 t + \gamma_l^s \sin l\omega_0 t). \tag{5}$$

Для коефіцієнтів цього розкладу, використовуючи подане (1), отримуємо

$$\gamma_0 = \frac{1}{N}\left[B_0(0) + 2\sum_{n=1}^{N-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)B_0(nT)\right], \tag{6}$$

$$\gamma_l^c = \frac{1}{N}\left[B_l^c(0) + 2\sum_{n=1}^{N-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)B_l^c(nT)\right], \tag{7}$$

$$\gamma_l^s = \frac{1}{N}\left[B_l^s(0) + 2\sum_{n=1}^{N-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)B_l^s(nT)\right]. \tag{8}$$

Як бачимо, середнє значення дисперсії (3) визначається нульовим кореляційним компонентом, а амплітуда L–их складових залежить тільки від кореляційних компонентів тих самих номерів.

На основі оцінки математичного сподівання (2) можуть бути знайдені оцінки коефіцієнтів $\hat{m}_0$, $\hat{m}_k^c$, $\hat{m}_k^s$:

$$\hat{m}_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{m}(t)dt, \qquad \hat{m}_k^c = \frac{2}{T}\int_0^T \hat{m}(t)\cos k\omega_0 t dt, \tag{9}$$

$$\hat{m}_k^s = \frac{2}{T}\int_0^T \hat{m}(t)\sin k\omega_0 t dt. \tag{10}$$

Оцінки (9)-(10) є незміщеними, а їх дисперсії виражаються через відповідні кореляційні компоненти:

$$D\big[\hat{m}_0\big] = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{4}{\theta}\right)B_0(u)du, \tag{11}$$

$$D\big[\hat{m}_l^c\big] = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{4}{\theta}\right)\begin{bmatrix}2B_0(u)\cos l\omega_0 u + \\ + B_{2l}^s(u)\sin l\omega_0 u - \\ - B_{2l}^c(u)\cos l\omega_0 u\end{bmatrix}du, \tag{12}$$

$$D\big[\hat{m}_l^s\big] = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{4}{\theta}\right)\begin{bmatrix}2B_0(u)\cos l\omega_0 u - \\ - B_{2l}^s(u)\sin l\omega_0 u + \\ + B_{2l}^c(u)\cos l\omega_0 u\end{bmatrix}du. \tag{13}$$

Якщо кореляційні зв'язки ПКВП загасають зі збільшенням зсуву, то величини (11)-(13) прямують до нуля при $\theta \to \infty$.

Когерентну оцінку кореляційної функції запишемо у вигляді:

$$\hat{b}(t,u) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+u+nT)\xi(t+nT) - \hat{m}(t)\hat{m}(t+u). \tag{14}$$

Усереднюючи (14), для зміщення знаходимо

$$\varepsilon\left[\hat{b}(t,u)\right] = E\hat{b}(t,u) - b(t,u) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)b(t,u+nT).$$

Цей вираз легко перетворюється до вигляду:

$$\varepsilon\left[\hat{b}(t,u)\right] = \varepsilon_0(u) + \sum_{l\in N}\left[\begin{matrix}\varepsilon_l^c(u)\cos l\omega_0 t + \\ + \varepsilon_l^s(u)\sin l\omega_0 t\end{matrix}\right], \quad (15)$$

де $\varepsilon_0(u) = -\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)B_0(u+nT),$

$$\varepsilon_l^c(u) = -\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)B_l^c(u+nT), \quad (16)$$

$$\varepsilon_l^s(u) = -\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)B_l^s(u+nT). \quad (17)$$

З отриманих формул випливає, що при виконанні умови (4) оцінка (14) є асимптотично незміщеною. Для її дисперсії, припускаючи, що процес є гаусовим, в першому наближені маємо:

$$D\left[\hat{b}(t,u)\right] = \alpha_0(u) + \sum_{l\in N}\left[\begin{matrix}\alpha_l^c(u)\cos l\omega_0 t + \\ + \alpha_l^s(u)\sin l\omega_0 t\end{matrix}\right], \quad (18)$$

при цьому

$$\alpha_0(u) = \frac{1}{N}\left[\widetilde{B}_0(0,u) + 2\sum_{n=1}^{N-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)\widetilde{B}_0(nT,u)\right], \quad (19)$$

$$\alpha_l^c(u) = \frac{1}{N}\left[\widetilde{B}_l^c(0,u) + 2\sum_{n=1}^{N-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)\widetilde{B}_l^c(nT,u)\right], \quad (20)$$

$$\alpha_l^s(u) = \frac{1}{N}\left[\widetilde{B}_l^s(0,u) + 2\sum_{n=1}^{N-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)\widetilde{B}_l^s(nT,u)\right]. \quad (21)$$

Величини $\widetilde{B}_0(u_1,u)$ і $\widetilde{B}_l^{c,s}(u_1,u)$ є коефіцієнтами Фур'є кореляційної функції процесу $\eta(t,u) = \mathring{\xi}(t)\,\mathring{\xi}(t+u)$ і виражаються через кореляційні компоненти ПКВП, тому при виконанні умови (4) $D\left[\hat{b}(t,u)\right] \to 0$ при $N \to \infty$.

Оцінки кореляційних компонентів знаходяться за формулами

$$\hat{B}_0(u) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{b}(t,u)dt,\ \hat{B}_l^c(u) = \frac{2}{T}\int_0^T \hat{b}(t,u)\cos l\omega_0 t dt,$$

$$\hat{B}_l^s(u) = \frac{2}{T}\int_0^T \hat{b}(t,u)\sin l\omega_0 t dt.$$

Зміщення цих оцінок визначаються відповідно правими частинами виразів (16)-(18), а їх дисперсії мають такий самий вигляд як вирази для дисперсій оцінок компонентів математичного сподівання з тією різницею, що кореляційні компоненти ПКВП в них замінені на коефіцієнти Фур'є кореляційної функції $b_\eta(t,u_1,u)$. Нульовий компонент $\widetilde{B}_0(u_1,u)$ залежить від усіх кореляційних компонентів ПКВП, тому вірогідність знаходження нульового кореляційного компонента ПКВП аж ніяк не може бути оцінена без знання вищих кореляційних компонентів. Цей факт підкреслює ту важливу роль, яку відіграє вибір моделі реального процесу при її статистичному аналізі.

3. ІМОВІРНІСНА СТРУКТУРА ЦИКЛІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Провести прямі вимірювання напружень, що виникають під час циклічних навантажень, практично неможливо. Однак, припустивши, що елементи машини є пружними та ізотропними, можна прийняти, що між вібраційним сигналом $\zeta(t)$, що вимірюється в деякій зовнішній точці, і напруженням $\xi(t)$ у певному елементі всередині машини існує лінійна залежність $\xi(t) = \alpha\zeta(t)$. Коефіцієнт α враховує вплив характеристик матеріалу і системи, а також геометрії, що формується деякою точкою вимірювань [2].

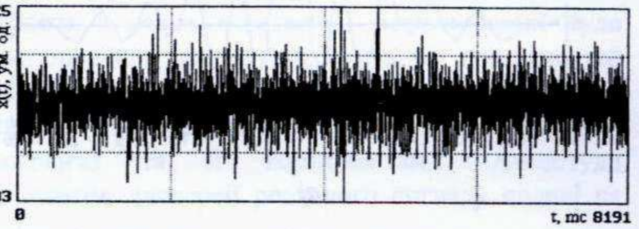
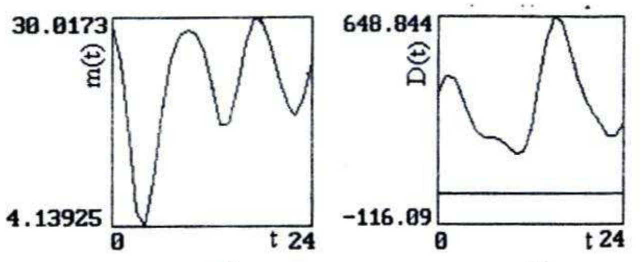


Рис.1. Сигнал осьової вібрації підшипника.

Застосувавши такий підхід, проаналізуємо структуру напружень, що виникають у підшипнику швидкохідного шпинделя машини для навивання вольфрамової спіралі електроламп, що працює в усталеному режимі (рис.1). Підшипниковий вузол має дефект нерівномірного радіального натягу. Період T оцінимо застосувавши компонентний метод оцінювання [3]. Оскільки оцінка періоду $T = 25{,}37$ не є цілим числом, то для оцінки імовірнісних характеристик когерентним методом необхідно змінити крок дискретизації. Для вирішення цієї задачі використаємо алгоритм інтерполяції поліномом Лагранжа 2-ого порядку [4].

Когерентні оцінки математичного сподівання і дисперсії, а також коефіцієнти Фур'є математичного сподівання подані на рис.2 та на рис.3.



а) б)

Рис.2. а) оцінка математичного сподівання;
б) оцінка дисперсії.

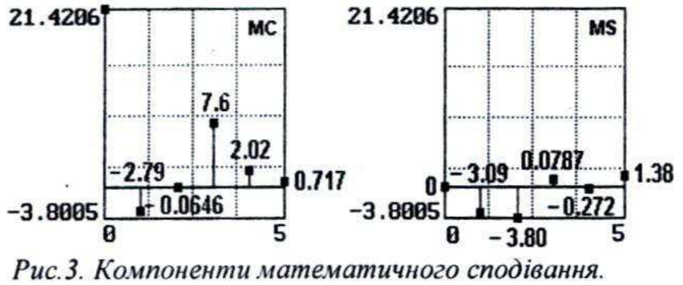
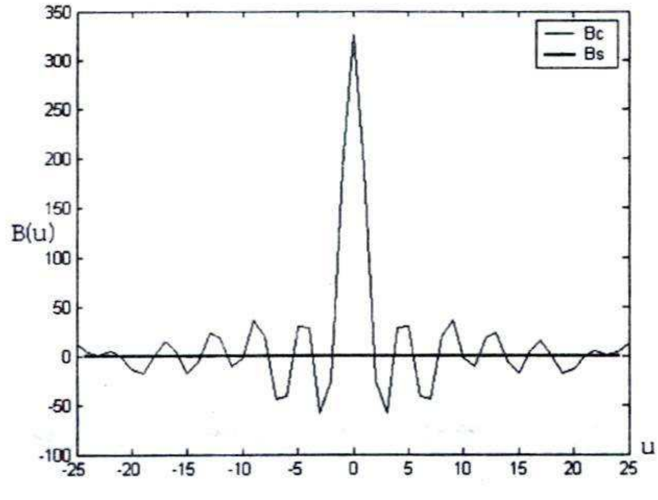
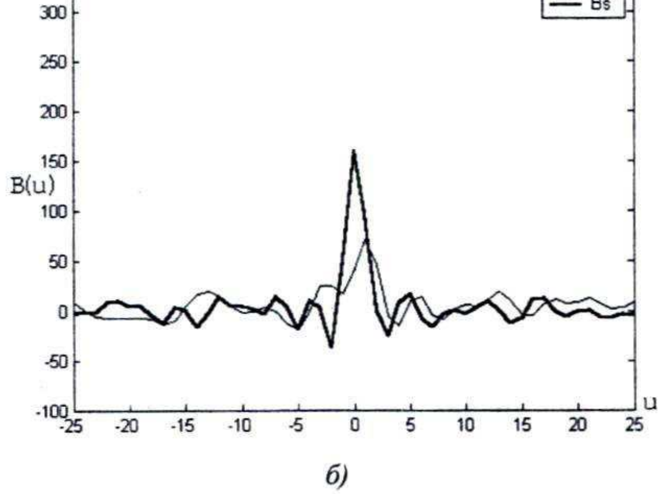


Рис.3. Компоненти математичного сподівання.



а)



б)

Рис.4. Когерентні оцінки кореляційних компонентів:
а) оцінка нульового кореляційного компонента;
б) оцінка другого кореляційного компонента.

На рис.4 показані графічні залежності від зсуву найбільш суттєвих за величиною кореляційних компонентів. Ці залежності можуть бути апроксимовані за допомогою формул:

$$B_0(u) = \frac{1}{2}\left(D_c e^{-\alpha_c |u|} + D_s e^{-\alpha_s |u|} \right) \cos \beta u \cos \omega_0 u \, ,$$

$$B_2^c(u) = \frac{1}{2}\left(D_c e^{-\alpha_c |u|} - D_s e^{-\alpha_s |u|} \right) \cos \beta u \cos \omega_0 u + \\ + D_{cs} e^{-\alpha_{cs} |u|} \cos \beta u \sin \omega_0 u,$$

$$B_2^s(u) = \frac{1}{2}\left(D_s e^{-\alpha_s |u|} - D_c e^{-\alpha_c |u|} \right) \cos \beta u \sin \omega_0 u + \\ + D_{cs} e^{-\alpha_{cs} |u|} \cos \beta u \cos \omega_0 u.$$

З використанням цих формул та співвідношень (5)-(8), (11)-(13), (15)-(17) і (18)-(21) можуть бути обчислені конкретні значення показників якості оцінювання. Також може бути вирішена зворотня задача – вибрані такі параметри статистичної обробки, які забезпечують наперед задані показники якості оцінювання.

4. ВИСНОВКИ

Розглянуто та досліджено властивості когерентних оцінок ймовірнісних характеристик періодично корельованих випадкових прпоцесів.

Методом когерентного усереднення проаналізовано структуру напружень, що виникають у підшипниковому вузлі з нерівномірним радіальним натягом.

5. ЛІТЕРАТУРА

1. *Ксистрис, Санкар, Остигай. Оценка надежности машин по степени усталостного повреждения, накопленого вследствие случайных вибраций. // Конструирование и технология машиностроения. — 1978. — №4. — С.14-21.*
2. *Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. — Л.:Гидрометеоиздат, 1987. — 320 с.*
3. *Михайлишин В.Ю., Яворский И.Н. Компонентное оценивание периода стохастической повторяемости ритмических сигналов // Автоматика. — 1993. — №4. — С. 44-48.*
4. *Юзефович Роман. Зміна кроку дискретизації ритмічних сигналів вібрації підшипника кочення // Матеріали відкритої науково-технічної конференції молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім.Г.В.Карпенка НАН України. — Львів, 2002. — С.118-120.*