# ДВІ ЗАДАЧІ РОЗБИТТЯ

*Надія ТИМОФІЄВА*
*МННЦ ІТіС НАН та Міносвіти України 03022, Київ, просп. Ак. Глушкова, 40,*
*тел.: (044) 266 53 52, факс (044) 266 1570*

## ABSTRACT

Two subclasses of the problems of partitioning which are divided by a method of assigning of entry datas are considered. Mathematical models are elaborated for them, a structure of entry datas is investigated, an obective function is formulated. Differences of their mathematical models are investigated. For beforehand assigned order of the set partitioning into subsets, elements of which are arguments of the objective function, its values shanges are analyzed. It is proved, that for assigned order for both types of the problems of partitioning , its values changes follow the laws of piece-monotonons functions.

The results of these researches may be used for elaboration the practical problems of partitioning.

## 1. ВСТУП

Задачі розбиття грунтовно досліджені як закордонними так і вітчизняними вченими, наприклад [1-3]. Для розв'язання цих задач використовуються ітераційні, послідовні методи, динамічне програмування [1, 3]. Досить часто використовуються способи ієрархічної ростучої класифікації або ієрархічної спадної класифікації.

Але дослідженню природи цих задач, аналізу аргумента цільової функції, яким є розбиття множини на підмножини, аналізу вхідних даних достатньої уваги не приділяється. У статті на прикладі двох підзадач задач розбиття, які відрізняються між собою способом завдання вхідних даних (їх математичні постановки подано нижче), коротко висвітлено ці проблеми. Незважаючи на те, що цільова функція для них формулюється по різному, а для їх розв'язання необхідно розробляти різні підходи, в літературі ці задачі ототожнюються наприклад [1].

В літературі [2 3] оговорено, що значення цільової функції на всій множині змінюється за законами монотонних функцій, але строгого доведення не наводиться. Знання властивостей задач розбиття дозволяє строго довести, що вона змінюється за законами кусково-монотонних функцій.

## 2. ПРО АРГУМЕНТ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ ЗАДАЧ РОЗБИТТЯ

Так як аргументом цільової функції в задачах розбиття є розбиття $n$ елементної множини $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ на підмножини, спочатку розглянемо характерні властивості цих об'єктів і структуру їх множини.

Розбиттям $n$ елементної множини $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ на $\eta$ підмножин (блоків) назвемо множину підмножин $\rho=\{\rho_1,\dots,\rho_\eta\}$ таку, що $\rho_1\cup\dots\cup\rho_\eta=A$, $\rho_j\neq\varnothing$ , $\rho_j\cap\rho_t=\varnothing$, $j\neq t$, $j,t\in\{1,\dots,\eta\}$,. Непуста підмножина $\rho_j=\{a_1,\dots,a_{\xi_j}\}$ , $a_s\in A$, $s\in\{1,\dots,n\}$, може мати від $1$ до $n$ елементів, $\xi_j$ - кількість $a_s$ у підмножині $\rho_j$.

Два розбиття $\rho$ і $\rho^*$ назвемо тотожними, якщо кількість їх підмножин однакова і для будь-якої підмножини $\rho_j$ можна знайти у множині $\rho^*$ підмножину $\rho^*_t$ , яка не відрізняється від $\rho_j$ ні кількістю елементів ні самими елементами.

Множину розбиттів позначимо $\Theta$. Вважатимемо, що $\Theta$ упорядкована у заданому порядку, а її елементи перенумеровані від $1$ до $q$ . В подальшому розбиття множини на підмножини позначимо $\rho^k$ , де $k$ порядковий їх номер у множині $\Theta$ .

**Означення.** Два нетотожні розбиття $\rho^k,\rho^l\in\Theta$ назвемо ізоморфними, якщо кількість їх підмножин однакова ($\eta^k=\eta^l$ ), і для будь-якої підмножини $\rho^k_j$ у розбитті $\rho^k$ знайдеться підмножина $\rho^l_t$ для якої $\xi^k_j=\xi^l_t$ .

Підмножину $L_{\eta^k}\subset\Theta$ , яка складається з ізоморфних розбиттів, назвемо підмножиною ізоморфних розбиттів. Кількість $\rho^k$

у ній $\frac{n!}{\xi_1^k!\xi_2^k!\ldots\xi_{\eta^k}^k!\,m_s!}$, де $m_s$ - число підмножин $\rho_j^k,\rho_t^k\subset\rho^k$, у яких $\xi_j^k=\xi_t^k$, $s\in\{1,\ldots,e\}$, $e$ - кількість блоків, кожен із яких об'єднує $\rho_j^k$ з однаковою кількістю $\xi_j^k$.

Отже пошук оптимального значення цільової функції в задачах розбиття проводиться або на всій множині $\Theta$, або на підмножинах ізоморфних розбиттів $L_{\eta^k}$.

## 3. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧ РОЗБИТТЯ

Математична модель задач розбиття, як правило, задається однією множиною $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Але, в залежності від їх типу, вхідні дані у них задаються по-різному. Від цього залежить спосіб завдання цільової функції, способи і алгоритми розв'язання цих задач.

Отже за способом завдання вхідних даних в задачах розбиття можна виділити такі підкласи: а) задачі, у яких вхідними даними є значення вагів між заданими елементами $a_t,a_j\in A$ Це - кластеризація, таксономія, компоновка, розрізання графа на задану кількість частин, та ін.; б) задачі, у яких вхідні дані визначають властивість заданих елементів $a_j\in A$. До них належить задача про купу каміння, задача розбиття множини споживачів на зони обслуговування.

Побудуємо математичну модель для задачі а)

Нехай задано множину $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$, між елементами яких визначено взаємозв'язок, кількісне значення яких подамо симетричною матрицею $C$. Назвемо вагою величину, що визначає залежність, яка існує між елементом $a_t$ і елементом $a_j$.

Уведемо також (0,1)-симетричну комбінаторну матрицю $Q(\rho^k)\in Q_\Theta$, яка задає розподілення елементів $a_j$ множини $A$ по підмножинах $\rho_j^k$ для $k$ - го розв'язку задачі.. Елемент цієї матриці $g_{tj}(\rho^k)=\mathbf{1}$, якщо елементи $a_t$ і $a_j$ відносяться до однієї підмножини, і $g_{tj}(\rho^k)=\mathbf{0}$, якщо $a_t$ і $a_j$ відносяться до різних підмножин; $Q_\Theta$ упорядкована множина усіляко можливих таких матриць. Матриця $Q(\rho^k)$ утворюється із попередньої $Q(\rho^l)$ за правилами генерування усіляко можливої множини розбиттів.

Подамо елементи правого поля матриці $Q(\rho^k)$ комбінаторною функцією $\overline{\beta}(\overline{f}(\overline{x})(\rho^k))=(\beta(f(x_1)(\rho^k)),\ldots$ $\ldots,\beta(f(x_m)(\rho^k))$, а елементи правого поля матриці $C$ числовою функцією $\overline{\varphi}(\overline{x})=(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_m))$, де $m=\frac{n(n-1)}{2}$ кількість складових у $\overline{\beta}(\overline{f}(\overline{x})(\rho^k))$ і $\overline{\varphi}(\overline{x})$. Функція цілі для задачі а) набуде вигляду

$$F(\rho^k)=\sum_{j=1}^{m}\beta(f(x_j)(\rho^k))\,\varphi(x_j) \qquad (1)$$

Задача а) полягає у тому, щоб об'єднати однорідні елементи в одні і ті ж блоки. В залежності від критерію, який використовується для оцінки результату розв'язання задачі, однорідні елементи можуть мати між собою або найбільші ваги або найменші. Вважатимемо, що однорідні елементи мають між собою найбільші ваги і вони об'єднуються в одну підмножину. В цьому випадку задача розбиття полягає у знаходженні такого аргументу $\rho^k\in\Theta$, для якого функція цілі (1) при задоволенні заданих умов була б найбільшою.

Побудуємо математичну модель для задачі б). До них відноситься задача про купу каміння, яка формулюється так. Задано множину каменів $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$, кожному із яких присвоєно додатнє число, його вагу $V(j)$. Необхідно розділити цю множину на задану кількість куп так, щоб вага самої важкої із них була б найменшою.

Математична модель для цієї задачі також задана однією множиною $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$, але між $a_j\in A$ відсутні зв'язки. Натомість вхідні дані задано скінченною послідовністю (числовою функцією) $\overline{\varphi}(\overline{x})$, складові якої $\varphi(x_j)$ визначають характерні властивості елемента $a_j$ (в задачі про купу каміння це вага $j$ - го каменя).

Для визначення розподілення елементів множини $A$ по підмножинах $\rho_j^k$ для $k$ - го варіанту розв'язку задачі уведемо комбінаторну функцію

$\overline{\beta}(\overline{f}(\overline{x})(\rho^k))=(\beta(f(x_1)(\rho_t^k)),\ldots$

$\ldots, \beta(f(x_n)(\rho_i^k))$, де $\beta(f(x_j)(\rho_i^k)) \in \{0,1\}$ і $\beta(f(x_j)(\rho_i^k))=1$, якщо $a_i$ - й елемент входить у $\rho_i^k$ - й блок розбиття $\rho^k$, і $\beta(f(x_j)(\rho_i^k))=0$ в іншому разі. Для цього типу задач запишемо цільову функцію

$$F(\rho^k)=\max_{\substack{\rho_i^k \subset \rho^k \\ i=1,\eta^k}} \Big( \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j)\beta(f(x_j)(\rho_1^k)), \ldots, \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j)\beta(f(x_j)(\rho_{\eta^k}^k)) \Big)$$

Задача б) полягає у знаходженні такого $\rho^{k*}$, для якого цільова функція $F(\rho^k)$ на $L_{\eta^k} \subset \Theta$ набуває найменшого значення

$$F(\rho^{k*})=\min_{\rho^k \in L_{\eta^k} \subset \Theta} F(\rho^k)$$

# 4. ПРО ЗМІНУ ЗНАЧЕНЬ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

Для вибору способів розв'язання задач а) і б) необхідно спочатку визначити, яким чином змінюється цільова функція на усій множині розбиттів. Відомо [2,3], якщо $\rho^k \in \Theta$ упорядкувати так, що або $\eta^k < \eta^l$, або $\eta^k > \eta^l$, $k < l$, то цільова функція $F(\rho^k)$ змінюється за законами монотонних функцій.

Розглянемо, наскільки правильне це твердження. Спочатку наведемо такий приклад.

Задано множину $A=\{1,\ldots,5\}$. Для задачі а) числова функція $\varphi(x)=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$, а для задачі б) - $\varphi(x)=(1,2,3,4,5)$. Комбінаторна функція $\beta(f(x)(\rho^k))$ для задачі а) змінюється в залежності від значення $\rho^k \in \Theta$ і з урахуванням властивостей комбінаторних матриць. Для задачі б) функція змінюється за правилами, описаними вище.

Для цих параметрів підрахуємо значення цільової функції $F(\rho^k)$, $k=\overline{1,52}$. Результати обчислення наведено у табл. 1. Перша колонка містить кількість блоків $\eta^k$ у розбитті $\rho^k$ для підмножини $L_{\eta^k} \subset \Theta$. Друга - розбиття $\rho^k$, третя - значення комбінаторної функції для задачі а), четверта - значення цільової функціїї для задачі а), п'ята - значення цільової функції для задачі б). У зв'язку з обмеженням на об'єм статті для підмножин $L_{\eta^k}$ у табл. 1 наведено лише ті $\rho^k$, для яких $F(\rho^k)$ набуває найбільшого і найменшого значень.

Таблиця 1. Зміна значень цільові функції $F(\rho^k)$ для задач а) і б)

| | $\overline{\varphi}(\overline{x})$ | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | (1 2 3 4 5) | 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 | 55 | 55 |
| 2 | (1 2 3 4) (5) | 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 | 25 | 10 |
| | (5 2 3 4) (1) | 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 | 45 | 14 |
| 2 | (1 2 3) (4 5) | 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 | 18 | 9 |
| | (4 1 2) (3 5) | 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 | 19 | 8 |
| | (3 4 5) (1 2) | 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 | 28 | 12 |
| 3 | (1 2 3) (4) (5) | 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 | 8 | 6 |
| | (4 5 3) (1) (2) | 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 | 27 | 12 |
| 3 | (3 2) (1 4) (5) | 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 | 8 | 5 |
| | (2 3) (4 5) (1) | 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 | 15 | 9 |
| 4 | (1 2) (3) (4) (5) | 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 1 | 5 |
| | (5 4) (1) (2) (3) | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 | 10 | 9 |
| 5 | (1) (2) (3) (4) (5) | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 0 | 5 |

Із результатів обчислень видно, що у підмножині ізоморфних розбиттів $L_{\eta^k}$ по відношенню до $L_{\eta^l}$, $\eta^k < \eta^l$, і $\eta^l = \eta^k + 1$, або $\eta^k = \eta^l$, а $\xi_1^k < \xi_1^l$, значення цільової функції $\min_{\rho^k \in l_{\eta^k}} F(\rho^k) < \max_{\rho^l \in L_{\eta^l}} F(\rho^l)$.

Отже, те, що значення цільової функції для оговореного вище порядку на множині $\Theta$ змінюється за законами монотонних функцій, не є справедливе.

Дослідимо зміну значень цільової функції на множині $\Theta$ для загального випадку. Складові $\varphi(x_j)$ функції $\overline{\varphi}(\overline{x})$ є випадкові змінні і для конкретних задач неоднакові. Комбінаторна функція змінюється лише в залежності від розбиття $\rho^k \in \Theta$ за законами комбінаторних матриць і для будь якої задачі значення її постійне. Розглянемо, яким чином вона змінюється на множині розбиттів $\Theta$. Так як значення $\beta(f(x_j)(\rho^k)) \in \{0,1\}$, визначимо, яким чином змінюється кількість одиниць у $\overline{\beta}(\overline{f}(\overline{x})(\rho^k))$ в залежності від $\rho^k$.

Наведемо такий приклад. Нехай задано множину $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8)$, $n=8$.

За формулою $\sum_{j=1}^{\eta^k} \frac{\xi_j^k(\xi_j^k-1)}{2}$ [4] для підмножин $L_{\eta^k}$ обчислимо кількість одиниць у комбінаторних функціях. Їх кількість для розбиттів $\rho^k \in L_{\eta^k}$ і $\rho^l \in L_{\eta^l}$ різна, а для розбиттів $\rho^k \in L_{\eta^k}$ однакова. Результати обчислень наведено у табл. 2. Перша колонка містить номер підмножини $L_{\eta^k}$, друга - розбиття числа $n$, яке задає кількість блоків $\eta^k$ у $\rho^k$ і кількість елементів у $\rho_j^k$, третя - кількість одиниць у функції $\overline{\beta}(\overline{f}(\overline{x})(\rho^k))$ для $\rho^k \in L_{\eta^k}$.

Таблиця 2. Кількість одиниць у комбінаторних функціях для підмножин $L_{\eta^k} \subset \Theta$.

| 1 | 2 | | | | | | | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\xi_1^k$ | $\xi_2^k$ | $\xi_3^k$ | $\xi_4^k$ | $\xi_5^k$ | $\xi_6^k$ | $\xi_7^k$ | $\xi_8^k$ | |
| 1 | 8 | | | | | | | | 28 |
| 2 | 7 | 1 | | | | | | | 21 |
| | 6 | 2 | | | | | | | 16 |
| | 5 | 3 | | | | | | | 13 |
| | 4 | 4 | | | | | | | 12 |
| 3 | 6 | 1 | 1 | | | | | | 15 |
| | 5 | 2 | 1 | | | | | | 11 |
| | 4 | 3 | 1 | | | | | | 9 |
| | 4 | 2 | 2 | | | | | | 8 |
| | 3 | 3 | 2 | | | | | | 7 |
| 4 | 5 | 1 | 1 | 1 | | | | | 10 |
| | 4 | 2 | 1 | 1 | | | | | 7 |
| | 3 | 3 | 1 | 1 | | | | | 6 |
| | 3 | 2 | 2 | 1 | | | | | 5 |
| | 2 | 2 | 2 | 2 | | | | | 4 |
| 5 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | 6 |
| | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | | | | 4 |
| | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | 2 |
| 6 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 3 |
| | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 2 |
| 7 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Незалежно від вхідних даних (функція $\varphi(x)$) найменша кількість одиниць у комбінаторних функціях для $L_{\eta^k} \subset \Theta$ порівняно з $L_{\eta^l} \subset \Theta$, $\eta^k < \eta^l$, $\eta^l = \eta^k + 1$, або $\eta^k = \eta^l$, $\xi_1^k > \xi_1^l$, менша, ніж найбільша їх кількість для $L_{\eta^l}$. У [4] детально розглянуто цю властивість комбінаторних функцій для задачі а).

Сформулюємо теорему, яка справедлива як для задачі а) так і для задачі б).

**Теорема**. (Справедлива для $n>6$ і $1<\eta^k \le n-3$). Якщо множина розбиттів $\Theta$ упорядкована ізоморфними підмножинами $L_{\eta^k}, L_{\eta^l}$ таким чином, що $\eta^k \le \eta^l$ або $\eta^k \ge \eta^l$, $k \ne l$, то цільова функція змінюється за законами кусково-монотонних функцій, а в точці розриву її приріст $\Delta F(\rho^k)$ змінює знак на додатній у випадку кусково-монотонно зростаючої, або від'ємний для кусково-монотонно спадної функції.

# 5. ВИСНОВКИ

Отже, при розробленні алгоритмів і методів для розв'язання задач розбиття, слідураховувати описані властивості цих задач. Якщо, наприклад, проводити пошук оптимального значення цільової функції на підмножинах $L_{\eta^k}, L_{\eta^l}$, для яких $\eta^k = \eta^l$, то $F(\rho^k)$ набуває найбільшого значення для $\rho^k \in L_{\eta^k}$, у якого $\xi_1^k > \xi_j^k$, а $\xi_j^k = 1$ для $j=\overline{1,\eta^k}$. Найменшого значення вона набуває для $\rho^l \in L_{\eta^l}$, у якого $\xi_1^k \le \sum_{j=2}^{\eta^k} \xi_j^k$. Якщо для цього випадку при розв'язанні задачі не увести додаткових обмежень, можна одержати некоректний результат.

# ЛІТЕРАТУРА


1. Винцюк Т.К. Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов. К.: Наукова думка, 1987 262 с.

2. Винцюк Т.К. Оптимальное разбиение последовательности элементов на подпоследовательности//Кибернетика. 1970, N 4. С. 128 - 133.

3. Жамбю М. Иерархический кластер анализ и соответствия. М: Финансы и статистика, 1988. 342 с.

4. Тимофієва Н.К. Про властивості комбінаторних функцій в задачах комбінаторної оптимізації//Комп'ютерна математика . Оптимізація обчислень. Зб. наукових праць. - Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України - 2001- том 2. - С. 411 - 417.