СИНТЕЗ ЗОБРАЖЕНЬ, ЩО ХАРАКТЕРИЗУЮТЬСЯ ТОЧКОВИМИ ТИПАМИ СИМЕТРІЇ

В.М.Хавалко

Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури, м.Львів-31, а/с 5446,
Тел./факс (0322) 63-03-11, victorkh@dndiii.lviv.ua

В статті розглянуто задачу синтезу зображень і складних геометричних об'єктів (СГО), які характеризуються точковими типами симетрії. Для розширення множини синтезованих зображень як непохідні елементи запропоновано використовувати фрактальні криві різних розмірностей та рівнів деталізації. Побудовано та програмно реалізовано інформаційно-аналітичну систему (ІАС) синтезу зображень, в тому числі і симетричних.

ВСТУП

В теорії і практиці побудови систем розпізнавання, оцінки, класифікації і синтезу зображень зустрічаються зображення різного походження, фізичної природи і структури. У зв'язку з цим розглядають прості і складні зображення. До простих зображень відносять зображення, які не підлягають подальшому розбиттю на простіші і використовуються як непохідні елементи для синтезу і опису зображень складнішої структури і геометричної форми. Досить часто такі зображення характеризуються тим чи іншим типом симетрії. Для побудови складних зображень та опису взаємозв'язків між структурними елементами таких зображень прийнято використовувати R-функції [1], а також структурний [2] і функціональний [3] підходи. Однак застосування непохідних елементів, які описуються засобами традиційної Евклідової геометрії, не може забезпечити достатньої різноманітності та повноти множини синтезованих зображень, а тому доцільно доповнити цю множину непохідними елементами, які не є традиційними в сенсі Евклідової геометрії. Такими непохідними елементами є криві та поверхні фрактальної геометрії [4, 5], при побудові яких прийнято використовувати рекурсивний підхід [6, 7] та системи ітераційних функцій [8, 9].

1. ТОЧКОВІ ТИПИ СИМЕТРІЇ

Відповідно до основних означень [1], якщо O – об'єкт в R^n, а $Q : R^n \to R$ перетворення, яке визначається формулою

$$x' = Qx = Ax + b\,,$$

де $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $x' = (x'_1,\ldots,x'_n)$, $b = (b_1,\ldots,b_n)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то об'єкт $O \subset R^n$ характеризується деяким типом симетрії, якщо існує хоча б одне перетворення $Q \in \{Q_i\}$, відмінне від одиничного перетворення, таке що $Q * O = O$.

Крім цього, якщо $f = 0$ – рівняння СГО O, який симетричний відносно перетворення Q, то вважаємо, що рівняння $f = 0$ має такий самий тип симетрії (тобто $f = 0$ симетричне відносно Q), якщо $f(Qx) = f(x)$.

Рівняння $f = 0$ будемо називати кососиметричним відносно Q, якщо

$$f(Qx) = -f(x).$$

Загальноприйнята така класифікація за типами симетрій:

- Точкові типи симетрії:
  - симетрія відносно точки;
  - симетрія інверсії;
  - симетрія відносно площини;
  - симетрія відносно осі.
- Симетрії трансляційного типу.

Перетворення симетрії, які зберігають нерухомими хоча би одну точку простору прийнято називати точковими. Очевидно, що будь-яке точкове перетворення має вигляд

$$x' = Ax\,. \tag{1}$$

В інших випадках говорять про симетрію трансляційного типу.

1.1. Симетрія відносно осі

Для синтезу СГО, які характеризуються симетрією відносно осі, запропоновано новий алгоритм, який базується на матриці перетворення симетрії порядку N відносно осі Ox_1.

$$C_{x,N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi/N & \sin 2\pi/N \\ 0 & -\sin 2\pi/N & \cos 2\pi/N \end{pmatrix}.$$

Означення 1. СГО O є симетричним відносно прямої C, яка називається віссю симетрії, якщо після повороту на кут $\alpha_N = 2\pi/N$, де N – ціле число більше одиниці, він займає початкову область простору. N називається порядком симетрії осі.

1.2. Симетрія інверсії

Симетрії цього типу відповідає перетворення (1) з матрицями:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Якщо $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 0$ – рівняння СГО або зображення O, який володіє симетрією в сенсі її інваріантності відносно перетворень (2). При цьому саме рівняння $f(x) = 0$ відносно перетворень (2) може бути і не симетричним. Очевидно, що рівняння $f(x_1, -x_2, -x_3) = 0$ також буде рівнянням СГО O при $i = 1$, $f(-x_1, x_2, -x_3) = 0$ при $i = 2$ і $f(-x_1, -x_2, x_3) = 0$ при $i = 2$. Тоді симетричні рівняння для A_1, A_2 та A_3 відповідно матимуть вигляд:

$$f_1(x) = 0.5 * [f(x_1, x_2, x_3) + f(x_1, -x_2, -x_3)] = 0,$$
$$f_2(x) = 0.5 * [f(x_1, x_2, x_3) + f(-x_1, x_2, -x_3)] = 0, \qquad (3)$$
$$f_3(x) = 0.5 * [f(x_1, x_2, x_3) + f(-x_1, -x_2, x_3)] = 0.$$

Замість операції додавання, згідно з [1], в рівняннях (3) можна використовувати довільний тип операцій об'єднання або перетину, які грунтуються на R-функціях.

1.3. Симетрія відносно площини

Симетрії цього типу відповідає перетворення (1) з матрицями:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ – для СГО, які симетричні відносно площини x_1Ox_2;

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – для СГО, які симетричні відносно площини x_1Ox_3;

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – для СГО, які симетричні відносно площини x_2Ox_3.

Методики описані в попередніх пунктах, справедливі для цього типу точкової симетрії і є загальним прикладом, який використовується в більшості випадків. Однак в плані обчислювальних затрат цей тип симетрії приводить до громіздких виразів, що ускладнює реалізацію в реальному часі.

1.4. Симетрія відносно точки

Синтез зображень симетричних відносно точки [1] полягає в побудові такого рівняння $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, для якого справедливі такі припущення.

Якщо $f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$ – довільне рівняння СГО O_1, яке характеризується симетрією відносно перетворення (1), де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

але саме рівняння не є симетричними відносно цього перетворення, то рівняння СГО O_1 можна записати у вигляді

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0.5 * [f(x_1, x_2, x_3) + f(-x_1, -x_2, -x_3)] = 0$$

і це рівняння буде симетричним відносно типу симетрії, що розглядається. Інший підхід до побудови зображень, які характеризуються симетрією відносно точки і який також базується на властивостях R-функцій, розглянуто в [1].

2. НЕПОХІДНІ ЕЛЕМЕНТИ ФРАКТАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Сучасні методи синтезу складних зображень використовують дійсні функції для опису елементарних об'єктів до яких застосовується ряд операцій, для синтезу більш складних зображень. Задання або вибір множини елементарних об'єктів, а також опис основних операцій, які дозволяють проводити перетворення над об'єктами, створювати плавні об'єкти та ін. належать до основних задач при синтезі складних зображень [10, 11].

В цій роботі пропонується доповнити традиційну, в сенсі Евклідової геометрії, множину непохідних елементів основними типами кривих фрактальної геометрії. Насамперед, це продиктовано тим, що фрактальна геометрія серед рекурсивних підходів є глобальним та потужним засобом, а протягом багатьох років розвитку розроблено велику кількість класів і типів методів та алгоритмів для роботи з СГО, які характеризуються високою ступінню складності і для опису яких потрібно застосовувати інший апарат ніж Евклідова геометрія.

До основних типів фрактальних кривих та об'єктів належать: просторово-заповнюючі і традиційні лінійні криві, а також різноманітна множина тривимірних об'єктів (губка Менгера, трикутник Серпінського, множини Жулія та ін.).

До традиційних одновимірних фрактальних кривих, які широко використовуються при синтезі складних природних структур, належать крива Коха, 3/2 - крива та ін. Ці, а також багато інших фракталів відносяться до класу геометричних фракталів, які є найбільш наочними і зрозумілими. Поняття елементарного об'єкта в фрактальній геометрії дещо відрізняється від такого ж поняття в інших підходах синтезу та представлення зображень. Суть процесу побудови фрактальних кривих полягає в тому, що на початку задається відрізок певної довжини (ініціатор), кожна лінійна частина якого на подальших етапах побудови замінюється генератором, який з допомогою коефіцієнтів масштабування набуває потрібних розмірів [12]. На наступних етапах побудови кожен відрізок ламаної попереднього етапу замінюється генератором зменшеним в 4 рази для $3/2$ -кривої і в 3 рази для кривої Коха. Процес побудови триває до тих пір, поки не досягається задовільна точність, або, коли зміни при переході від одного етапу до іншого стають непомітними для ока спостерігача.

3. СИСТЕМИ ІТЕРАЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Ще одним способом побудови фракталів є задання систем ітераційних функцій (СІФ). Систем, які відображають одну багатовимірну множину в іншу. Найбільш проста система ітераційних функцій складається з афінних перетворень площини:

$$u = a * x + b * y + e$$
$$v = c * x + d * y + f.$$

Отже, зображення кодується декількома простими перетвореннями (в нашому випадку афінними), тобто коефіцієнтами цих перетворень.

Якщо систему ітераційних функцій замінити оператором Хатчінсона W, то ітераційний процес можна записати наступним чином

$$A_{k+1} = W(A_k),\ k = 0,1,2,\dots,$$

де A_0 – початкова множина (зображення), а $\{A_k\}$ – послідовність множин (зображень), отримана багаторазовим застосуванням W. Отримуємо послідовність, яка прямує до кінцевого зображення A_∞, яке називається атрактором СІФ і залишається інваріантним щодо системи ітераційних функцій. В термінах W це означає

$$A_\infty = W(A_\infty).$$

Кінцеве зображення (атрактор) A_∞ і буде фракталом.

4. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ СИСТЕМИ СИНТЕЗУ СИМЕТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

На основі концепцій побудови ІАС синтезу зображень[13], розбиття таких систем на рівні абстракції [14], а також запропонованих алгоритмів синтезу СГО симетричної структури створено ІАС синтезу складних зображень і алгоритмічне забезпечення до цієї системи. В розробленій ІАС задача синтезу розв'язується шляхом виконання двох наступних етапів: 1) побудова аналітичного опису СГО, використовуючи множини елементарних геометричних об'єктів, операцій та відношень [10, 11]; 2) візуалізація синтезованого СГО або інше застосування отриманого аналітичного виразу.

Користувач ІАС взаємодіє з системою за допомогою найвищого рівня абстракції – графічного інтерфейсу користувача (ГІК). Ця взаємодія відбувається через спроектовану мову, яка може бути як текстовою або візуальною, так і поєднувати ці два види. На цьому рівні доступні засоби для побудови, модифікації, архівації і знищення як простих, так і складних об'єктів, а також присутні засоби для аналізу проектування.

Побудована ІАС функціонує таким чином. Нехай потрібно синтезувати чи відтворити СГО. Користувач, за допомогою ГІК, вибирає непохідні елементи та операції чи відношення з відповідних бібліотек. Кожен непохідний елемент визначений за допомогою параметризованої функції дійсних змінних. Відповідні параметри, під час вибору елемента з бібліотеки, в інтерактивному режимі задає користувач. Для підвищення ефективності роботи системи користувач повинен чітко знати логіку побудови СГО, який він хоче синтезувати. Якщо потрібного непохідного елемента в бібліотеці не має, то користувач, використовуючи СІК, може доповнити бібліотеку необхідним елементом. Для цього передбачено використання стандартних математичних функцій ('exp', 'sin', 'sqr', 'sqrt', 'cos' та ін.). Таким чином, користувач, за допомогою ІАС, задає аналітичну конструкцію, яка описує синтезований СГО. При цьому основні теоретико-множинні операції задаються використовуючи зарезервовані символи ('|' – об'єднання, '&' - перетин, '\' - віднімання, '~' - заперечення, '@' – Декартовий добуток та ін.). Згідно з заданою аналітичною формулою та вибраною гамою кольорів ІАС синтезує зображення. При необхідності, користувач може побудувати поверхню, яка відповідає синтезованому СГО.

У випадку синтезу СГО симетричної структури користувач ІАС, використовуючи вікно вибору типів симетрії (рис.1), має можливість вибрати відповідний тип симетрії, який буде притаманним синтезованому СГО.

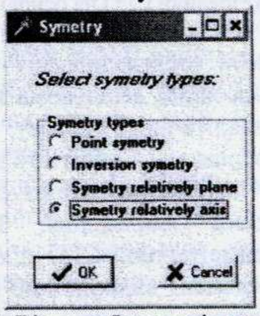

Рис.1. Вікно вибору типів симетрії

Після цього користувачу необхідно задати початкові координати синтезованого зображення (рис.2), а також порядок симетрії, тип непохідних елементів, які при цьому будуть використовуватись і рівень рекурсії у випадку вибору фрактальних кривих як непохідних елементів (рис.3).

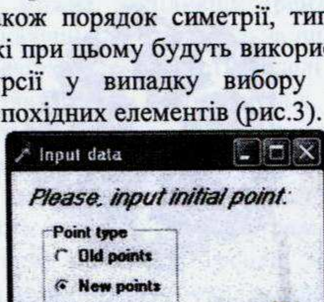

Рис.2. Вікно задання початкових координат

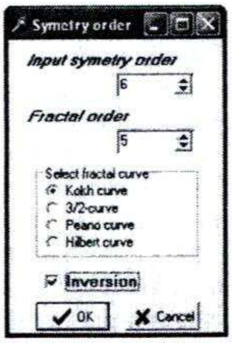

Рис.3. Вікно задання параметрів синтезованого СГО

Множина побудованих, за допомогою ІАС, зображень і СГО симетричної структури (рис.4, рис.5), які характеризуються широкою різноманітністю і крім цього СГО є інваріантними щодо різних форм представлення непохідних елементів.

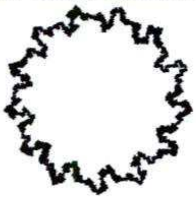

Рис.4. Синтезований СГО на основі $3/2$ -кривої

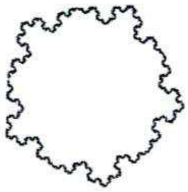

Рис.5. Синтезований СГО на основі кривої Коха

Синтезовані зображення зручні в зберіганні, адже описуються лише декількома коефіцієнтами – параметрами аналітичного виразу, що відповідає даному типу зображень. Саме типу зображень тому, що змінюючи параметри отримуємо можливість синтезувати різні зображення. Так на рис.6. зображено осесиметричний СГО п'ятого порядку, а як непохідний елемент використано криву Гільберта четвертого порядку. Крім цього візуалізація синтезованих зображень спрощується завдяки внутрішньому представленню побудованих аналітичних виразів.

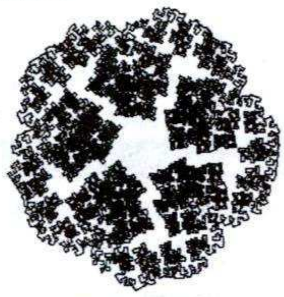

Рис.6. Осесиметричний СГО на основі кривої Гільберта

ВИСНОВКИ

Запропоновані алгоритми поєднують елементи функціонального, структурного і рекурсивного підходів. Саме таке поєднання призводить до різкого зменшення обчислювальних затрат, та затрат, які необхідні на зберігання синтезованих СГО і зображень. Застосування функціонального підходу до синтезу зображень складної геометричної форми і структури , а систем ітераційних функцій – до опису непохідних елементів таких синтезованих СГО і зображень дає можливість досягнути високих коефіцієнтів стиску і дозволяє ефективним чином кодувати отримувані зображення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Рвачов В.Л. *Теория R–функций некоторые ее приложения*.- Киев: Наукова думка,1982.- 456 с.
2. Александров В.В., Горский Н.Д. *Алгоритмы и программы структурного метода обработки данных*.- Ленинград: Наука, 1983.- 208 с.
3. Pasko A., Adzhiev V., Sourin A., Savchenko V. *Function representation in geometric modelling: concepts, implementation and applications* // The Visual Computer.- 1995.- vol.11.- №8.- P.429-446.
4. Mandelbrot Benoit B. *The Fractal Geometry of Nature*.- WH Freeman and company, 1977.- 468P.
5. Massopust P.R. *Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets*.- San Diego, Calif.: Acad. Press, 1994.- 383 P.
6. Александров В.В., Горский Н.Д. *Представление и обработка изображений. Рекурсивный подход*.- Ленинград: Наука,1985.- 192с.
7. Мальцев А.И. *Алгоритмы и рекурсивные функции*.- М.:Наука, 1986.- 367с.
8. Michael Barnsley *Fractals everywhere*.- Academic press: Jones and Bartlett Publishers, 1988.- 394P.
9. Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D. et. al. *Fractals for the Classroom: Strategic Activities*.- New York: Springer-Verlag, 1999.- Vol. Two.- 187 P.
10. Хавалко В.М. *Використання теоретико-множинних операцій для синтезу та перетворень геометричних об'єктів* // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології.- 1999.- №386.- С.164-172.
11. Хавалко В.М. *Проблема вибору множини елементарних об'єктів для ефективного синтезу складних зображень* // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології.- 2000.- №392.- С.131-136.
12. Peitgen H.-O., Richter P.H. *The beauty of fractals: images of complex dynamical systems*.- Berlin: Springer, 1986.- 199 P.
13. Хавалко В.М. *Інформаційно-аналітична система синтезу та обробки зображень: концептуальний підхід* // Труды Одесского политехнического университета.- 2002.- Вып. 4(16).- С.86-90.
14. Хавалко В.М., Манишин І.Р. *Інформаційно-аналітична система як ефективний засіб синтезу складних зображень* // Комп'ютерні технології друкарства.- 2000.- №4.- С.301-308.