ІНФОРМАТИВНІСТЬ АФІННО-ІНВАРІАНТНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЕКЦІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ В ЇХ МОРФОЛОГІЧНОМУ АНАЛІЗІ

В.М.Корчинський
Дніпропетровський національний університет
49106, м. Дніпропетровськ, вул. Наукова, 13
Тел.: (0562)43-36-30 Факс: (0562)46-55-23
e-mail: buser @ ap1.net-rff.dsu.dp.ua

АНОТАЦІЯ

Визначені інформаційні характеристики (нормовані семіінваріанти функцій яскравості) та їх лінійні комбінації, найбільш інформативні при позиційно-інваріантному розпізнаванні проекційних зображень, одержаних в умовах дальньої фотограмметрії. Запропоновано спосіб визначення оптимальної вимірності простору моделі для забезпечення ідентифікації та аналізу таких зображень із заданою достовірністю.

1. ВСТУП

В роботах [1,2] було розвинено інформаційно-геометричну модель подання форм зображень проекційної природи, інваріантну стосовно їх афінних перетворень, спричинених зміною позиційних умов проекціювання. У відповідності з нею множина розподілів функцій яскравості таких зображень, одержаних при різних позиційних умовах проекціювання (ракурс, відстань), подається точками квадрик у просторі інформаційних характеристик – безрозмірних семіінваріантів $S_{n,m}$ парного порядку N від функцій яскравості, нормування яких здійснюється за правилом $Z_i = S_{i-1,N+1-i} \big/ S_{0,0}^{n}$, $i=\overline{1,N+1}$, де $n = N/2$. З геометричних позицій такі квадрики являють собою сфери при псевдоевклідовій метризації простору інформаційних характеристик $\mathbf{R}_n^{N+1}$, радіуси яких є афінно-інваріантними інформаційними ознаками. Розпізнавання зображення зводиться до визначення належності точки його подання псевдосферам, що визначаються еталонним зображенням у просторах моделі різних вимірностей (при різних N), причому афінні перетворення зображення спричинять зміщення точки його подання по кожній з цих псевдосфер. Необхідною умовою реалізації моделі є лінійна незалежність семіінваріантів функцій яскравості, на основі яких визначаються компоненти вектора його подання у просторі моделі, а збільшення його вимірності виправдане лише у випадку реального зростання інформативності. Між тим, існуючі оцінки свідчать, що лінійна незалежність семіінваріантів заданого порядку N може існувати лише в деякій області простору моделі, за межами якої використання усіх компонент вектора $\mathbf{Z}$ як інформаційних характеристик зображення є надлишковим. Ця обставина ставить проблему визначення інформативності подання проекційних зображень в рамках афінно-інваріантної моделі їх просторових форм з метою оптимізації алгоритмів морфологічного (позиційно-інваріантного) аналізу. Відповідні результати пов'язані з дослідженням структури перетворень вектору подання його геометричної форми, індукованих афінними перетвореннями у картинній площині.

2. ФІЗИЧНА МОДЕЛЬ ФОРМОУТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Розглядаються проекційні зображення, одержані в умовах дальньої фотограмметрії – відстані між точками об'єкту, відеодатчиком та картинною площиною вважаються суттєво більшими, ніж довжина хвилі випромінення – носія відеоінформації. Об'єкт приймається плоским, а просторовий розподіл інтенсивності випромінення елементів його поверхні описується на феноменологічному рівні – за допомогою індикатриси розсіювання (випромінювання). Вважається, що яскравість зображення пропорційна інтенсивності випромінення. Відповідність між точками об'єкту та його проекційного зображення приймається афінною, $\mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$, де $\mathbf{r}$, $\mathbf{x}$ – радіуси-вектори відповідних точок зображення та об'єкту в картинній та предметній площинах; $\mathbf{A}$ – матриця однорідних геометричних перетворень; $\mathbf{b}$ – вектор перенесень. (Випадок проективної відповідності реалізується використанням однорідних координат в картинній площині.)

Інтегральний зв'язок між функцією яскравості зображення $I(\mathbf{r})$ та скалярною яскравістю $I_0(\mathbf{r})$ в рамкках наведених припущень має вигляд [3]

$$I(\mathbf{r}) = C \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\mathbf{B}\cdot\mathbf{x}) P(\mathbf{r}-\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1)$$

де $P(\mathbf{x})$ – функція розсіювання точки (ФРТ); $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$; $C = (\lambda)^{-4}(Hd)^{-2}$, λ – довжина хвилі випромінення - носія відеоінформації, H – висота, з якої здійснюється фіксація зображення, d – відстань між відеодатчиком та картинною площиною.

Співвідношення (1) описує неточкову (нелокальну) відповідність між точками предметної та картинної площини і є основою для обчислення компонент вектору подання зображення $\mathbf{Z}$.

3. МЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРОСТОРУ МОДЕЛІ

Зв'язок семіінваріантів функції яскравості зображення S_{nm}, скалярної яскравості об'єкту $S_{nm}^{(0)}$ та ФРТ s_{nm}, обчислений на основі співвідношень (1) за методикою [1,2], має вигляд

$$S_{nm} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} C_n^k C_m^l b_{11}^k b_{21}^{n-k} \times$$
$$\times b_{22}^l b_{21}^{m-l} S_{k+m-l,n-k+l}^{(0)} + s_{nm}, \quad (2)$$

де C_n^m – біноміальні коефіцієнти; b_{ij} – компоненти матриці $\mathbf{B}$. Відповідні перетворення вектору $\mathbf{Z}$, індуковані зміною позиційних умов проекціювання, у матричній формі:

$$\mathbf{Z}_2 = k_{12}^n \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{Z}_1 + K_2 \mathbf{z}, \quad (3)$$

де $\mathbf{M}$ – матриця перетворення (2); індекси 1, 2 відповідають еталонному зображенню та зображенню, що аналізується; $k_{12} = C_1/C_2$; $\mathbf{z}$ – вектор подання ФРТ; $K_2 = \left[C_2 Y_2 M_{00}^{(2)}\right]^{-n}$; $Y_2 = \det(\mathbf{B})$. Через M_{00} позначено нульовий декартів момент функції яскравості зображення $\mathbf{Z}_2$. У випадку точкової (локальної) відповідності між об'єктом та його проекційним зображенням $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Компоненти вектору $\mathbf{Z}$ в силу їх означення інваріантні стосовно паралельних перенесень зображення.

Інваріантні багатовиди другого степеня у просторі $\mathbf{R}_n^{N+1}$ для $k=1$, $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ встановлені в роботах [1,2]. Узагальнюючи відповідні результати на що випадок, що розглядається, одержуємо афінно-інваріантну квадрику у вигляді

$$(\mathbf{Z} - K_2\mathbf{z})^T \cdot \mathbf{G} \cdot (\mathbf{Z} - K_2\mathbf{z}) = \frac{1}{k_{12}^2} F_N^2, \quad (4)$$

де F_N^2 – афінно-інваріантна інформаційна ознака геометричної форми зображення. Через $\mathbf{G}$ в (4) позначено матрицю метричного тензору простору моделі $\mathbf{R}_n^{N+1}$ з елементами:

$$g_{ij} = (-1)^{n+1-i} \frac{n!}{(i-1)!} \frac{n!}{(N+1-i)!} \delta_{N+2-i,j}, \quad (5)$$

де $\delta_{i,j}$ - символ Кронекера.

Співвідношення (4) дає можливість трактувати афінно-інваріантну квадрику як псевдосферу радіуса $k_{12}^{-1}|F_N|$ з центром в точці $K_2\mathbf{z}$ у просторі $\mathbf{R}_n^{N+1}$ з метричним тензором (5).

4. СТРУКТУРА ПЕРЕТВОРЕНЬ ВЕКТОРІВ ПОДАННЯ ПРОЕКЦІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Розглянемо лінійні багатовиди у просторі $\mathbf{R}_n^{N+1}$, інваріантні стосовно афінних перетворень функції яскравості проекційного зображення.

Твердження 1. Перетворення вектора подання довільного проекційного зображення у псевдоевклідовому просторі моделі $\mathbf{R}_n^{N+1}$, індукованого афінним перетворенням зображення в картинній площині, має принаймні одну інваріантну пряму.

Оскільки підпростір, ортогональний до інваріантного, є також інваріантним підпростором [4], визначена пряма є інваріантною стосовно перетворення з матрицею $\mathbf{M} = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1^{-1}$. В загальному випадку кількість інваріантних прямих та інваріантних гіперплощин перетворення $\mathbf{Z}_1 \to \mathbf{Z}_2$ дорівнює відповідно кількості дійсних та комплексних коренів характеристичного рівняння матриці $\mathbf{M}$.

Побудова інваріантних підпросторів дозволяє оцінювати інформаційні властивості окремих компонент векторів подання геометричних форм зображень. Інваріантність гіперплощини у просторі $\mathbf{R}_n^{N+1}$ означає, що точки подання зображень, розташовані у ній, залишаються належними цій гіперплощині при їх афінних перетвореннях; розташування нормалі $\mathbf{n}$ до такої гіперплощини залишається незмінним. Внаслідок цього комбінація компонент вектора подання зображення, яка визначається вектором нормалі, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{Z}$, є сталою до такого перетворення і має найбільшу інформативність. Оскільки цей вектор визначає інваріантну пряму, перетворення вектора подання зображення вздовж неї є тотожним – відповідне власне число матриці перетворення $\mathbf{M}$ дорівнює одиниці. Аналогічно, у випадку, якщо матриця перетворення точок подання зображень у просторі моделі має власне число, яке дорівнює одиниці, найбільш інформативною є комбінація компонент вектора подання, що визначається відповідним власним вектором матриці $\mathbf{M}$ (останній має зміст напрямного вектора відповідної інваріантної прямої).

Отже, інформативність комбінації компонент вектора подання зображення, яка визначається напрямним вектором довільної інваріантної прямої, тим вища, чим ближче відповідне власне число матриці перетворення $\mathbf{M}$ у просторі моделі до одиниці.

В загальному випадку за показник інформативності окремих компонент вектору подання зображення у просторі $\mathbf{R}_n^{N+1}$, яка визначається k-ю інваріантною прямою, пропонується прийняти величину $\lambda_k \Big/ \sum_{i=1}^{P} |\lambda_i|$, де P - кількість власних чисел матриці $\mathbf{M}$. Показник інформативності лінійних комбінацій компонент векторів подання зображень при їх однопараметричних афінних перетвореннях в картинній площині мають дорівнює:

– при масштабуванні вздовж осей картинної системи координат 0.987 (найбільш інформативна компонента Z_{n+1});

– при косому зсуві вздовж осей картинної системи координат 0.91 (найбільш інформативні компоненти Z_1 та Z_{N+1});

– при повороті з довільним центром 0.93 (найбільш інформативна комбінація $Z_1 + Z_{n+2}$).

Як випливає з співвідношень (3), (4), точки подання зображень, зафіксованих у різних спектральних діапазонах, розташовані на афінно-інваріантних псевдосферах з різними радіусами та центрами. Відповідність псевдосфер встановлюється співвідношенням (3): точка $\mathbf{Z}_2$ подання зображення, що аналізується, та еталонного зображення $\mathbf{Z}_1$ пов'язані проективною відповідністю з центром у точці $\mathbf{z}$. За наявності додаткових афінних перетворень зображення, зумовлених зміною позиційних умов фіксації, точка $\mathbf{Z}_2$ зміщується вздовж лінії перетину відповідної квадрики з інваріантною площиною.

На рис. 1-4 подані напівтонові зображення фрагментів земної поверхні, одержані при однакових позиційних параметрах проекціювання, але на різних довжинах хвиль в оптичному діапазоні (зображення на рис.1 прийняте за еталонне) відповідно при $\lambda_1 = 0.8$ мкм, $\lambda_2 = 0.93$ мкм, $\lambda_3 = 0.97$ мкм, $\lambda_4 = 1.1$ мкм. Компоненти векторів подання зображень у просторі $\mathbf{R}_1^3$ дорівнюють:

$\mathbf{Z}_1 = (0.35, -1.23, 3.25)^T$; $\mathbf{Z}_2 = (1.37, 2.31, 1.75)^T$;
$\mathbf{Z}_3 = (2.59, 0.93, 2.25)^T$; $\mathbf{Z}_4 = (3.86, 0.62, 4.72)^T$,

що добре узгоджується з наведеним ідентифікаційним критерієм. Зазначимо, що на основі векторів подання трьох зображень фіксованого об'єкту та відомих параметрах їх фіксації можна відновити вектор подання функції розсіювання точки $\mathbf{z}$ (див. співвідношення (3)).

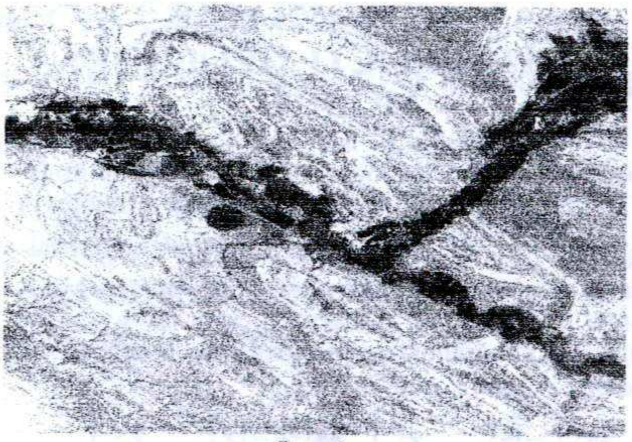

Рис. 1

Рис. 2

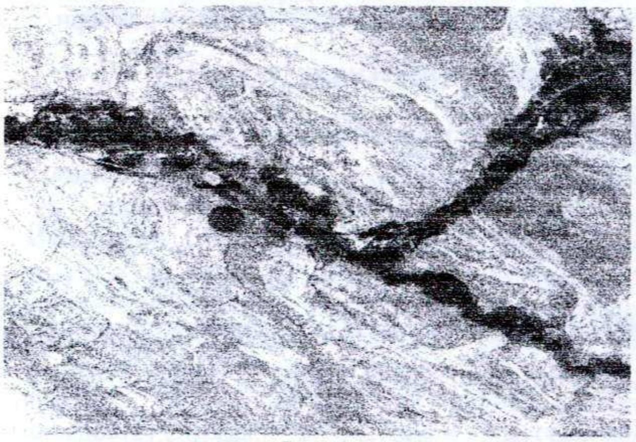

Рис. 3

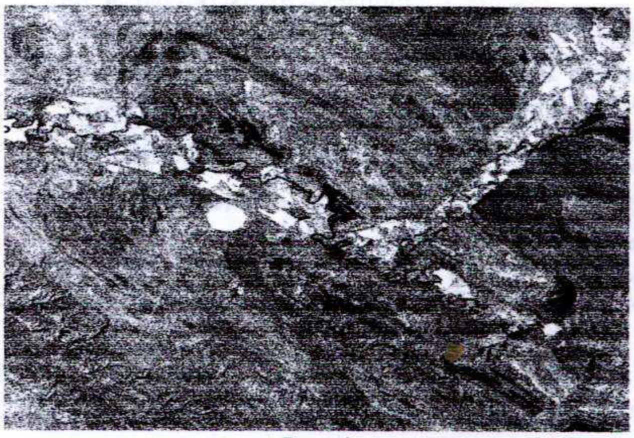

Рис. 4

5. ОПТИМІЗАЦІЯ ВИМІРНОСТІ ПРОСТОРУ МОДЕЛІ

Розглянемо m векторів подання фіксованого проекційного зображення у просторах моделі різних вимірностей(навчальну вибірку) $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}_n^{N+1}$, $\mathbf{Z}_k \in \mathbf{R}_l^{L+1}$, де $L > N$, $k = \overline{1,m}$; індекс 1 відповідає еталонному зображенню. Множини цих векторів подаємо у вигляді матриць, рядки яких відповідають окремим векторам, а стовпці – їхнім компонентам

$$\mathbf{M}^{(1)} = \left(\mathbf{z}_1^T, \ldots, \mathbf{z}_m^T\right)^T, \mathbf{M}^{(2)} = \left(\mathbf{Z}_1^T, \ldots, \mathbf{Z}_m^T\right)^T,$$

позначаючи елементи матриць відповідно через $m_{ij}^{(1)}$ та $m_{ik}^{(2)}$ $(j = \overline{1, N+1},\ k = \overline{1, L+1})$. Оскільки вектори подання зображень фіксованого об'єкту, одержаних за різних умов проекціювання, пов'язані між собою перетворенням (1), мають місце співвідношення

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{z}_1,\ \mathbf{Z}_k = \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{Z}_1 \quad (k = \overline{1,m}), \quad (7)$$

де через $\mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k$ позначені матриці перетворень k - го зображення у просторах $\mathbf{R}_n^{N+1}, \mathbf{R}_l^{L+1}$.

Лінійні простори вимірності m, базиси яких визначаються стовпцями матриць $\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}$ (відповідно Π_1, Π_2), є гіперплощинами, зануреними у псевдоевклідів простір $\mathbf{R}_{l+1}^{L+3}$. Базисні вектори цих просторів позначаємо як $\left\{\mathbf{e}_i : i = \overline{1, N+1}\right\}$ та $\left\{\mathbf{E}_i : i = \overline{1, L+1}\right\}$ відповідно. Параметричні рівняння гіперплощин Π_1, Π_2 мають вигляд:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{t}\,;\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{t}, \quad (8)$$

де $\mathbf{t} = \left(t_1, \ldots, t_{L+3}\right)$ – вектор параметрів; $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ – довільні точки Π_1 та Π_2. У співвідношенні (8) позначено: $\mathbf{A}_1 = \left(\mathbf{P}^{(1)}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{P}^{(1)}\mathbf{e}_{N+1}\right)$;

$\mathbf{A} \;= \left(\mathbf{P}^{(2)}\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{P}^{(2)}\mathbf{E}_{L+1}\right)$, де $\mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{P}^{(2)}$ – матриці проекціювання просторів $\mathbf{R}_n^{N+1}$, $\mathbf{R}_l^{L+1}$ на простір $\mathbf{R}_{l+1}^{L+3}$.

Квадрат косинуса кута між площинами Π_1 та Π_2 обчислений у псевдо евклідовій метриці простору $\mathbf{R}_{l+1}^{L+3}$ дорівнює максимальному власному числу матриці

$$\left(\widetilde{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{G} \mathbf{A}_1\right)^T \left(\widetilde{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{G} \mathbf{A}_2\right)^T \left(\mathbf{A}_2^T \mathbf{G} \mathbf{A}_2\right)^T \left(\mathbf{A}_2^T \mathbf{G} \widetilde{\mathbf{A}}_1\right)^T,$$

де $\mathbf{G}$ – матриця метричного тензора простору $\mathbf{R}_{l+1}^{L+3}$; $\widetilde{\mathbf{A}}_1$ – матриця проекцій напрямних векторів гіперплощини Π_1 на гіперплощину Π_2.

Твердження 2. Мірою додаткової інформації про форму проекційного зображення, яка вноситься при збільшенні порядку моделі, є кут між гіперплощинами, що визначаються стовпцями ін-формаційних матриць подання множини зображень у моделюючих просторах відповідних вимірностей.

Алгоритм визначення оптимальної вимірності простору моделі базується на обчисленні кута між гіперплощинами Π_1 та Π_2 при збільшенні порядку моделі за умови лінійної не залежності стовпців інформаційних матриць. Оптимальній за інформативністю вимірності простору моделі відповідає нульове значення цього кута.

6. ВИСНОВКИ

1. Афінні перетворення проекційних зображень, зумовлені зміною позиційних умов проекціювання, спричиняють однорідні лінійні перетворення інформаційних характеристик зображень (безрозмірних семіінваріантів функції яскравості), структура яких визначає інваріантні лінійні багатовиди у просторі моделі.

2. Перетворення вектору подання довільного проекційного зображення у псевдоевклідовому просторі моделі $\mathbf{R}_n^{N+1}$, індукованого афінним перетворенням зображення у картинній площині, має принаймні одну інваріантну пряму. Усі афінно-інваріантні гіперплощини простору моделі ортогональні інваріантнім прямим в рамках псевдоевклідової метризації простору моделі.

3. Мірою додаткової інформації про форму та розподіл яскравості проекційного зображення, яка забезпечується при використанні інваріантної геометричної моделі при збільшенні її порядку, є кут між гіперплощинами, що визначаються стовпцями інформаційних матриць подання навчальної вибірки зображень у моделюючих просторах відповідних вимірностей.

ЛІТЕРАТУРА

1. Михайленко В.Є., Корчинський В.М. *Концепція геометричного об'єкту в морфологічному аналізі проекційних зображень* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КДТУБА, 1997. - Вип. 61. - С.59-63.
2. Корчинский В.М. *Обратная задача идентификации изопланатических изображений* // Математические модели и современные информационные технологии. - К.: Ин-т математики НАН Украины, 1998. - С. 69-71.
3. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. *Введение в статистическую радиофизику: Случайные поля*. - М.: Наука, 1978. - 464 с.
4. Гельфанд И.М. *Лекции по линейной алгебре*. - М.: Наука, 1966. - 364 с.