ХАОТИЧНІ ПОДІЇ, ПРОЦЕСИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Михайло Личак
Інститут космічних досліджень НАН та НКА України (ІКД НАНУ-НКАУ)
Проспект Академіка Глушкова, 40, Київ 03680, Україна
Тел.: +380 44 2661291 Факс: +380 44 2664124
adapt@space.is.kiev.ua

ABSTRACT

M. Lychak. Chaotic events, processes and their characteristics. The phenomena and experiments with uncertain results at their recurrence are considered. The new approach is constructed on the basis of the set theory and concept chaotic algorithm of selection of elements among the set. The concepts of chaotic events and chaotic sequences are introduced, and there is a lower and upper edge of an own cumulative distribution function of sequence of chaotic events on elementary events set lower and upper bound of a mutual cumulative distribution function of various sequences of chaotic events. The chaotic sequences realisable in time are named as chaotic processes. For numerical chaotic sequences, the indicated cumulative distribution function is shown to determine set evaluations (which are solution the system of linear inequalities) for values of terms of chaotic sequence on any specific interval of their adjacent numbers. Such inequalities are used for a guaranteed parameter estimation and state of objects on the basis interval-set analysis.

The computer simulation of different types of chaotic sequences is conducted and their characteristics are experimentally determined.

ВСТУП

Розглядаються явища, досліди і експерименти, результати яких є неоднозначними при повторюваності, хоча їх параметри і зовнішні фактори при цьому є незмінними. Більшість дослідників застосовують імовірнісні моделі невизначеності. З іншого боку, почав інтенсивно розвиватися так званий інтервальний аналіз, де використовується припущення, що самі чисельні результати повністю невизначені, а відомі лише деякі інтервали, яким вони безумовно належать.

Пропонується підхід до побудови математичної моделі таких подій на основі теорії множин і понятті алгоритму хаотичного вибору елементів множини. Враховуючи якісну відмінність від імовірнісного підходу, говориться про хаотичні події і процеси. Виділено клас хаотичних подій, за своїми характеристиками близьких до випадкових подій, Однак при цьому ніде не використовується поняття ймовірності і не вводиться що-небудь аналогічне. Більше того, цей клас охоплює встановлені коливання в режимі "хаосу" в нестійких складних нелінійних динамічних системах.

Закладаються теоретичні основи використання множинного (нестохастичного) підходу до рішення задач оцінювання, розпізнавання та керування.

1. ХАОТИЧНІ ПОДІЇ ТА ЇХ ВЛАСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Будемо вважати, що можливі прояви досліджуваного явища, результати розглядуваного досліду або спостереження утворюють деяку замкнуту обмежену множину елементарних подій X_0. Реалізація того чи іншого прояву, результату або спостереження є елемент x цієї множини

$$x \in X_0 \ . \qquad (1)$$

Зокрема, такою множиною може бути деякий скінчений набір раціональних чисел, замкнутий інтервал або об'єднання деякого числа замкнутих інтервалів на числовій вісі.

Якщо явище, дослід чи спостереження реалізується багато разів при збереженні основних факторів або умов, то цьому буде відповідати деяка послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (n - поточний номер повторення) елементів множини X_0, які вибираються з неї згідно деякому алгоритму вибору.

Коли цей алгоритм вибору відомий, то говорять про детерміновану послідовність, для якої всі значення можуть бути наперед розраховані, а значить спрогнозировані відповідно даному алгоритму.

Якщо ж такий алгоритм вибору невідомий, а вибір елементів послідовності x_n $(n = 1,2,\ldots)$ з множини X_0 здійснюється під впливом неконтрольованих і невідомих чинників, то будемо говорити про невизначену послідовність, значення котрої безумовно належать заданій множині, але попередньо їх розрахувати, а значить і точно спрогнозувати неможливо.

Проте, не знаючи самого алгоритму вибору, у багатьох випадках можна мати деяку інформацію про його властивості, а значить і про властивості послідовності x_n $(n = 1,2,\ldots)$, що формується ним.

Введемо для цієї послідовності поняття інтервалу зв'язаних елементів $[n, n+S-1]$, де ціле число S задає кількість сусідніх членів послідовності на цьому інтервалі, коли на елементи, що їм відповідають, накладаються деякі загальні обмеження.

Позначимо

$$X_n^T = (x_n; \ldots; x_{n+S-1}), \qquad (2)$$

деякий вектор, що характеризує «стан» послідовності, яка аналізується на інтервалі «зв'язаності». Відповідно можна ввести послідовність векторів $X_n^T \left(n=1,2,\ldots \right)$, що відображають зміну цього стану в процесі вибору.

Тоді

$$X_n \in \mathcal{X}_0^{(S)} \quad \forall \quad n=1,2,\ldots, \tag{3}$$

де обмежена множина $\mathcal{X}_0^{(s)}$ в просторі E^S складена з елементів, що є всіми можливими комбінаціями S компонент векторів X_n, зформованих шляхом їхнього вибору з $\mathcal{X}_0$.

Визначення 1. Хаотичними подіями на множині $\mathcal{X}_0$ будемо називати члени всякої послідовності $x_n \quad (n=1,2,\ldots)$, утвореної таким вибором елементів множини $\mathcal{X}_0$, що для заданого інтервалу пов'язаних елементів $[n, n+S-1]$, де $S \geq 1$ деяке ціле число, вектор «стану» X_n із (2) для усіх $n=1,2,\ldots$ належить деякій обмеженій множині $\mathcal{X}_S$, тобто

$$X_n \in \mathcal{X}_S \quad \forall \quad n=1,2,\ldots, \tag{4}$$

що є підмножиною множини $\mathcal{X}_0^{(S)}$:

$$\mathcal{X}_S \subset \mathcal{X}_0^{(S)}. \tag{5}$$

Послідовності $x_n \quad (n=1,2,\ldots)$, складені з хаотичних подій будемо називати хаотичними, а множину $\mathcal{X}_S$ з (4) будемо називати репроективною. Виконання (5) означає, що в цьому випадку алгоритм вибору елементів множини $\mathcal{X}_0$ забороняє частину можливих комбінацій з S елементів у якості компонент векторів X_n.

Нехай множина $\mathcal{X}_0$ є упорядкованою, тобто для будь-яких двох різних її елементів установлене правило, по якому один із цих елементів вважається попереднім другому. Позначимо $a<b$, якщо $a \in \mathcal{X}_0$ і $b \in \mathcal{X}_0$, але a є елементом $\mathcal{X}_0$, що передує b. Крім того, справедливі умови:

1. якщо $a<b$, або $b>a$, то не має місця $b<a$ або $a>b$ (асиметричність);
2. якщо $a<b$ або $b>a$ і $b<c$ або $c>b$, то $a<c$ або $c>a$ (транзитивність).

Позначення $a \leq b$ або $b \geq a$ означає, що b може збігатися з a

Будь-яка множина дійсних чисел, наприклад, упорядкована по їх величині.

На упорядкованій множині $\mathcal{X}_0$ введемо таку функцію від $x \in \mathcal{X}_0$ і членів будь-якої невизначеної послідовності $x_n \quad (n=1,2,\ldots)$, що

$$F(x, x_n) \equiv \begin{cases} 1 & при \quad x > x_n, \\ 0 & при \quad x \leq x_n. \end{cases} \tag{6}$$

Визначення 2. Хаотичними подіями L - типу на упорядкованій множині $\mathcal{X}_0$ будемо називати хаотичні події, для яких існують деякі функції $P_н(x,N) \geq 0$ і $P_в(x,N) \leq 1$, де $x \in \mathcal{X}_0$, $N=1,2,\ldots,$ – послідовні значення довжини інтервалів пов'язаних елементів, що для таких членів будь-якої хаотичної послідовності $x_n \quad (n=1,2,\ldots)$ справедлива система нерівностей

$$P_н(x,N) \leq \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} F(x, x_{n+i}) \leq P_в(x,N) \; \forall \; n=1,2,\ldots,$$
$$N=1,2,\ldots. \tag{7}$$

Функції $P_н(x,N)$ і $P_в(x,N)$ будемо називати відповідно нижньою і верхньою гранями функції розподілу хаотичних подій L - типу на множині елементарних подій $\mathcal{X}_0$.

Наслідок 1 (із визначення 2). Якщо для всіх $x \in \mathcal{X}_0$ існує

$$\lim_{N\to\infty} P_н(x,N) = \lim_{N\to\infty} P_в(x,N) = P(x), \tag{8}$$

то функція розподілу хаотичних подій $P(x)$ буде відповідати функції розподілу випадкових подій на множині елементарних подій $\mathcal{X}_0$.

2. МНОЖИННІ ОЦІНКИ ЗНАЧЕНЬ ЧИСЛОВИХ ХАОТИЧНИХ ПОДІЙ

Нехай множина елементарних подій $\mathcal{X}_0$ має вигляд замкнутого інтервалу на числовій осі $[-\Delta; \Delta]$, де $\Delta > 0$ - деяке число, тобто будь-яка послідовність $x_n \quad (n=1,2,\ldots)$, що вибирається з цієї множини задовільняє умову

$$\left|x_n\right| \leq \Delta = const \quad \forall \quad n=1,2,3,\ldots. \tag{9}$$

Розглянемо тепер випадок хаотичної послідовності, для якої виконуються нерівності виду (7).

Вирахуємо

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} F(x, x_n)dx = \int_{x_n}^{\Delta} dx = \Delta - x_n, \tag{10}$$

звідки

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} [\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} F(x, x_{n+i})]dx = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{-\Delta}^{\Delta} F(x, x_{n+i})dx =$$
$$= \frac{1}{N}(\Delta \cdot N - \sum_{i=0}^{N-1} x_{n+i}) = \Delta - \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_{n+i}.$$

Проінтегровані нерівності виду (7) для цього випадку набудуть вигляду

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} P_н(x,N)dx \leq \Delta - \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_{n+i} \leq \int_{-\Delta}^{\Delta} P_в(x,N)dx, \tag{11}$$

які можна переписати в вигляді системи нерівностей

$$m_н(N) \leq \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_{n+i} \leq m_в(N)$$
$$\forall n=1,2,\ldots, \quad N=1,2,\ldots, \tag{12}$$

де

$$\begin{cases} m_н(N) = \Delta - \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} P_в(x,N)dx, \\ m_в(N) = \Delta - \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} P_н(x,N)dx. \end{cases} \quad (13)$$

Очевидно, що система лінійних нерівностей (12) конструктивним чином в явному виді виділяє репроективну множину X_S типу поліедра, а (13) установлюють взаємозв'язок між гранями функції розподілу хаотичних подій L - типу (функціями $P_н(\cdot)$ і $P_в(\cdot)$) і спільними обмеженнями на значення членів будь-якої частини хаотичної послідовності певної довжини.

Відзначимо, що якщо виконується (8) і функція $P(x)$ диференційована, то

$$\lim_{N\to\infty} m_н(N) = \lim_{N\to\infty} m_в(N) = m_0 = \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} x\frac{dP(x)}{dx}dx, \quad (14)$$

де m_0 - математичне сподівання послідовності випадкових подій на множині X_0, що виділяється умовою (9).

Це випливає з того факту, що по визначенню математичного сподівання випадкової величини

$$m_0 = \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} x\cdot\frac{dP(x)}{dx}dx = xP(x)\Big|_{-\Delta}^{\Delta} - \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} P(x)dx = \Delta - \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} P(x)dx. \quad (15)$$

3. ВЗАЄМНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ХАОТИЧНИХ ПОДІЙ

Розглянемо тепер той випадок, коли паралельно реалізовані два хаотичних алгоритми вибору елементів упорядкованої множини X_0. Відповідно отримуємо дві хаотичні послідовності: $x_n^{(1)}$ і $x_n^{(2)}$ $(n=1,2,\ldots)$. Нехай це будуть хаотичні події L-типу, для яких існують нижні грані функції розподілу хаотичних подій $P_н^{(1)}(x,N_1)$ і $P_н^{(2)}(x,N_2)$, а також верхні грані - $P_в^{(1)}(x^{(1)},N_1)$ і $P_в^{(2)}(x^{(2)},N_2)$. Відповідно, якщо це числові послідовності, що задовільняють умову (9), то існують $m_н^{(1)}(N_1)$ і $m_н^{(2)}(N_2)$, а також $m_в^{(1)}(N_1)$ і $m_в^{(2)}(N_2)$, що обмежують середньоарифметичне значення будь-яких N_1 чи N_2 сусідніх членів вибраної хаотичної послідовності.

Проте, можна ще на упорядкованій множині X_0 ввести таку функцію від $x^{(1)} \in X_0$ і $x^{(2)} \in X_0$ та членів хаотичних послідовностей $x_n^{(1)}$ і $x_n^{(2)}$ $(n=1,2,\ldots)$, що

$$F(x^{(1)},x^{(2)},x_n^{(1)},x_n^{(2)}) = \begin{cases} 1 & при \quad x^{(1)} > x_n^{(1)} \quad і \quad x^{(2)} > x_n^{(2)}, \\ 0 & при \quad x^{(1)} \le x_n^{(1)} \quad або \quad x^{(2)} \le x_n^{(2)}. \end{cases} \quad (16)$$

<u>**Визначення 3**</u>. Зв'язаними хаотичними подіями L - типу на упорядкованій множині X_0 будемо називати членів хаотичних послідовностей $x_n^{(1)}$ і $x_n^{(2)}$ $(n=1,2,\ldots)$, для яких існують такі функції $P_н(x^{(1)},x^{(2)},N) \ge 0$ і $P_в(x^{(1)},x^{(2)},N) \le 1$, де $x^{(1)} \in X_0$, $x^{(2)} \in X_0$, числа $N=1,2,\ldots$, що для них справедлива система нерівностей

$$P_н(x^{(1)},x^{(2)},N) \le \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} F(x^{(1)},x^{(2)},x_{n+i}^{(1)},x_{n+i}^{(2)}) \le$$
$$\le P_в(x^{(1)},x^{(2)},N) \quad \forall \quad n=1,2,\ldots. \quad (17)$$

Функції $P_н(\cdot)$ і $P_в(\cdot)$ будемо називати відповідно нижньою і верхньою гранями взаємної функції розподілу таких хаотичних подій.

<u>**Наслідок 1 (із визначення 3)**</u>. Якщо для всіх $x^{(1)} \in X_0$ і $x^{(2)} \in X_0$ існує

$$\lim_{N\to\infty} P_н(x^{(1)},x^{(2)},N) = \lim_{N\to\infty} P_в(x^{(1)},x^{(2)},N) = P(x^{(1)},x^{(2)}), \quad (18)$$

то взаємна функція розподілу хаотичних подій $P(x^{(1)},x^{(2)})$ буде відповідати взаємної функції розподілу деяких двох випадкових подій на множині елементарних подій X_0.

За функцією $F(\cdot)$ у вигляді (16) для членів двох хаотичних послідовностей $x_n^{(1)}$ і $x_n^{(2)}$ можна визначити аналогічні функції у вигляді (6) від членів будь-якої з цих послідовностей:

$$\begin{cases} F(x^{(1)},x_n^{(1)}) = \lim\limits_{x^{(2)}\to+\infty} F(x^{(1)},x^{(2)},x_n^{(1)},x_n^{(2)}), \\ F(x^{(2)},x_n^{(2)}) = \lim\limits_{x^{(1)}\to+\infty} F(x^{(1)},x^{(2)},x_n^{(1)},x_n^{(2)}). \end{cases} \quad (19)$$

Відповідно

$$\begin{cases} P_н(x^{(1)},N) = \lim\limits_{x^{(2)}\to\infty} P_н(x^{(1)},x^{(2)},N), \\ P_в(x^{(1)},N) = \lim\limits_{x^{(2)}\to\infty} P_в(x^{(1)},x^{(2)},N). \end{cases} \quad (20)$$

Розглянемо тепер випадок, коли множина елементарних подій X_0 має вигляд замкнутого інтервалу на числовій осі $[-\Delta;\Delta]$, тобто хаотичні послідовності $x_n^{(1)}$ і $x_n^{(2)}$ задовільняють умові виду (9).

Вирахуємо подвійний інтеграл

$$\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} F(x^{(1)},x^{(2)},x_n^{(1)},x_n^{(2)})dx^{(1)}dx^{(2)} = \int\limits_{x_n^{(1)}}^{\Delta} dx^{(1)} \cdot \int\limits_{x_n^{(2)}}^{\Delta} dx^{(2)} = (\Delta - x_n^{(1)})(\Delta - x_n^{(2)}). \quad (21)$$

Звідси

$$\int_{-\Delta}^{\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}F(x^{(1)},x^{(2)},x_{n+i}^{(1)},x_{n+i}^{(2)})\right]dx^{(1)}dx^{(2)} =$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(\Delta - x_{n+i}^{(1)})(\Delta - x_{n+i}^{(2)}). \qquad (22)$$

Подвійний інтеграл від нерівностей (17) дає наступну систему нерівностей виду

$$\int_{-\Delta}^{\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta}P_{н}(x^{(1)},x^{(2)},N)dx^{(1)}dx^{(2)} \le \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(\Delta - x_{n+i}^{(1)})(\Delta - x_{n+i}^{(2)}) \le$$

$$\le \int_{-\Delta}^{\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta}P_{в}(x^{(1)},x^{(2)},N)dx^{(1)}dx^{(2)}\ \forall\, n=1,2,\ldots,\ N=1,2,\ldots \qquad (23)$$

Ці нерівності встановлюють зв'язок між гранями взаємної функції розподілу і нелінійними обмеженнями на значення членів взаємозв'язаних хаотичних числових послідовностей.

4. ХАОТИЧНІ ДИСКРЕТНІ ПРОЦЕСИ

При розгляді членів хаотичної послідовності x_n $(n = 1,2,\ldots)$, передбачалось, що номер n визначає лише номер реалізації явища, досліду чи спостереження. Проте можна вважати, що реалізація відбувається в часі і кожному номеру відповідає момент часу t_n, тобто

$$x_n = x(t_n), \quad t_1 < t_2 < t_3 < \ldots, \qquad (24)$$

Визначення 4. Дискретну часову послідовність виду (24) із заданими моментами часу t_n $(n = 1,2,\ldots)$, де значення x_n складають хаотичну послідовність з деякими нижньою і верхньою гранями функції розподілу хаотичних подій L - типу на заданій множині елементарних подій X_0, будемо називати хаотичним дискретним процесом.

Найчастіше реалізація в часі хаотичних подій відбувається послідовно через рівний проміжок часу Δt, який називають періодом квантування за часом. Тоді

$$t_n = t_0 + n\Delta t, \quad n = 1,2,\ldots, \qquad (25)$$

де t_0 - деякий початковий відлік часу, з якого починається спостередження за хаотичною подією. Для такого хаотичного дискретного процесу знання характеристик виду (7) і величини Δt дозволяє в подальшому оцінювати його вплив на об'єкти та вимірювальні пристрої. Зокрема, коли x_n є числами, що задовольняють умову (9), то справедливі нерівності (12), які використовуються при рішенні задач оцінювання, розпізнавання та керування.

В той же час, існує відмінність хаотичних процесів від хаотичних подій, а саме, важливість залежності чи незалежності їх характеристик від початкового часу t_1 (з якого починається спостереження – вимірювання результатів певного явища чи досліду).

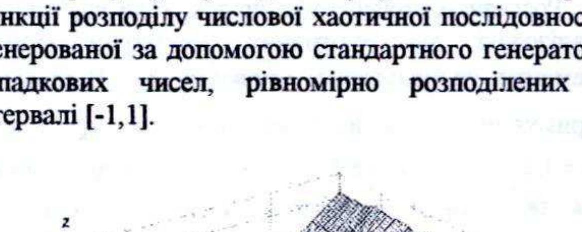
Визначення 5. Дискретний хаотичний процес виду (24) будемо називати стаціонарним, якщо значення нижньої і верхньої граней функції розподілу хаотичних подій x_n при будь-яких $N = 1,2,\ldots$ не залежать від початкового моменту часу t_1.

Тобто, якщо будь-яку кількість членів хаотичної послідовності x_n на початку буде вилучено і визначення системи нерівностей (7) почнеться для $n \ge n_1 > 0$, де n_1 деяке ціле число, то значення функцій $P_1(\cdot)$ і $P_2(\cdot)$ для стаціонарного хаотичного процесу залишаться незмінними. Природно, що ті процеси, для яких проявляється залежність цих характеристик від початкового моменту часу, називатимуться нестаціонарними.

6. ВИСНОВКИ

Введені поняття хаотичних подій і хаотичних послідовностей, які мають нижню і верхню грані власної функції розподілу послідовності хаотичних подій на множині елементарних подій, а також нижню і верхню грані взаємної функції розподілу різних послідовностей хаотичних подій. Хаотичні події, що реалізуються за часом, називаються хаотичними процесами. Для числових хаотичних послідовностей вказані функції розподілу визначають множинні оцінки (що задаються системою лінійних нерівностей) для значень членів хаотичної послідовності на будь-якому заданому інтервалі сусідніх їх номерів. Такі нерівності можуть використовуватись для гарантованого оцінювання параметрів і стану об'єктів на основі інтервально-множинного аналізу. Проведено комп'ютерне моделювання різних типів хаотичних послідовностей і експериментально визначені їх характеристики.

На рисунку приведено графік нижньої грані функції розподілу числової хаотичної послідовності, згенерованої за допомогою стандартного генератора випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі [-1,1].



При цьому рівні x в функції (6) вибирались дискретними з кроком 0,2, а $N = 1{,}100$. Кількість членів згенерованої послідовності чисел, на якій вираховувались значення функції $P_н(\cdot)$ в (7) була рівною 3600 .