

ХАОТИЧНІ ПОДІЇ, ПРОЦЕСИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Михайло Личак

Інститут космічних досліджень НАН та НКА України (ІКД НАНУ-НКАУ)

Проспект Академіка Глушкова, 40, Київ 03680, Україна

Тел.: +380 44 2661291 Факс: +380 44 2664124

adapt@space.is.kiev.ua

ABSTRACT

M. Lychak. Chaotic events, processes and their characteristics. The phenomena and experiments with uncertain results at their recurrence are considered. The new approach is constructed on the basis of the set theory and concept chaotic algorithm of selection of elements among the set. The concepts of chaotic events and chaotic sequences are introduced, and there is a lower and upper edge of an own cumulative distribution function of sequence of chaotic events on elementary events set lower and upper bound of a mutual cumulative distribution function of various sequences of chaotic events. The chaotic sequences realisable in time are named as chaotic processes. For numerical chaotic sequences, the indicated cumulative distribution function is shown to determine set evaluations (which are solution the system of linear inequalities) for values of terms of chaotic sequence on any specific interval of their adjacent numbers. Such inequalities are used for a guaranteed parameter estimation and state of objects on the basis interval-set analysis.

The computer simulation of different types of chaotic sequences is conducted and their characteristics are experimentally determined.

ВСТУП

Розглядаються явища, досліди і експерименти, результати яких є неоднозначними при повторюваності, хоча їх параметри і зовнішні фактори при цьому є незмінними. Більшість дослідників застосовують імовірнісні моделі невизначеності. З іншого боку, почав інтенсивно розвиватися так званий інтервальний аналіз, де використовується припущення, що самі чисельні результати повністю невизначені, а відомі лише деякі інтервали, яким вони безумовно належать.

Пропонується підхід до побудови математичної моделі таких подій на основі теорії множин і понятті алгоритму хаотичного вибору елементів множини. Враховуючи якісну відмінність від імовірнісного підходу, говориться про хаотичні події і процеси. Виділено клас хаотичних подій, за своїми характеристиками близьких до випадкових подій. Однак при цьому ніде не використовується поняття ймовірності і не вводиться що-небудь аналогічне. Більше того, цей клас охоплює встановлені коливання в режимі "хаосу" в нестійких складних нелінійних динамічних системах.

Закладаються теоретичні основи використання множинного (нестохастичного) підходу до рішення задач оцінювання, розпізнавання та керування.

1. ХАОТИЧНІ ПОДІЇ ТА ЇХ ВЛАСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Будемо вважати, що можливі прояви досліджуваного явища, результати розглядуваного досліді або спостереження утворюють деяку замкнуту обмежену множину елементарних подій X_0 . Реалізація того чи іншого прояву, результату або спостереження є елемент x цієї множини

$$x \in X_0. \quad (1)$$

Зокрема, такою множиною може бути деякий скінчений набір раціональних чисел, замкнутий інтервал або об'єднання деякого числа замкнутих інтервалів на числовій вісі.

Якщо явище, дослід чи спостереження реалізується багато разів при збереженні основних факторів або умов, то цьому буде відповідати деяка послідовність x_1, x_2, \dots, x_n (n - поточний номер повторення) елементів множини X_0 , які вибираються з неї згідно деякому алгоритму вибору.

Коли цей алгоритм вибору відомий, то говорять про детерміновану послідовність, для якої всі значення можуть бути наперед розраховані, а значить спрогнозовані відповідно даному алгоритму.

Якщо ж такий алгоритм вибору невідомий, а вибір елементів послідовності x_n ($n = 1, 2, \dots$) з множини X_0 здійснюється під впливом неконтрольованих і невідомих чинників, то будемо говорити про невизначену послідовність, значення котрої безумовно належать заданій множині, але попередньо їх розрахувати, а значить і точно спрогнозувати неможливо.

Проте, не знаючи самого алгоритму вибору, у багатьох випадках можна мати деяку інформацію про його властивості, а значить і про властивості послідовності x_n ($n = 1, 2, \dots$), що формується ним.

Введемо для цієї послідовності поняття інтервалу зв'язаних елементів $[n, n+S-1]$, де ціле число S задає кількість сусідніх членів послідовності на цьому інтервалі, коли на елементи, що їм відповідають, накладаються деякі загальні обмеження.

Позначимо

$$X_n^T = (x_n; \dots; x_{n+S-1}), \quad (2)$$

деякий вектор, що характеризує «стан» послідовності, яка аналізується на інтервалі «зв'язаності». Відповідно можна ввести

послідовність векторів X_n^T ($n=1,2,\dots$), що відображають зміну цього стану в процесі вибору.

Тоді

$$X_n \in X_0^{(S)} \quad \forall n=1,2,\dots, \quad (3)$$

де обмежена множина $X_0^{(S)}$ в просторі E^S складена з елементів, що є всіма можливими комбінаціями S компонент векторів X_n , зформованих шляхом їхнього вибору з X_0 .

Визначення 1. Хаотичними подіями на множині X_0 будемо називати члени всякої послідовності x_n ($n=1,2,\dots$), утвореної таким вибором елементів множини X_0 , що для заданого інтервалу пов'язаних елементів $[n, n+S-1]$, де $S \geq 1$ деяке ціле число, вектор «стану» X_n із (2) для усіх $n=1,2,\dots$ належить деякій обмеженій множині X_S , тобто

$$X_n \in X_S \quad \forall n=1,2,\dots, \quad (4)$$

що є підмножиною множини $X_0^{(S)}$:

$$X_S \subset X_0^{(S)}. \quad (5)$$

Послідовності x_n ($n=1,2,\dots$), складені з хаотичних подій будемо називати хаотичними, а множину X_S з (4) будемо називати репроективною. Виконання (5) означає, що в цьому випадку алгоритм вибору елементів множини X_0 забороняє частину можливих комбінацій з S елементів у якості компонент векторів X_n .

Нехай множина X_0 є упорядкованою, тобто для будь-яких двох різних її елементів установлене правило, по якому один із цих елементів вважається попереднім другому. Позначимо $a < b$, якщо $a \in X_0$ і $b \in X_0$, але a є елементом X_0 , що передує b . Крім того, справедливі умови:

1. якщо $a < b$, або $b > a$, то не має місця $b < a$ або $a > b$ (асиметричність);

2. якщо $a < b$ або $b > a$ і $b < c$ або $c > b$, то $a < c$ або $c > a$ (транзитивність).

Позначення $a \leq b$ або $b \geq a$ означає, що b може збігатися з a .

Будь-яка множина дійсних чисел, наприклад, упорядкована по їх величині.

На упорядкованій множині X_0 введемо таку функцію від $x \in X_0$ і членів будь-якої невизначеної послідовності x_n ($n=1,2,\dots$), що

$$F(x, x_n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } x > x_n, \\ 0 & \text{при } x \leq x_n. \end{cases} \quad (6)$$

Визначення 2. Хаотичними подіями L -типу на упорядкованій множині X_0 будемо називати хаотичні події, для яких існують деякі функції $P_n(x, N) \geq 0$ і $P_e(x, N) \leq 1$, де $x \in X_0$, $N=1,2,\dots$, - послідовні значення довжини інтервалів пов'язаних елементів, що для таких членів будь-якої хаотичної

послідовності x_n ($n=1,2,\dots$) справедлива система нерівностей

$$P_n(x, N) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} F(x, x_{n+i}) \leq P_e(x, N) \quad \forall n=1,2,\dots, \\ N=1,2,\dots \quad (7)$$

Функції $P_n(x, N)$ і $P_e(x, N)$ будемо називати відповідно нижньою і верхньою гранями функції розподілу хаотичних подій L -типу на множині елементарних подій X_0 .

Наслідок 1 (із визначення 2). Якщо для всіх $x \in X_0$ існує

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_n(x, N) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_e(x, N) = P(x), \quad (8)$$

то функція розподілу хаотичних подій $P(x)$ буде відповідати функції розподілу випадкових подій на множині елементарних подій X_0 .

2. МНОЖИННІ ОЦІНКИ ЗНАЧЕНЬ ЧИСЛОВИХ ХАОТИЧНИХ ПОДІЙ

Нехай множина елементарних подій X_0 має вигляд замкнутого інтервалу на числовій осі $[-\Delta; \Delta]$, де $\Delta > 0$ - деяке число, тобто будь-яка послідовність x_n ($n=1,2,\dots$), що вибирається з цієї множини задовільняє умову

$$|x_n| \leq \Delta = const \quad \forall n=1,2,3,\dots \quad (9)$$

Розглянемо тепер випадок хаотичної послідовності, для якої виконуються нерівності виду (7).

Вирахуємо

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} F(x, x_n) dx = \int_{x_n}^{\Delta} dx = \Delta - x_n, \quad (10)$$

звідки

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} F(x, x_{n+i}) \right] dx = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-\Delta}^{\Delta} F(x, x_{n+i}) dx = \\ = \frac{1}{N} (\Delta \cdot N - \sum_{i=0}^{N-1} x_{n+i}) = \Delta - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_{n+i}.$$

Проінтегровані нерівності виду (7) для цього випадку набудуть вигляду

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} P_n(x, N) dx \leq \Delta - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_{n+i} \leq \int_{-\Delta}^{\Delta} P_e(x, N) dx, \quad (11)$$

які можна переписати в вигляді системи нерівностей

$$m_n(N) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_{n+i} \leq m_e(N) \quad (12)$$

$$\forall n=1,2,\dots, \quad N=1,2,\dots,$$

де

$$\begin{cases} m_n(N) = \Delta - \int_{-\Delta}^{\Delta} P_n(x, N) dx, \\ m_g(N) = \Delta - \int_{-\Delta}^{\Delta} P_g(x, N) dx. \end{cases} \quad (13)$$

Очевидно, що система лінійних нерівностей (12) конструктивним чином в явному виді виділяє репроективну множину X_5 типу поліедра, а (13) установлюють взаємозв'язок між гранями функції розподілу хаотичних подій L -типу (функціями $P_n(\cdot)$ і $P_g(\cdot)$) і спільними обмеженнями на значення членів будь-якої частини хаотичної послідовності певної довжини.

Відзначимо, що якщо виконується (8) і функція $P(x)$ диференційована, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m_n(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} m_g(N) = m_0 = \int_{-\Delta}^{\Delta} x \frac{dP(x)}{dx} dx, \quad (14)$$

де m_0 - математичне сподівання послідовності випадкових подій на множині X_0 , що виділяється умовою (9).

Це впливає з того факту, що по визначенню математичного сподівання випадкової величини

$$\begin{aligned} m_0 &= \int_{-\Delta}^{\Delta} x \cdot \frac{dP(x)}{dx} dx = xP(x) \Big|_{-\Delta}^{\Delta} - \int_{-\Delta}^{\Delta} P(x) dx = \\ &= \Delta - \int_{-\Delta}^{\Delta} P(x) dx. \end{aligned} \quad (15)$$

3. ВЗАЄМНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ХАОТИЧНИХ ПОДІЙ

Розглянемо тепер той випадок, коли паралельно реалізовані два хаотичних алгоритми вибору елементів упорядкованої множини X_0 . Відповідно отримуємо дві хаотичні послідовності: $x_n^{(1)}$ і $x_n^{(2)}$ ($n = 1, 2, \dots$). Нехай це будуть хаотичні події L -типу, для яких існують нижні грані функції розподілу хаотичних подій $P_n^{(1)}(x, N_1)$ і $P_n^{(2)}(x, N_2)$, а також верхні грані - $P_g^{(1)}(x^{(1)}, N_1)$ і $P_g^{(2)}(x^{(2)}, N_2)$. Відповідно, якщо це числові послідовності, що задовільняють умову (9), то існують $m_n^{(1)}(N_1)$ і $m_n^{(2)}(N_2)$, а також $m_g^{(1)}(N_1)$ і $m_g^{(2)}(N_2)$, що обмежують середньоарифметичне значення будь-яких N_1 чи N_2 сусідніх членів вибраної хаотичної послідовності.

Проте, можна ще на упорядкованій множині X_0 ввести таку функцію від $x^{(1)} \in X_0$ і $x^{(2)} \in X_0$ та членів хаотичних послідовностей $x_n^{(1)}$ і $x_n^{(2)}$ ($n = 1, 2, \dots$), що

$$F(x^{(1)}, x^{(2)}, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) = \begin{cases} 1 & \text{при } x^{(1)} > x_n^{(1)} \quad \text{і} \quad x^{(2)} > x_n^{(2)}, \\ 0 & \text{при } x^{(1)} \leq x_n^{(1)} \quad \text{або} \quad x^{(2)} \leq x_n^{(2)}. \end{cases} \quad (16)$$

Визначення 3. Зв'язаними хаотичними подіями L -типу на упорядкованій множині X_0 будемо називати членів хаотичних послідовностей $x_n^{(1)}$ і $x_n^{(2)}$ ($n = 1, 2, \dots$), для яких існують такі функції $P_n(x^{(1)}, x^{(2)}, N) \geq 0$ і $P_g(x^{(1)}, x^{(2)}, N) \leq 1$, де $x^{(1)} \in X_0$, $x^{(2)} \in X_0$, числа $N = 1, 2, \dots$, що для них справедлива система нерівностей

$$\begin{aligned} P_n(x^{(1)}, x^{(2)}, N) &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} F(x^{(1)}, x^{(2)}, x_{n+i}^{(1)}, x_{n+i}^{(2)}) \leq \\ &\leq P_g(x^{(1)}, x^{(2)}, N) \quad \forall n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Функції $P_n(\cdot)$ і $P_g(\cdot)$ будемо називати відповідно нижньою і верхньою гранями взаємної функції розподілу таких хаотичних подій.

Наслідок 1 (із визначення 3). Якщо для всіх $x^{(1)} \in X_0$ і $x^{(2)} \in X_0$ існує

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_n(x^{(1)}, x^{(2)}, N) &= \lim_{N \rightarrow \infty} P_g(x^{(1)}, x^{(2)}, N) = \\ &= P(x^{(1)}, x^{(2)}), \end{aligned} \quad (18)$$

то взаємна функція розподілу хаотичних подій $P(x^{(1)}, x^{(2)})$ буде відповідати взаємної функції розподілу деяких двох випадкових подій на множині елементарних подій X_0 .

За функцією $F(\cdot)$ у вигляді (16) для членів двох хаотичних послідовностей $x_n^{(1)}$ і $x_n^{(2)}$ можна визначити аналогічні функції у вигляді (6) від членів будь-якої з цих послідовностей:

$$\begin{cases} F(x^{(1)}, x_n^{(1)}) = \lim_{x^{(2)} \rightarrow +\infty} F(x^{(1)}, x^{(2)}, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}), \\ F(x^{(2)}, x_n^{(2)}) = \lim_{x^{(1)} \rightarrow +\infty} F(x^{(1)}, x^{(2)}, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}). \end{cases} \quad (19)$$

Відповідно

$$\begin{cases} P_n(x^{(1)}, N) = \lim_{x^{(2)} \rightarrow \infty} P_n(x^{(1)}, x^{(2)}, N), \\ P_g(x^{(1)}, N) = \lim_{x^{(2)} \rightarrow \infty} P_g(x^{(1)}, x^{(2)}, N). \end{cases} \quad (20)$$

Розглянемо тепер випадок, коли множина елементарних подій X_0 має вигляд замкнутого інтервалу на числовій осі $[-\Delta; \Delta]$, тобто хаотичні послідовності $x_n^{(1)}$ і $x_n^{(2)}$ задовільняють умові виду (9).

Виразуємо подвійний інтеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta}^{\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} F(x^{(1)}, x^{(2)}, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) dx^{(1)} dx^{(2)} &= \\ &= \int_{x_n^{(1)}}^{\Delta} dx^{(1)} \cdot \int_{x_n^{(2)}}^{\Delta} dx^{(2)} = (\Delta - x_n^{(1)}) (\Delta - x_n^{(2)}). \end{aligned} \quad (21)$$

Звідси

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} F(x^{(1)}, x^{(2)}, x_{n+i}^{(1)}, x_{n+i}^{(2)}) \right] dx^{(1)} dx^{(2)} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\Delta - x_{n+i}^{(1)}) (\Delta - x_{n+i}^{(2)}) \quad (22)$$

Подвійний інтеграл від нерівностей (17) дає наступну систему нерівностей виду

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} P_n(x^{(1)}, x^{(2)}, N) dx^{(1)} dx^{(2)} \leq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\Delta - x_{n+i}^{(1)}) (\Delta - x_{n+i}^{(2)}) \leq \int_{-\Delta}^{\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} P_n(x^{(1)}, x^{(2)}, N) dx^{(1)} dx^{(2)} \quad \forall n = 1, 2, \dots, N = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Ці нерівності встановлюють зв'язок між гранями взаємної функції розподілу і нелінійними обмеженнями на значення членів взаємозв'язаних хаотичних числових послідовностей.

4. ХАОТИЧНІ ДИСКРЕТНІ ПРОЦЕСИ

При розгляді членів хаотичної послідовності x_n ($n = 1, 2, \dots$), передбачалося, що номер n визначає лише номер реалізації явища, досліду чи спостереження. Проте можна вважати, що реалізація відбувається в часі і кожному номеру відповідає момент часу t_n , тобто

$$x_n = x(t_n), \quad t_1 < t_2 < t_3 < \dots, \quad (24)$$

Визначення 4. Дискретну часову послідовність виду (24) із заданими моментами часу t_n ($n = 1, 2, \dots$), де значення x_n складають хаотичну послідовність з деякими нижньою і верхньою гранями функції розподілу хаотичних подій L -типу на заданій множині елементарних подій X_0 , будемо називати хаотичним дискретним процесом.

Найчастіше реалізація в часі хаотичних подій відбувається послідовно через рівний проміжок часу Δt , який називають періодом квантування за часом.

Тоді

$$t_n = t_0 + n\Delta t, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

де t_0 - деякий початковий відлік часу, з якого починається спостереження за хаотичною подією. Для такого хаотичного дискретного процесу знання характеристик виду (7) і величини Δt дозволяє в подальшому оцінювати його вплив на об'єкти та вимірювальні пристрої. Зокрема, коли x_n є числами, що задовольняють умову (9), то справедливі нерівності (12), які використовуються при рішенні задач оцінювання, розпізнавання та керування.

В той же час, існує відмінність хаотичних процесів від хаотичних подій, а саме, важливість залежності чи незалежності їх характеристик від початкового часу t_1 (з якого починається спостереження - вимірювання результатів певного явища чи досліду).

Визначення 5. Дискретний хаотичний процес виду (24) будемо називати стаціонарним, якщо

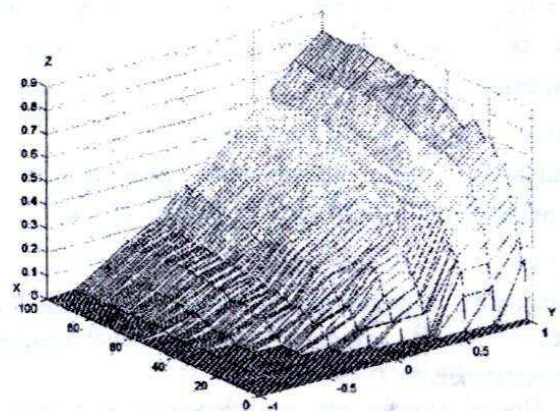
значення нижньої і верхньої граней функції розподілу хаотичних подій x_n при будь-яких $N = 1, 2, \dots$ не залежать від початкового моменту часу t_1 .

Тобто, якщо будь-яку кількість членів хаотичної послідовності x_n на початку буде вилучено і визначення системи нерівностей (7) почнеться для $n \geq n_1 > 0$, де n_1 деяке ціле число, то значення функцій $P_1(\cdot)$ і $P_2(\cdot)$ для стаціонарного хаотичного процесу залишаться незмінними. Природно, що ті процеси, для яких проявляється залежність цих характеристик від початкового моменту часу, називатимуться нестаціонарними.

6. ВИСНОВКИ

Введені поняття хаотичних подій і хаотичних послідовностей, які мають нижню і верхню грані власної функції розподілу послідовності хаотичних подій на множині елементарних подій, а також нижню і верхню грані взаємної функції розподілу різних послідовностей хаотичних подій. Хаотичні події, що реалізуються за часом, називаються хаотичними процесами. Для числових хаотичних послідовностей вказані функції розподілу визначають множинні оцінки (що задаються системою лінійних нерівностей) для значень членів хаотичної послідовності на будь-якому заданому інтервалі сусідніх їх номерів. Такі нерівності можуть використовуватись для гарантованого оцінювання параметрів і стану об'єктів на основі інтервально-множинного аналізу. Проведено комп'ютерне моделювання різних типів хаотичних послідовностей і експериментально визначені їх характеристики.

На рисунку приведено графік нижньої грані функції розподілу числової хаотичної послідовності, згенерованої за допомогою стандартного генератора випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $[-1, 1]$.



При цьому рівні x в функції (6) вибирались дискретними з кроком 0,2, а $N = 1,100$. Кількість членів згенерованої послідовності чисел, на якій вираховувались значення функції $P_n(\cdot)$ в (7) була рівною 3600.

САМООРГАНІЗАЦІЯ КОЛЕКТИВІВ ВИРІШУВАЛЬНИХ ПРАВИЛ В ЗАДАЧАХ РОЗПІЗНАВАННЯ

В.І.Васильєв

*Міжнародний науково-навчальний центр ЮНЕСКО інформаційних технологій та систем,
просп. Акад. Глушкова, 40, Київ, МСП 680, 03680, Україна.*

Тел. (044) 266-4187, E-mail: vas175@irtc.uran.net.ua

АНОТАЦІЯ

Розглянуто можливість використання колективів вирішувальних правил в задачах розпізнавання образів. Показано, що в алгоритмах, які базуються на методі граничних спрощень та методі групового врахування аргументів, можуть самоорганізуватись колективи вирішувальних правил, до яких можуть бути застосовані всі відомі правила формування колективних рішень.

ВСТУП

До методів розпізнавання звертаються частіше всього в тих випадках, коли не вдається побудувати формальну теорію, яка б описувала досліджувані об'єкти, та використати класичні математичні методи. Досить довго переважна більшість застосувань теорії розпізнавання була пов'язана з недостатньо формалізованими областями – медициною, геологією, соціологією, хімією та інш. Для вирішення окремої задачі чи класу задач на основі правдоподібних міркувань пропонується нестрогий, але змістовно розумний метод вирішення та побудований на його основі алгоритм.

Колективи вирішувальних правил та їх самоорганізація

Загальне захоплення проблемами розпізнавання привело до появи великої кількості евристичних алгоритмів, які з успіхом вирішували різні конкретні задачі без їх серйозного обґрунтування. При цьому стало очевидним, що поява кожного нового евристичного алгоритму

можна розглядати як деякий експеримент, а з усією множиною цих експериментів працювати як з новою для математики множиною об'єктів, тобто вивчати з допомогою строгих математичних процедур вирішення недостатньо формалізованих задач. В результаті сформувався принципово новий підхід до розв'язання задачі розпізнавання, який полягає в переході від дослідження окремих некоректних алгоритмів до дослідження принципів формування колективних рішень. В результаті виник новий метод колективного розпізнавання, в основу якого була покладена алгебраїчна теорія алгоритмів [1]. Найбільш характерним і найбільш практично важливим результатом нового підходу став той факт, що практично завжди ефективність колективного рішення виявлялась вищою від ефективності розв'язку будь-якого конкретного алгоритму із сформованого колективу.

Введення операцій над розпізнавальними операторами забезпечує можливість розширення висхідної сукупності алгоритмів, так як кожний новий оператор породжує новий алгоритм.

Розширені таким чином розпізнаючі алгоритми володіють досить сильними коректуючими властивостями [1]. Навіть у тих випадках, коли у висхідному сімействі розпізнаючих алгоритмів відсутній алгоритм, що правильно вирішує дану задачу, то при виконанні деяких, які можуть бути просто перевірені, опущень відносно висхідної навчальної інформації, алгоритм, що правильно вирішує задачу, все ж існує в

розширеному наборі, причому такий алгоритм може бути виписаний в явному вигляді.

Зустрічаються випадки, коли деякі конкретні алгоритми можуть виробляти відразу цілу множину вирішувальних правил, на базі яких можуть бути сформовані колективи. Тут будуть розглянуті два таких алгоритми: метод групового врахування аргументів (МГВА) [3] і метод граничних спрощень (МГС) [4], які можуть генерувати множини майже рівноцінних по якості, але суттєво різних по структурі, вирішувальних правил, на базі яких можуть бути організовані колективи, що приймають рішення.

В основу методу групового врахування аргументів (МГВА) покладено декілька основних принципів: неостаточність проміжних рішень та єдиність остаточного рішення. Одночасно з оптимізацією коефіцієнтів апроксимуючого поліному відбувається оптимізація його складності, що дозволяє не турбуватися про вибір його структури. Спеціальний критерій (зовнішнє доповнення) виступає перепоною на шляху переускладнення моделі, так як відкидає все, що не здатна відтворити коротка навчаюча вибірка (відкидання «сміття»). В результаті залишається тільки те, що может бути надійно підтверджено конкретною вибіркою.

В якості апроксимуючого поліному у МГВА частіше всього використовується поліном виду:

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk} x_i x_j x_k + \dots, \quad (1)$$

де x_i – складова вектора, що описує об'єкт. Це зручно, так як з допомогою такого поліному можна досягти досить точної апроксимації любой дифференційованої функції.

Цей складний поліном замінюється множиною простих функцій:

$$y_1 = f(x_1, x_2); y_2 = f(x_1, x_3); \dots; y_n = f(x_{m-1}, x_m), \quad (2)$$

де $n = C_m^2$, причому функція f скрізь однакова.

Досить часто в якості функції f вибирається така залежність:

$$y = f(x_i, x_j) = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_j + \alpha_3 x_i x_j \quad (3)$$

Коефіцієнти в цих залежностях знаходять по МНК на точках навчаючої послідовності. Побудовані моделі з певними коефіцієнтами α розглядаються як самостійні розпізнавачі та перевіряються на перевіірчній послідовності, яка є зовнішнім доповненням і не використовується при визначенні коефіцієнтів. В результаті цієї перевірки вибираються N кращих моделей і по них будуються більш складні моделі наступного ряду. В другому ряді розглядаються більш складні моделі такого виду:

$$z_1 = f(y_1, y_2); z_2 = f(y_1, y_3); \dots; z_{n_1} = f(y_{n_1-1}, y_n), \quad (4)$$

де $n_1 = C_n^2$;

Тут функції f залишаються попередніми, тобто відповідають співвідношенню (3), але аргументами цих функцій виступають змінні y_i . Коефіцієнти цих моделей визначаються по МНК на точках тієї самої навчаючої послідовності, а потім ці моделі перевіряються на точках перевіірочної послідовності і з них вибираються N кращих, які використовуються в якості аргументів слідуєчого третього ряду. Складність поліномів зростає від ряду до ряду, незважаючи на те, що коефіцієнти цих поліномів визначаються по одних і тих же точках навчаючої послідовності. При цьому число визначених коефіцієнтів значно переважає число точок навчаючої послідовності. Якби не було зовнішнього доповнення, тобто самовідбору по перевіірчній вибірці, то алгоритми МГВА, дякуючи складності синтезуючих поліномів, могли б абсолютно точно апроксимувати розділяючу

функцію в усіх точках навчаючої вибірки, але при цьому не лишилось би ніяких гарантій задовільного розпізнавання нових точок. Зовнішнє доповнення зупиняє роботу алгоритмів відразу ж по досягненню єдиного мінімуму похибок на перевірочній послідовності. Тим самим вибирається модель оптимальної складності, яка встановлює компроміс між складністю вирішувальної функції та об'ємом інформації, що використовується при синтезі моделі. Але в тому ряді, в якому з'являється модель, що забезпечує мінімум похибок на навчаючій послідовності, існує ще по крайній мірі C_n^2 моделей, які також дають непогані результати. Якщо вибрати з них L найкращих моделей, то можна сформулювати колектив вирішувальних правил, ранг якого дорівнюватиме L . До цього колективу можна застосувати всі ті правила, які використовуються при формуванні колективних рішень, розглянутих в рамках алгебраїчного підходу.

В методі граничних спрощень (МГС) використовується принцип редукції, детально розглянутий в [4]. В основу цього принципу покладено максимальне спрощення (редуціювання) висхідної задачі, в результаті чого синтезується такий простір малої розмірності, в якому лінійне вирішувальне правило найкращим чином розділяє навчаючу вибірку досить великого об'єму. Цей простір синтезується послідовно шляхом відбору і перевірки різних комбінацій властивостей об'єктів [3]. Спочатку розглядаються всі пари із m властивостей (таких пар буде C_m^2). Вибирається в деякому розумінні найкраща пара і до неї підлаштовуються всі інші властивості. Серед отриманих на базі кращої пари трійок, що аналізуються, знову вибирається найкраща і до неї підлаштовуються інші властивості. Такий процес продовжується аж до побудови простору, в якому навчаюча вибірка буде або безпомилково, або

найкращим чином розділятися лінійним вирішувальним правилом.

Різновидністю МГС є альфа-процедура [3], яка функціонує за наступними правилами. Розглянемо всі пари із m властивостей. Для кожної пари (x_i, x_j) та для кожної точки навчаючої послідовності

$$\tilde{x}_{ij} = \rho_{ij} \cos(\beta_{ij} + \alpha_{ij}^*), \quad (5)$$

$$\text{де } \rho_{ij} = \sqrt{x_i^2 + x_j^2}; \quad \beta_{ij} = \arctg \frac{x_j}{x_i}.$$

Кут α_{ij} змінюється в інтервалі від 0^0 до 180^0 і являється змінним, що настроюється в процедурі, параметром лінійного вирішувального правила, яке діє в площині (x_i, x_j) . Вибирається оптимальне значення

$$\alpha_{ij}^* = \arg \max_s \omega_{ijs} \quad (6)$$

де ω_{ijs} число правильно розпізнаних об'єктів при допомозі вирішувального правила, що діє в площині (x_i, x_j) при конкретному значенні s . Серед всіх пар вибирається така, в площині якої відбулось найкраще розділення. Цей формалізм практично здійснює проектування точок навчаючої послідовності на напрям \tilde{x}_{ij} , який повертається навколо початку координат на кут α_{ij} і вибирається такий кут α_{ij}^* , який забезпечує найкраще лінійне розділення вибірки при її проекції на напрямок \tilde{x}_{ij} .

Після цього до вибраної пари прилаштовуються послідовно всі інші властивості. Припустимо, що була вибрана пара x_i, x_j . Тоді розглядаються пари (\tilde{x}_{ij}, x_k) , де x_k – одна із властивостей, які заново випробовуються. Серед всіх пар знову вибирається така, що максимізує число правильних відповідей і вже вона визначає трійку x_i, x_j, x_k . Далі розглядаються пари (\tilde{x}_{ijk}, x_t) , де x_t – одна із властивостей, які ще лишились. Така процедура продовжується доти, поки в площині

однієї з пар не відбудеться або безпомилкове, або оптимальне розділення образів. Тут же ми відмітимо, що кінцевий результат, до якого приводить альфа-процедура, у великій мірі залежить від вибору висхідної пари властивостей. Стандартна альфа-процедура передбачає вибір початкової пари, виходячи з її оптимальності в розумінні найкращого розділення навчаючої послідовності в площині вибраної пари. Але це далеко не завжди гарантує найкращий кінцевий результат, тобто не завжди простір, в якому вперше наступить лінійне розділення, буде мінімальної розмірності при умові, що початкова пара вибрана оптимальною. А це вказує на те, що не завжди доцільно вибирати тільки одну оптимальну пару. Якщо вибрати декілька пар і на їх основі продовжити синтез простору, то буде сформовано декілька просторів різної структури, тобто з різними координатами, в яких можуть бути отримані досить хороші результати. А це означає, що вибір декількох висхідних пар приведе до того, що буде отримано цілу множину рішень однієї й тієї ж задачі, тобто буде отримано колектив вирішувальних правил, на базі якого можна буде сформувані колективні рішення. Якщо вибрати L висхідних пар, то можна побудувати колектив рангу L . Висхідні пари можна вибрати по мірі погіршення якості лінійного розділення навчаючої послідовності і тоді можна сподіватися, що серед отриманої множини рішень будуть і оптимальні. Разом з тим, колективне рішення може дати виграв навіть тоді, коли серед отриманих рішень, які увійшли до колективу, не було жодного, яке вирішувало б задачу безпомилково.

ВИСНОВКИ

Отже, як алгоритми МГВА, так і алгоритми МГС по своїй природі такі, що можуть генерувати не одне, а цілу множину рішень. Якщо вказати тільки ранг колективу, який треба сформувати, то відбудеться самоорганізація колективу наперед вказаного рангу. Причому наперед ніхто не вказує,

якої структури вирішувальне правило повинно ввійти в цей колектив. Алгоритми самі вибирають ці правила і самі формують їх структуру. Конструктор повинен вказати тільки ранг колективу.

Породжувальні при допомозі МГВА та МГС вирішувальні правила такі, що в кожному з них вирішувальна функція може бути представлена у вигляді

$$y = F(X). \quad (7)$$

Тут X – вектор, який представляє об'єкт розпізнавання. Складові цього вектора в різних алгоритмах можуть суттєво відрізнятися по своїй структурі та можуть містити складні комбінації груп висхідних складових їх множини (x_1, \dots, x_m) . До такої родини вирішувальних правил может бути в повній мірі застосована алгебраїчна теорія, а також будь-які методи прийняття колективних рішень, які дозволять істотно розширити можливості алгоритмів МГВА и МГС.

ЛІТЕРАТУРА

1. Журавлев Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания классификации // Проблемы кибернетики: Сб.ст.М.: Наука, 1978. Вып.33.с.5-68.
2. Ивахненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. – Киев.: Техника: 1975. – с.311.
3. Васильев В.И. Теория редукции в проблемах экстраполяции// Проблемы управления и информатики. – 1996. №1,2. – с.239-251.

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ НАВЧАННЯ ЗА ВИБОРКАМИ МАЛОГО ОБСЯГУ

А.С.Краснопоясовський, І.В.Шелехов

Сумський Державний Університет

Римського-Корсакова 2, м Суми Україна 40007

Тел. +38 0542 214084, факс +38 0542 334058

E-mail: kras@kpm.sumdu.edu.ua

Розглядається підхід до оптимізації параметрів навчання в рамках екстремально-інформаційного методу функціонально-статистичних випробувань (МФСВ), який ґрунтується на прямій оцінці інформаційної здатності системи розпізнавання.

ВСТУП

Основним недоліком відомих методів розпізнавання образів є відсутність у процесі навчання корекції вхідного математичного опису з метою побудови високоточного класифікатора [1]. Цей недолік усунуто в МФСВ [2,3], в рамках якого розглянемо оптимізацію параметрів навчання за навчальними виборками малого обсягу, що має важливе практичне значення.

1. ПОСТАНОВЛЕННЯ ЗАДАЧІ

Нехай відомо алфавіт класів розпізнавання $\{X_m^o \mid m = \overline{1, M}\}$ і структурований вектор параметрів навчання $g = \langle g_1, \dots, g_\xi, \dots, g_\Xi \rangle$, які впливають на точнісні характеристики (ТХ) класифікатора. Такими параметрами є безпосередньо геометричні параметри контейнерів і параметри нормалізації образів. Під контейнером K_m^o класу X_m^o згідно роботи [4] тут розуміється його замкнена роздільна гіперповерхня, для якої деяким способом визначено геометричний центр. Для нечіткого розбиття $\tilde{\mathfrak{R}}^{|M|}$ бінарного простору ознак Ω_B , яке допускає перетиняємість класів розпізнавання, необхідно виконання таких умов:

- $(\forall X_m^o \in \tilde{\mathfrak{R}}^{|M|}) [X_m^o \neq \emptyset];$
- $(\exists X_k^o \in \tilde{\mathfrak{R}}^{|M|}) (\exists X_l^o \in \tilde{\mathfrak{R}}^{|M|}) [X_k^o \neq X_l^o \rightarrow X_k^o \cap X_l^o \neq \emptyset], k, l = \overline{1, M};$
- $(\forall X_k^o \in \tilde{\mathfrak{R}}^{|M|}) (\forall X_l^o \in \tilde{\mathfrak{R}}^{|M|}) [X_k^o \neq X_l^o \rightarrow$

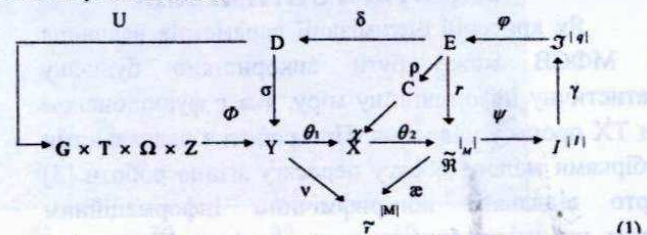
$\rightarrow KerX_k^o \cap KerX_l^o = \emptyset]$, тобто ядра класів не перетинаються;

- $\bigcup_{X_m^o \in \tilde{\mathfrak{R}}^{|M|}} X_m^o \subseteq \Omega_B \subset X$, де X – простір Хеммінга.

Так само відома дійсна або ціла навчальна матриця $\|y_{m,i}^{(j)}\|$. Треба шляхом нормалізації матриці $\|y_{m,i}^{(j)}\|$ для класу X_m^o знайти максимальне значення критерію функціональної ефективності (КФЕ) E_m^* , яке визначає оптимальні в інформаційному (точнісному) розумінні параметри навчання.

2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ НАВЧАННЯ

Подано універсум випробувань у вигляді декартова добутка $W = G \times T \times \Omega \times Z$, де G – вхідна змінна; T – множина моментів зняття інформації; Ω – простір ознак; Z – множина станів. Введемо оператор $\Phi: W \rightarrow Y$ формування вхідного математичного опису Y класифікатора – навчальної матриці $\|y_{m,i}^{(j)}\|$ і оператор $\theta: Y \rightarrow \tilde{\mathfrak{R}}^{|M|}$ побудови розбиття $\tilde{\mathfrak{R}}^{|M|}$, який є композицією двох операторів: $\theta_1: Y \rightarrow X$ і $\theta_2: X \rightarrow \tilde{\mathfrak{R}}^{|M|}$, де X – бінарна вибіркова множина. Тоді діаграма відображень множин, які застосовуються в процесі навчання за МФСВ, має вигляд



Тут оператор ν апіорної побудови і оператор α апостеріорної побудови нечіткого покриття $\tilde{L}^{|M|}$,

яке задається алфавітом $\{X_m^o\}$, замикають комутативне кільце діаграми. Нехай оператор класифікації $\Psi: \tilde{\mathfrak{R}}^{|M|} \rightarrow I^{|I|}$ перевіряє основну статистичну гіпотезу про належність реалізацій класу X_m^o , де $I^{|I|}$ – множина виходів (гіпотез); I – кількість гіпотез. Для обчислення КФЕ навчання оператор $\gamma: I^{|I|} \rightarrow \mathfrak{Z}^{|q|}$ шляхом оцінки прийнятих гіпотез формує множину $\mathfrak{Z}^{|q|}$, де $q = I^2$ – кількість ТХ, а оператор $\varphi: \mathfrak{Z}^{|q|} \rightarrow E$ обчислює множину E значень КФЕ, який є функціоналом від ТХ. Ітераційний процес оптимізації параметрів розбиття реалізується оператором $r: E \rightarrow \tilde{\mathfrak{R}}^{|M|}$ шляхом пошуку максимуму критерію E_m^* . Завдяки принципу композиції кожний параметр навчання має відповідний контур оптимізації в діаграмі (1). При цьому обов'язковим є виконання умови повної композиції: множина E є загальною для всіх контурів оптимізації. Серед інших параметрів навчання, які впливають на достовірність класифікатора, розглянемо систему полів контрольних допусків $\{\delta_{K,i} | i = \overline{1, N}\}$ на значення ознак розпізнавання і рівні селекції $\{\rho_m\}$ координат еталонних векторів (ЕВ), які визначають центри контейнерів. Нехай ітераційний процес оптимізації системи контрольних допусків, яка утворює множину D , реалізується оператором $\delta: E \rightarrow D$ і оператором $\sigma: D \rightarrow Y$, який змінює значення реалізацій образу в процесі навчання. Нехай значення рівнів селекції утворюють множину C , а ітераційний процес їх оптимізації реалізується послідовно оператором $\rho: E \rightarrow C$ і оператором $\chi: C \rightarrow X$, який змінює бінарну навчальну матрицю. Оператор $U: E \rightarrow G \times T \times \Omega \times Z$ регламентує процес навчання.

3. КРИТЕРІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ

Як критерій оптимізації параметрів навчання за МФСВ може бути використано будь-яку статистичну інформаційну міру, яка є функціоналом від ТХ процесу навчання. При роботі з навчальними вибірками малого обсягу перевагу згідно роботи [5] варто віддавати логарифмічним інформаційним мірам, що мають згладжувальний ефект. Наприклад, для двоальтернативної системи оцінок і рівномірних гіпотез згідно принципу неповноти

апріорної інформації Бернуллі-Лапласа можна застосовувати, наприклад, модифікацію нормованого критерію за Шенноном у вигляді [6]:

$$E = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha + D_2} \log_2 \frac{\alpha}{\alpha + D_2} + \frac{\beta}{D_1 + \beta} \log_2 \frac{\beta}{D_1 + \beta} + \frac{D_1}{D_1 + \beta} \log_2 \frac{D_1}{D_1 + \beta} + \frac{D_2}{\alpha + D_2} \log_2 \frac{D_2}{\alpha + D_2} \right), \quad (2)$$

де α , β , D_1 , D_2 – ТХ: помилки першого і другого роду, перша і друга достовірності відповідно. Критерій (2) є нелінійним і неоднозначним функціоналом ТХ, що вимагає оцінки в процесі навчання робочої області визначення його значень.

4. ОСОБЛИВОСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ АЛГОРИТМУ ОПТИМІЗАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ НАВЧАННЯ

Алгоритм навчання у рамках МФСВ полягає в послідовній реалізації ітераційних процедур оптимізації параметрів навчання шляхом пошуку максимуму КФЕ навчання для кожного контуру оптимізації в діаграмі (1). З метою спрощення класифікатора як наближення “точного” контейнера, наприклад, класу X_m^o може розглядатися гіперсфера, центром якої є вершина ЕВ $x_m \in X_m^o$, що відповідає прийнятній для задач контролю і управління гіпотезі компактності (як чіткої, так і нечікої) реалізації образу. Тоді як параметри оптимізації за діаграмою (1) розглядаються радіуси $\{d_m\}$ контейнерів, контрольні допуски на ознаки розпізнавання і рівні селекції $\{\rho_m\}$ координат ЕВ.

5. ПРИКЛАД РЕАЛІЗАЦІЇ АЛГОРИТМУ НАВЧАННЯ ЗА МФСВ

Розглянемо задачу оптимізації геометричних параметрів контейнера у вигляді гіперсфери на прикладі автофокусування растрового електронного мікроскопа РЕМ-103 виробництва ВАТ SELMI (м.Суми, Україна) за зображенням зразка, що досліджується. Ідея автофокусування полягає в побудові на кожному кроці настроювання мікроскопа оптимального контейнера для початкового розфокусованого зображення (клас X_1^o) як за своїми реалізаціями, так і реалізаціями поточного зображення (клас X_S^o), отриманими на S -му кроці настроювання, шляхом пошуку максимуму інформаційної міри різноманітності цих класів. Як параметр настроювання розглядався струм управляючої обмотки об'єктивної лінзи. На рис.1а

наведено початкове розфокусоване зображення об'єкту «Гратка», а на рис.1б – зображення цього об'єкту, отриманого після першого кроку настроювання..

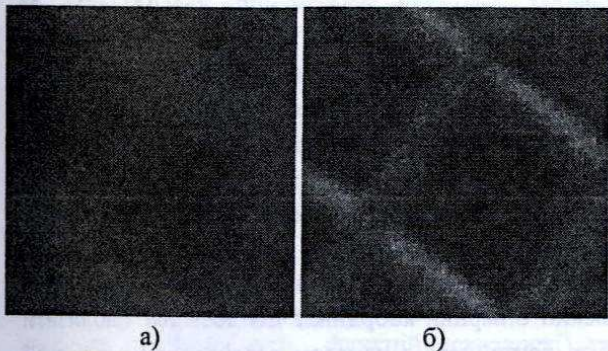


Рис.1. Зображення об'єкту «Гратка»: а)початкове розфокусоване зображення; б) поточне зображення

У процесі реалізації алгоритму навчання за діаграмою (1) було побудовано оптимальний контейнер $K_1^o \subset X_1^o$, який забезпечує максимальну асимптотичну достовірність розпізнавання в режимі екзамену реалізацій класу X_1^o . Оптимальний радіус d_1^* контейнера K_1^o , як видно з рис.2, дорівнює 35 кодівим одиницям відстані при значенні КФЕ $E_1^* = 0,809$. На рис.2 темна область графіка позначає робочу область його визначення, в якій $D_1, D_2 > 0,5$. В області I присутні тільки реалізації класу X_1^o , в області II присутні реалізації класів X_1^o і X_S^o , а в

області III – тільки реалізації класу X_S^o . В табл.1 наведено значення критерію E_1 , першої достовірності D_1 і помилки другого роду β , параметрів навчання ρ_1 , d_1 , δ і міжцентрова кодова відстань $d_c = d(x_1 \oplus x_S)$. Як видно з табл.1, оптимальне значення рівня селекції дорівнює $\rho_1^* = 0,54$, а оптимальне поле контрольних допусків для i -ої ознаки дорівнює $x_{1,i} \pm \delta^*$, де $\delta^* = 12$ градаціям яскравості.

Таблиця 1. Результати оптимізації контейнера K_1^o

ρ_1	E_1	D_1	β	d_1	δ	d_c
0,40	0,674989	0,80	0,00	39	12	55
0,42	0,710603	0,84	0,00	33	14	4
0,44	0,710603	0,84	0,00	33	14	38
0,46	0,710603	0,84	0,00	31	14	38
0,48	0,701025	0,83	0,00	30	14	43
0,50	0,754381	1,00	0,12	38	12	45
0,52	0,794417	1,00	0,09	37	12	48
0,54	0,809527	1,00	0,08	35	12	48
0,56	0,809527	1,00	0,08	35	12	51
0,58	0,765397	0,99	0,08	33	12	53
0,60	0,794417	1,00	0,09	33	12	51

Початкові координати ЕВ дорівнювали вибірковим середнім відповідних навчальних виборок. Оскільки навчальна матриця для кожного класу складалася тільки із 100 реалізацій, то центри розсіювання реалізацій не збігалися з вершинами початкових ЕВ.

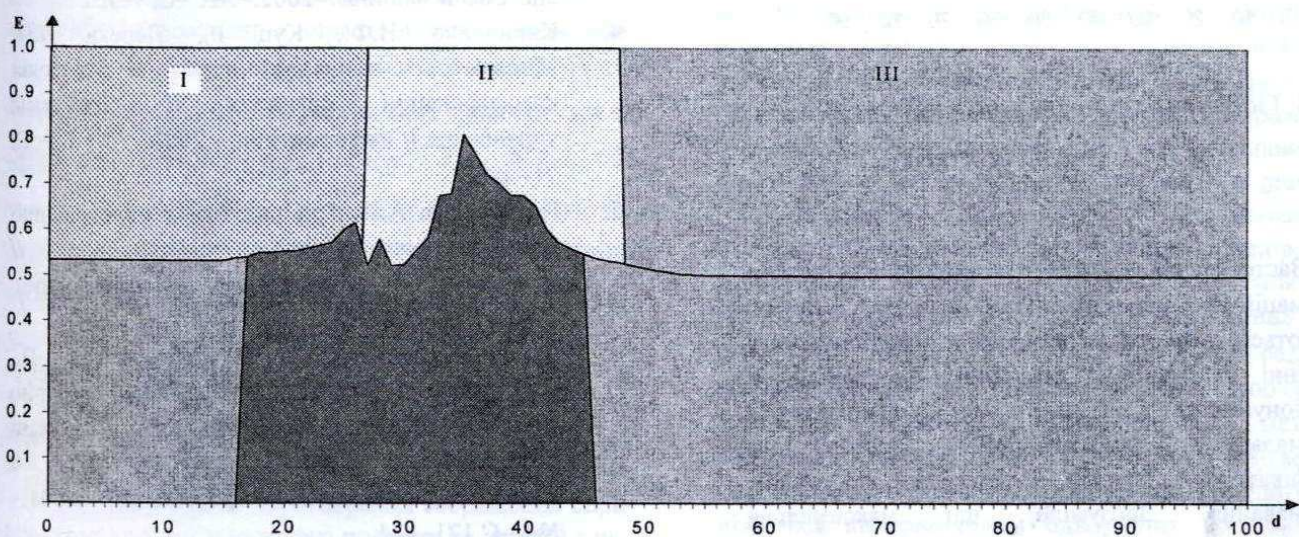


Рис. 2. Залежність КФЕ від радіуса контейнера K_1^o

На рис.3 показано гістограми розподілів реалізацій класів X_1^o (темні дискрети) і X_S^o (світлі дискрети). Тут мітка 1 позначає положення вершини початкового вектора x_1 при $\rho_1=0,50$ (рис.3а) і положення вершини цього вектора при оптимальному рівні селекції $\rho_1^* = 0,54$, яке, як видно з рис.3б, є більш наближеним до центру розсіювання реалізацій класу X_1^o .

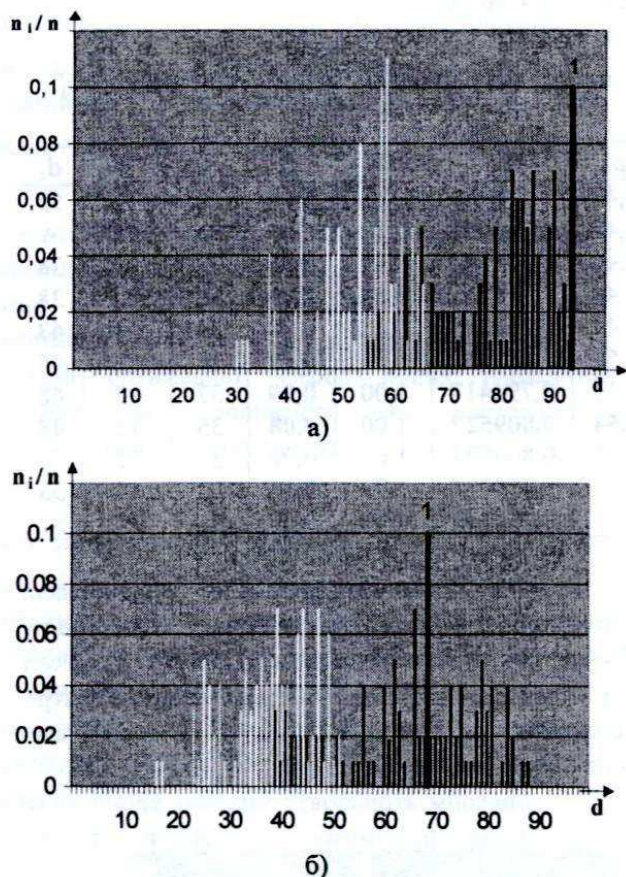


Рис. 3, Гістограма розподілу реалізацій класів X_1^o і X_S^o : а) $\rho=0,50$; б) $\rho=0,54$

ПІДСУМОК

Застосування МФСВ для розв'язання задачі інформаційного синтезу систем розпізнавання, що навчаються, дозволяє оптимізувати в інформаційному розумінні просторово-часові параметри функціонування системи, які забезпечують максимальну асимптотичну достовірність класифікатора за умови перетиняємості класів розпізнавання. Зрозуміло, що максимальна асимптотична функціональна ефективність класифікатора збігається з фактичною тільки за умови однакової структурованості навчальної та

екзаменаційної матриць і однакових показників їх статистичної сталості та статистичної однородності. На відміну від відомих параметричних і непараметричних методів розпізнавання МФСВ дозволяє будувати ефективний класифікатор за репрезентативними в розумінні Паретто навчальними виборками малого обсягу, що важливо для розв'язання практичних задач контролю та управління. Основне обмеження на використання МФСВ полягає в наявності у контейнерів класів розпізнавання деяким способом визначеного геометричного центра. Показано, що вибір оптимального в інформаційному розумінні рівня селекції бінарних координат ЕВ дозволяє наблизити центр контейнера з центром розсіювання реалізацій відповідного класу, що призводить до підвищення достовірності класифікатора..

ЛІТЕРАТУРА

1. Васильев В. И. Распознающие системы. Справочник. 2е изд., перераб. и доп. – Киев: Наукова думка, 1983.– 422 с.
2. Красноясовський А. С., Заговора С. О. Розпізнавання електронограм за методом функціонально – статистичних випробувань // Оброблення сигналів і зображень, та розпізнавання образів: Праці п'ятої Всеукраїнської міжнародної конференції. – Київ, 2000. – С. 37 – 41.
3. Красноясовский А.С. Классификационная настройка сложной системы // Управляющие системы и машины.–2002.–№1.–С. 9–15.
4. Кириченко Н.Ф., Куц Р., Лепеха Н.П. Множества принадлежности в задачах классификации сигналов // Проблемы управления и информатики.– 2001. – № 5. – С. 71– 84.
5. Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации, 1961.–№3.–С.27–35.
6. Красноясовський А. С., Черниш А. В., Сластухевський О.Ю. Про вибір критерію функціональної ефективності системи розпізнавання, що навчається // Радиоэлектроника и информатика, 2001.– №4.–С.121–124.

ІНФОРМАТИВНІСТЬ АФІННО-ІНВАРІАНТНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЕКЦІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ В ЇХ МОРФОЛОГІЧНОМУ АНАЛІЗІ

В.М.Корчинський

Дніпропетровський національний університет

49106, м. Дніпропетровськ, вул. Наукова, 13

Тел.: (0562)43-36-30 Факс: (0562)46-55-23

e-mail: buser @ apl.net-rff.dsu.dp.ua

АНОТАЦІЯ

Визначені інформаційні характеристики (нормовані семіінваріанти функцій яскравості) та їх лінійні комбінації, найбільш інформативні при позиційно-інваріантному розпізнаванні проекційних зображень, одержаних в умовах дальньої фотограмметрії. Запропоновано спосіб визначення оптимальної вимірності простору моделі для забезпечення ідентифікації та аналізу таких зображень із заданою достовірністю.

1. ВСТУП

В роботах [1,2] було розвинено інформаційно-геометричну модель подання форм зображень проекційної природи, інваріантну стосовно їх афінних перетворень, спричинених зміною позиційних умов проєкціювання. У відповідності з нею множина розподілів функцій яскравості таких зображень, одержаних при різних позиційних умовах проєкціювання (ракурс, відстань), подається точками квадрик у просторі інформаційних характеристик – безрозмірних семіінваріантів $S_{n,m}$ парного порядку N від функцій яскравості, нормування яких здійснюється за правилом $Z_i = S_{i-1, N+1-i} / S_{0,0}^n$, $i = \overline{1, N+1}$, де $n = N/2$. З геометричних позицій такі квадрики являють собою сфери при псевдоевклідовій метризації простору інформаційних характеристик R_n^{N+1} , радіуси яких є афінно-інваріантними інформаційними ознаками. Розпізнавання зображення зводиться до визначення належності точки його подання псевдосферам, що визначаються еталонним зображенням у просторах моделі різних вимірностей (при різних N), причому афінні перетворення зображення спричиняють зміщення точки його подання по кожній з цих псевдосфер. Необхідною умовою реалізації моделі є лінійна незалежність семіінваріантів функцій яскравості, на основі яких визначаються компоненти вектора його подання у просторі моделі, а збільшення

його вимірності виправдане лише у випадку реального зростання інформативності. Між тим, існуючі оцінки свідчать, що лінійна незалежність семіінваріантів заданого порядку N може існувати лише в деякій області простору моделі, за межами якої використання усіх компонент вектора Z як інформаційних характеристик зображення є надлишковим. Ця обставина ставить проблему визначення інформативності подання проекційних зображень в рамках афінно-інваріантної моделі їх просторових форм з метою оптимізації алгоритмів морфологічного (позиційно-інваріантного) аналізу. Відповідні результати пов'язані з дослідженням структури перетворень вектору подання його геометричної форми, індукованих афінними перетвореннями у картинній площині.

2. ФІЗИЧНА МОДЕЛЬ ФОРМОУТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Розглядаються проекційні зображення, одержані в умовах дальньої фотограмметрії – відстані між точками об'єкту, відеодатчиком та картинною площиною вважаються суттєво більшими, ніж довжина хвилі випромінення – носія відеоінформації. Об'єкт приймається плоским, а просторовий розподіл інтенсивності випромінення елементів його поверхні описується на феноменологічному рівні – за допомогою індикатриси розсіювання (випромінювання). Вважається, що яскравість зображення пропорційна інтенсивності випромінення. Відповідність між точками об'єкту та його проекційного зображення приймається афінною, $\mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$, де \mathbf{r}, \mathbf{x} – радіуси-вектори відповідних точок зображення та об'єкту в картинній та предметній площинах; \mathbf{A} – матриця однорідних геометричних перетворень; \mathbf{b} – вектор перенесень. (Випадок проєктивної відповідності реалізується використанням однорідних координат в картинній площині.)

Інтегральний зв'язок між функцією яскравості зображення $I(\mathbf{r})$ та скалярною яскравістю $I_0(\mathbf{r})$ в рамках наведених припущень має вигляд [3]

$$I(\mathbf{r}) = C \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}) P(\mathbf{r} - \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1)$$

де $P(\mathbf{x})$ – функція розсіювання точки (ФРТ); $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$; $C = (\lambda)^{-4} (Hd)^{-2}$, λ – довжина хвилі випромінювання - носія відеоінформації, H – висота, з якої здійснюється фіксація зображення, d – відстань між відеодатчиком та картинною площиною.

Співвідношення (1) описує неточкову (нелокальну) відповідність між точками предметної та картинної площини і є основою для обчислення компонент вектору подання зображення \mathbf{Z} .

3. МЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРОСТОРУ МОДЕЛІ

Зв'язок семіінваріантів функції яскравості зображення S_{nm} , скалярної яскравості об'єкту $S_{nm}^{(0)}$ та ФРТ s_{nm} , обчислений на основі співвідношень (1) за методикою [1,2], має вигляд

$$S_{nm} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m C_n^k C_m^l b_{11}^k b_{21}^{n-k} \times b_{22}^l b_{21}^{m-l} S_{k+m-l, n-k+l}^{(0)} + s_{nm}, \quad (2)$$

де C_n^m – біноміальні коефіцієнти; b_{ij} – компоненти матриці \mathbf{B} . Відповідні перетворення вектору \mathbf{Z} , індуковані зміною позиційних умов проєкціювання, у матричній формі:

$$\mathbf{Z}_2 = k_{12}^n \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{Z}_1 + K_2 \mathbf{z}, \quad (3)$$

де \mathbf{M} – матриця перетворення (2); індекси 1, 2 відповідають еталонному зображенню та зображенню, що аналізується; $k_{12} = C_1/C_2$; \mathbf{z} – вектор подання

ФРТ; $K_2 = \left[C_2 Y_2 M_{00}^{(2)} \right]^{-n}$; $Y_2 = \det(\mathbf{B})$. Через M_{00} позначено нульовий декартів момент функції яскравості зображення \mathbf{Z}_2 . У випадку точкової (локальної) відповідності між об'єктом та його проєкційним зображенням $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Компоненти вектору \mathbf{Z} в силу їх означення інваріантні стосовно паралельних перенесень зображення.

Інваріантні багатовиди другого степеня у просторі \mathbf{R}_n^{N+1} для $k=1$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ встановлені в роботах [1,2]. Узагальнюючи відповідні результати на що випадок, що розглядається, одержуємо афінно-інваріантну квадрику у вигляді

$$(\mathbf{Z} - K_2 \mathbf{z})^T \cdot \mathbf{G} \cdot (\mathbf{Z} - K_2 \mathbf{z}) = \frac{1}{k_{12}^2} F_N^2, \quad (4)$$

де F_N^2 – афінно-інваріантна інформаційна ознака геометричної форми зображення. Через \mathbf{G} в (4) по-

значено матрицю метричного тензору простору моделі \mathbf{R}_n^{N+1} з елементами:

$$g_{ij} = (-1)^{n+1-i} \frac{n!}{(i-1)!} \frac{n!}{(N+1-i)!} \delta_{N+2-i,j}, \quad (5)$$

де $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Співвідношення (4) дає можливість трактувати афінно-інваріантну квадрику як псевдосферу радіуса $k_{12}^{-1} |F_N|$ з центром в точці $K_2 \mathbf{z}$ у просторі \mathbf{R}_n^{N+1} з метричним тензором (5).

4. СТРУКТУРА ПЕРЕТВОРЕНЬ ВЕКТОРІВ ПОДАННЯ ПРОЄКЦІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Розглянемо лінійні багатовиди у просторі \mathbf{R}_n^{N+1} , інваріантні стосовно афінних перетворень функції яскравості проєкційного зображення.

Твердження 1. Перетворення вектора подання довільного проєкційного зображення у псевдоевклідовому просторі моделі \mathbf{R}_n^{N+1} , індукованого афінним перетворенням зображення в картинній площині, має принаймні одну інваріантну пряму.

Оскільки підпростір, ортогональний до інваріантного, є також інваріантним підпростором [4], визначена пряма є інваріантною стосовно перетворення з матрицею $\mathbf{M} = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1^{-1}$. В загальному випадку кількість інваріантних прямих та інваріантних гіперплощин перетворення $\mathbf{Z}_1 \rightarrow \mathbf{Z}_2$ дорівнює відповідно кількості дійсних та комплексних коренів характеристичного рівняння матриці \mathbf{M} .

Побудова інваріантних підпросторів дозволяє оцінювати інформаційні властивості окремих компонент векторів подання геометричних форм зображень. Інваріантність гіперплощини у просторі \mathbf{R}_n^{N+1} означає, що точки подання зображень, розташовані у ній, залишаються належними цій гіперплощині при їх афінних перетвореннях; розташування нормалі \mathbf{n} до такої гіперплощини залишається незмінним. Внаслідок цього комбінація компонент вектора подання зображення, яка визначається вектором нормалі, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}$, є сталою до такого перетворення і має найбільшу інформативність. Оскільки цей вектор визначає інваріантну пряму, перетворення вектора подання зображення вздовж неї є тотожним – відповідне власне число матриці перетворення \mathbf{M} дорівнює одиниці. Аналогічно, у випадку, якщо матриця перетворення точок подання зображень у просторі моделі має власне число, яке дорівнює одиниці, найбільш інформативною є комбінація компонент вектора подання, що визначається відповідним власним вектором матриці \mathbf{M} (останній має зміст напрямного вектора відповідної інваріантної прямої).

Отже, інформативність комбінації компонент вектора подання зображення, яка визначається напрямним вектором довільної інваріантної прямої, тим вища, чим ближче відповідне власне число матриці перетворення \mathbf{M} у просторі моделі до одиниці.

В загальному випадку за показник інформативності окремих компонент вектору подання зображення у просторі \mathbf{R}_n^{N+1} , яка визначається k -ю інваріантною прямою, пропонується прийняти величину $\lambda_k / \sum_{i=1}^P |\lambda_i|$, де P - кількість власних чисел матриці \mathbf{M} .

Показник інформативності лінійних комбінацій компонент векторів подання зображень при їх однопараметричних афінних перетвореннях в картинній площині мають дорівнює:

- при масштабуванні вздовж осей картинної системи координат 0.987 (найбільш інформативна компонента Z_{n+1});

- при косому зсуві вздовж осей картинної системи координат 0.91 (найбільш інформативні компоненти Z_1 та Z_{N+1});

- при повороті з довільним центром 0.93 (найбільш інформативна комбінація $Z_1 + Z_{n+2}$).

Як впливає з співвідношень (3), (4), точки подання зображень, зафіксованих у різних спектральних діапазонах, розташовані на афінно-інваріантних псевдосферах з різними радіусами та центрами. Відповідність псевдосфер встановлюється співвідношенням (3): точка Z_2 подання зображення, що аналізується, та еталонного зображення Z_1 пов'язані проєктивною відповідністю з центром у точці \mathbf{z} . За наявності додаткових афінних перетворень зображення, зумовлених зміною позиційних умов фіксації, точка Z_2 зміщується вздовж лінії перетину відповідної квадрики з інваріантною площиною.

На рис. 1-4 подані напівтонові зображення фрагментів земної поверхні, одержані при однакових позиційних параметрах проєкціонування, але на різних довжинах хвиль в оптичному діапазоні (зображення на рис.1 прийняте за еталонне) відповідно при $\lambda_1 = 0.8$ мкм, $\lambda_2 = 0.93$ мкм, $\lambda_3 = 0.97$ мкм, $\lambda_4 = 1.1$ мкм. Компоненти векторів подання зображень у просторі \mathbf{R}_1^3 дорівнюють:

$$\mathbf{Z}_1 = (0.35, -1.23, 3.25)^T; \mathbf{Z}_2 = (1.37, 2.31, 1.75)^T;$$

$$\mathbf{Z}_3 = (2.59, 0.93, 2.25)^T; \mathbf{Z}_4 = (3.86, 0.62, 4.72)^T,$$

що добре узгоджується з наведеним ідентифікаційним критерієм. Зазначимо, що на основі векторів подання трьох зображень фіксованого об'єкту та відомих параметрах їх фіксації можна відновити вектор подання функції розсіювання точки \mathbf{z} (див. співвідношення (3)).

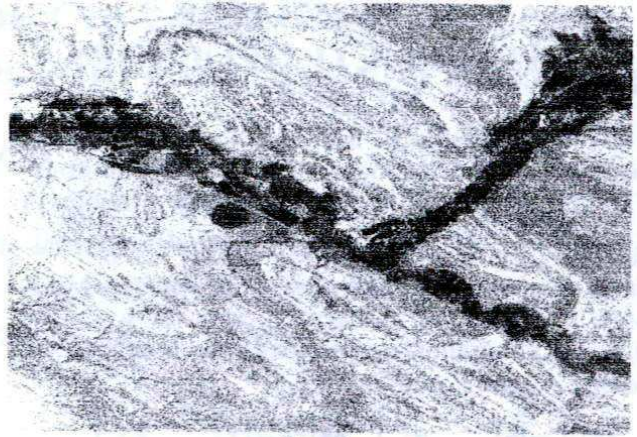


Рис. 1



Рис. 2



Рис. 3

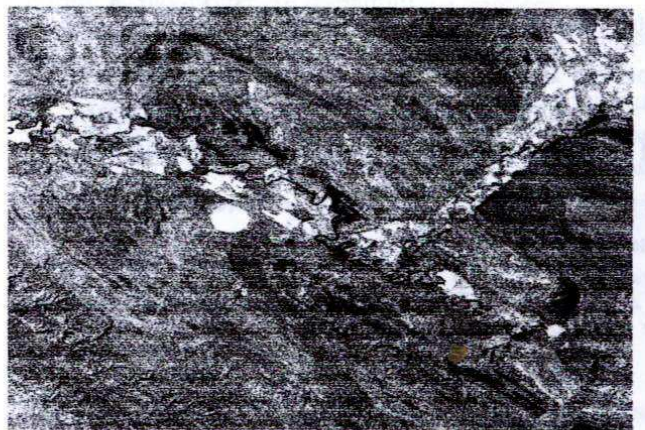


Рис. 4

5. ОПТИМІЗАЦІЯ ВИМІРНОСТІ ПРОСТОРУ МОДЕЛІ

Розглянемо m векторів подання фіксованого проєкційного зображення у просторах моделі різних вимірностей (навчальну вибірку) $z_k \in \mathbf{R}_n^{N+1}$, $Z_k \in \mathbf{R}_l^{L+1}$, де $L > N$, $k = \overline{1, m}$; індекс l відповідає еталонному зображенню. Множини цих векторів подаємо у вигляді матриць, рядки яких відповідають окремим векторам, а стовпці – їхнім компонентам

$$\mathbf{M}^{(1)} = (z_1^T, \dots, z_m^T)^T, \mathbf{M}^{(2)} = (Z_1^T, \dots, Z_m^T)^T,$$

позначаючи елементи матриць відповідно через $m_{ij}^{(1)}$ та $m_{ik}^{(2)}$ ($j = \overline{1, N+1}$, $k = \overline{1, L+1}$). Оскільки вектори подання зображень фіксованого об'єкту, одержаних за різних умов проєкціювання, пов'язані між собою перетворенням (1), мають місце співвідношення

$$\bar{z}_k = \mathbf{B}_k \cdot z_1, \bar{Z}_k = \mathbf{C}_k \cdot Z_1 \quad (k = \overline{1, m}), \quad (7)$$

де через \mathbf{B}_k , \mathbf{C}_k позначені матриці перетворень k -го зображення у просторах \mathbf{R}_n^{N+1} , \mathbf{R}_l^{L+1} .

Лінійні простори вимірності m , базиси яких визначаються стовпцями матриць $\mathbf{M}^{(1)}$, $\mathbf{M}^{(2)}$ (відповідно Π_1, Π_2), є гіперплощинами, зануреними у псевдоевклідові простір \mathbf{R}_{l+1}^{L+3} . Базисні вектори цих просторів позначаємо як $\{e_i : i = \overline{1, N+1}\}$ та $\{E_i : i = \overline{1, L+1}\}$ відповідно. Параметричні рівняння гіперплощин Π_1, Π_2 мають вигляд:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{t}; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{t}, \quad (8)$$

де $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{L+3})$ – вектор параметрів; $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ – довільні точки Π_1 та Π_2 . У співвідношенні (8)

позначено: $\mathbf{A}_1 = (\mathbf{P}^{(1)} e_1, \dots, \mathbf{P}^{(1)} e_{N+1})$;

$\mathbf{A}_2 = (\mathbf{P}^{(2)} E_1, \dots, \mathbf{P}^{(2)} E_{L+1})$, де $\mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{P}^{(2)}$ – матриці проєкціювання просторів \mathbf{R}_n^{N+1} , \mathbf{R}_l^{L+1} на простір \mathbf{R}_{l+1}^{L+3} .

Квадрат косинуса кута між площинами Π_1 та Π_2 обчислений у псевдо евклідовій метриці простору \mathbf{R}_{l+1}^{L+3} дорівнює максимальному власному числу матриці

$$(\tilde{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{G} \mathbf{A}_1)^T (\tilde{\mathbf{A}}_2^T \mathbf{G} \mathbf{A}_2)^T (\mathbf{A}_2^T \mathbf{G} \mathbf{A}_2)^T (\mathbf{A}_1^T \mathbf{G} \tilde{\mathbf{A}}_1)^T,$$

де \mathbf{G} – матриця метричного тензора простору \mathbf{R}_{l+1}^{L+3} ; $\tilde{\mathbf{A}}_1$ – матриця проєкцій напрямних векторів гіперплощини Π_1 на гіперплощину Π_2 .

Твердження 2. Мірою додаткової інформації про форму проєкційного зображення, яка вноситься при збільшенні порядку моделі, є кут між гіперплощинами, що визначаються стовпцями інформаційних матриць подання множини зображень у моделюючих просторах відповідних вимірностей.

Алгоритм визначення оптимальної вимірності простору моделі базується на обчисленні кута між гіперплощинами Π_1 та Π_2 при збільшенні порядку моделі за умови лінійної не залежності стовпців інформаційних матриць. Оптимальній за інформативністю вимірності простору моделі відповідає нульове значення цього кута.

6. ВИСНОВКИ

1. Афінні перетворення проєкційних зображень, зумовлені зміною позиційних умов проєкціювання, спричиняють однорідні лінійні перетворення інформаційних характеристик зображень (безрозмірних семіінваріантів функцій яскравості), структура яких визначає інваріантні лінійні багатовиди у просторі моделі.

2. Перетворення вектору подання довільного проєкційного зображення у псевдоевклідовому просторі моделі \mathbf{R}_n^{N+1} , індукованого афіним перетворенням зображення у картинній площині, має принаймні одну інваріантну пряму. Усі афінно-інваріантні гіперплощини простору моделі ортогональні інваріантним прямим в рамках псевдоевклідової метризації простору моделі.

3. Мірою додаткової інформації про форму та розподіл яскравості проєкційного зображення, яка забезпечується при використанні інваріантної геометричної моделі при збільшенні її порядку, є кут між гіперплощинами, що визначаються стовпцями інформаційних матриць подання навчальної вибірки зображень у моделюючих просторах відповідних вимірностей.

ЛІТЕРАТУРА

1. Михайленко В.Є., Корчинський В.М. *Концепція геометричного об'єкту в морфологічному аналізі проєкційних зображень* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КДТУБА, 1997. - Вип. 61. - С.59-63.
2. Корчинський В.М. *Обратная задача идентификации изопланатических изображений* // Математические модели и современные информационные технологии. - К.: Ин-т математики НАН України, 1998. - С. 69-71.
3. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. *Введение в статистическую радиофизику: Случайные поля*. - М.: Наука, 1978. - 464 с.
4. Гельфанд И.М. *Лекции по линейной алгебре*. - М.: Наука, 1966. - 364 с.

Кластеризація багатовимірних та багатопараметрових зображень “без вчителя” на основі генетичного алгоритму

О. М. Ахметшин, Е. В. Пирогов

Дніпропетровський Національний Університет, Україна, 49050,

м. Дніпропетровськ, пер. Науковий 13

Електронна пошта : akhm@mail.dsu.dp.ua

Abstract

In article offered new unsupervised clustering method multimeasure and multiparameter data based on genetic algorithm. The model is capable to an estimation of amount clusters in data. The article consist of the theoretical description of the offered model and her parameters, examples of clustering multiparameter NMR medical image and multimeasure image of earth surface.

Анотація

В роботі запропоновано новий метод кластеризації “без вчителя” багатовимірних та багатопараметрових даних оснований на генетичному алгоритмі. Отримана модель здатна до оцінки кількості кластерів в даних. Робота складається з теоретичного опису запропонованої моделі, її параметрів та прикладів кластеризації багатопараметрового ЯМР медичного зображення і багатовимірного зображення земної поверхні.

1. Вступ

Серед методів кластеризації особливе місце займають алгоритми, що дають змогу оцінити кількість кластерів в даних. Оцінка кількості кластерів в даних, що аналізуються для багатьох прикладних задач розпізнання є вирішальним для висновків про належність об'єктів до однієї групи.

Актуальними задачами, які потребують алгоритмів самоорганізуючої кластеризації є задачі медичної діагностики, прикладні задачі економіки, дистанційні задачі геофізики та ін.

Але при великій потребі в алгоритмах даного типу їх кількість досі мала. Це пояснюється складністю побудови моделі кластеризації в якій будуть одночасно покращуватись параметри кластерів відносно міжкластерної відстані та внутрішньокластерної щільності і при цьому буде варіюватись кількість кластерів з метою знаходження глобального оптимуму. Прикладом моделі для кластеризації без вчителя є самоорганізуючі карти Кохонена [2].

В роботі представлено новий метод кластеризації “без вчителя” на основі генетичного алгоритму.

2. Метод

Вибором моделі генетичного алгоритму для вирішення задачі самоорганізуючої кластеризації стало те, що генетичні алгоритми – евристичні алгоритми що здатні знаходити глобальний максимум функції. Евристична модель генетичного алгоритму ґрунтується на твердженні про те, що не вигідно отримувати якісно покращенні результати за допомогою поганих початкових даних.

Нехай необхідно кластеризувати багатовимірну вибірку $D = \{d_1 .. d_n\}$ де n – кількість даних в g -мірній вибірці.

Для розробки алгоритму кластеризації “без вчителя” на основі моделі генетичного алгоритму потрібно ввести наступні поняття :

1. Популяція – множина реалізацій розбиття даних на кроці ітераційного процесу.

$$Q = \{g_1 .. g_m\} \quad (1)$$

2. Ген – реалізація розбиття даних на кластери.

$$g_i = L_1 .. L_{k_i} \quad (2)$$

k_i – кількість кластерів в даній реалізації. L_i – індекс елемента даних, що вважається центром кластера.

За допомогою генетичного алгоритму буде виконуватись ітераційний пошук оптимального розбиття на кластери. На кожному кроці ітерації оцінюються отримані розбиття і для подальшого розвитку популяції покращуються ті розбиття, що є кращими в відношенні середньої міжкластерної відстані та середньої внутрішньокластерної щільності. Отримані таким чином нові реалізації розбиття будуть замінити ті розбиття, що оцінені як погані на даному кроці ітераційного процесу.

Генетичний алгоритм складається з операторів селекції, схрещування та мутації [1].

Селекцією називається вибір двох генів з популяції для проведення операції схрещування. При цьому імовірність того, що ген буде вибрано обраховується за формулою :

$$P(g_i) = \frac{\sqrt{P_i^{dist^2} + P_i^{dens^2}}}{\sum_{i=1}^m \sqrt{P_i^{dist^2} + P_i^{dens^2}}} \quad (3)$$

P_i^{dist} - імовірність того, що ген буде вибрано завдяки кращій середній міжкластерній відстані.

$$P_i^{dist} = \frac{\sum_{l=1}^{k_i} \sum_{j=1}^{k_l} dist(d_{L_j^{g^1}}, d_{L_l^{g^1}})}{k_i - 1} \quad (4)$$

$dist(d_{L_j^{g^1}}, d_{L_l^{g^1}})$ - відстань між двома кластерами.

P_i^{dens} - імовірність того, що ген буде вибрано завдяки кращій середній внутрішньокластерній щільності. При цьому для оцінки щільності в кластері використовується середньоквадратичне відхилення даних, що належать кластеру відносно центра кластера :

$$P_i^{dens} = \frac{1 - P_i^{std}}{\sum_{j=1}^M 1 - P_j^{std}} \quad (5)$$

Обраховується як обернена імовірності вибору гена відносно середньоквадратичного відхилення в кластері.

$$P_i^{std} = \frac{\sum_{j=1}^{k_i} std(d_{L_j^{g^1}}, U_{L_j^{g^1}})}{k_i - 1} \quad (6)$$

$std(d_{L_j^{g^1}}, U_{L_j^{g^1}})$ - середньоквадратичне відхилення обраховане для $U_{L_j^{g^1}}$ - множини даних, що входить

до кластера, відносно центра кластера $d_{L_j^{g^1}}$

Схрещування - операція, за допомогою якої знаходять нові реалізації розбиття на кластери. Операція проводиться над генами, що були вибрані за допомогою оператора селекції. Нехай вибрано два гена g^1 та g^2 виберемо один з цих генів як головний. Тобто такий, кластери якого будуть переноситись до нового гена незмінними. Нехай це g^1

Обробка головного гена. Спочатку проводять операцію видалення з розбиття таких кластерів, відсутність яких покращить середню міжкластерну відстань в реалізації та середню внутрішньокластерну щільність. Для цього обраховують обернені імовірності видалення кластерів з гена g^1 :

$$P_i^{g^1} = \frac{\sqrt{P(g^1)_i^{dist^2} + P(g^1)_i^{dens^2}}}{\sum_{i=1}^m \sqrt{P(g^1)_i^{dist^2} + P(g^1)_i^{dens^2}}} \quad (7)$$

$$де P(g^1)_i^{dist} = \frac{\sum_{j=1}^{k_{g^1}} dist(d_{L_j^{g^1}}, d_{L_k^{g^1}})}{\sum_{k=1}^{k_{g^1}} \sum_{j=1}^{k_{g^1}} dist(d_{L_j^{g^1}}, d_{L_k^{g^1}})} \quad (8)$$

$$P(g^1)_i^{dens} = \frac{std(d_{L_j^{g^1}}, U_{L_j^{g^1}})}{\sum_{k=1}^{k_{g^1}} std(d_{L_k^{g^1}}, U_{L_k^{g^1}})} \quad (9)$$

Кластери, що потрібно видалити із розбиття задовольняють умові :

$$P_i^{g^1} < w/k_{g^1} \quad (10)$$

де w - коефіцієнт жорсткості видалення. $w \rightarrow 1$.

Після видалення з головного гена поганих кластерів формується новий ген g^* , до якого входять всі кластери, що залишилися в головному.

Синтез нових кластерів. Синтез нових кластерів проводять на основі кластерів, що вже є в новому гені та кластерів, що є в допоміжному гені g^2 .

Для того, щоб встановити, з яких саме кластерів необхідно формувати нові кластери знаходять матрицю схрещування :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \dots k_{1k_g} \\ b_{k_{g^2}1} \dots k_{k_{g^2}k_g} \end{bmatrix} \quad (11)$$

де :

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 - \text{немає схрещування} \\ 1 - \text{схрещуються } i\text{-й кластер} \\ \quad \text{з нового гена та} \\ \quad j\text{-й кластер з допоміжного} \end{cases} \quad (12)$$

Ця матриця формується за допомогою ймовірностей схрещування :

$$P_{ij}^{cross} = P_i^{g^*} * P_j^{g^2} \quad (13)$$

де $P_i^{g^*}$ та $P_j^{g^2}$ обраховуються за формулою (7).

Після створення матриці схрещування для кожної пари кластерів активних для цієї матриці проводять схрещування за наступною схемою :

- Нехай схрещуються два кластери задані індексами L_1 та L_2 тоді їх бінарне перетворення :

$$\begin{aligned} L_1 &\rightarrow LB_1 \{lb_1^1 \dots lb_{b_{max}}^1\} \\ L_2 &\rightarrow LB_2 \{lb_1^2 \dots lb_{b_{max}}^2\} \end{aligned} \quad (14)$$

Де $b_{max} = \log_2(n)$

- Формують бінарну матрицю допустимих нащадків :

$$LB = \begin{bmatrix} lb_1^1, lb_2^1, lb_3^1, \dots, lb_{b_{max}}^1 \\ lb_1^2, lb_2^2, lb_3^2, \dots, lb_{b_{max}}^2 \\ \dots \\ lb_1^1, lb_2^1, lb_3^1, \dots, lb_{b_{max}}^1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{int}} LI = \begin{bmatrix} l_1 \\ \dots \\ l_{b_{max}-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

З матриці нащадків вибирають такого нащадка, який знаходиться як надалі від батьків. Тобто до нової реалізації розбиття вноситься такий кластер, що знаходиться як надалі від кластерів, що його утворили.

3. Після отримання нового кластеру L^* його вносять до g^*

Сформований ген g^* потрібно внести до популяції – для цього з популяції виносять ген з найгіршими характеристиками міжкластерної відстані та внутрішньокластерної щільності. Імовірність того, що ген буде видалено з популяції обернена імовірності того, що ген буде брати участь в схрещуванні. Тобто :

$$\bar{P}(g_i) = \frac{\sqrt{\bar{P}_i^{dist\ 2} + \bar{P}_i^{dens\ 2}}}{\sum_{i=1}^m \sqrt{\bar{P}_i^{dist\ 2} + \bar{P}_i^{dens\ 2}}} \quad (16)$$

де

$$\bar{P}_i^{dist} = \frac{1 - P_i^{dist}}{\sum_{j=1}^M 1 - P_j^{dist}} \quad (17)$$

$$\bar{P}_i^{dens\ 2} = \frac{1 - P_i^{dens}}{\sum_{j=1}^M 1 - P_j^{sens}} \quad (18)$$

Оператор мутації використовується для того, щоб знайдені в процесі еволюціонування популяції розбиття прагнули до глобального оптимуму. Тобто оператор мутації – цілеспрямоване внесення в популяцію випадкової інформації з метою виведення системи із локальних оптимумів. В залежності від наявних даних імовірність мутації можливо варіювати з метою отримання більш швидкої збіжності ітераційного процесу.

4. Параметри моделі.

Вхідними параметрами моделі є :

1. **Розмір популяції.** Цей параметр відповідає за швидкість сходження еволюційного процесу до стаціонарного стану. Встановлення його дуже малим буде гальмувати процес завдяки невеликій кількості реалізацій, що будуть порівнюватись між собою. Але вибір великої популяції може гальмувати час виконання ітерацій.
2. **Коефіцієнт жорсткості видалення** – відповідає за видалення “поганих” кластерів на етапі синтезу нового гена. $W \in (0,1)$ Є регулювальником сходження алгоритму. При $W=1$ як і при $W \rightarrow 0$ алгоритм буде розходитись, бо в першому випадку кількість кластерів в новому гені буде постійно зменшуватись, в другому – кількість кластерів буде постійно зростати.
3. **Імовірність мутації** – відповідає за виведення популяції з локального мінімуму. Дуже велике

значення цього коефіцієнта буде лише погіршувати вже знайдені розбиття і може привести до розходження алгоритму, дуже мале значення призведе до того, що процес пошуку буде затримано в локальному оптимумі, і навіть до того, що локальний оптимум буде вибрано, як глобальний. Для більшості задач імовірність мутації 10% така ж як для природної мутації.

Важливим аспектом є встановлення критерію зупинки алгоритму. Такий критерій може бути отримано за допомогою аналізу стабільності прогресу середньої міжкластерної відстані та середнього внутрішньокластерної щільності.

5. Використання метода для кластеризації багатовимірних та багатопараметрових зображень.

Багатовимірні та багатопараметрові зображення використовуються в багатьох галузях прикладної науки. Це можуть бути медичні мультізображення чи мультізображення земної поверхні. Аналіз таких зображень з метою виділення інформації про наявність об'єктів різних типів – важлива задача діагностики.

Було оброблено багатопараметрове ЯМР медичне зображення, що складалось з трьох гомографічних зображень (рис 1). Для кластеризації було використано метрику Евкліда. Отримане кластеризоване зображення виявило наявність 49 кластерів (рис 2.а). Ітераційний алгоритм ініціювався за допомогою популяції з 10 реалізацій. Центри кластерів в початкових реалізаціях було задано випадково, максимальна кількість кластерів в початковій реалізації 20. Імовірність мутації 10%. Коефіцієнт жорсткості видалення в операторі схрещування 0.9. Зупинка ітераційного процесу проводилась за допомогою аналізу усталеності прогресу міжкластерної відстані та прогресу внутрішньокластерної щільності (рис 2.б рис 2.в). Отримано 588 ітерацій.

Також було кластеризовано багатовимірне зображення земної поверхні яке мало 3 параметри (рис 3.а). Кластеризоване зображення містить 32 кластери (рис 3.б). Розмір популяції містив 10 реалізацій. Початкова популяція формувалась випадково з максимальною кількістю кластерів в реалізації 10. Імовірність мутації 10%. Коефіцієнт жорсткості видалення в операторі схрещування 0.9. Ітераційний процес стабілізувався на 303 ітерації.

Висновки.

Використання генетичного алгоритму як базового для моделі самоорганізуючої кластеризації – принципово новий підхід до вирішення проблеми побудови алгоритмів кластеризації “без вчителя”.

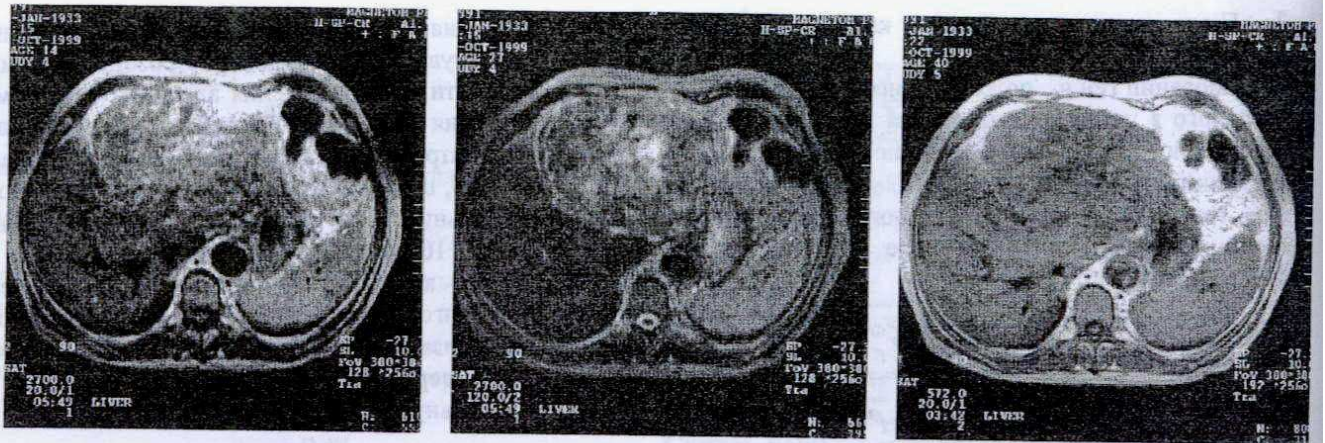


Рис. 1 Багатопараметрове ЯМР медичне зображення.

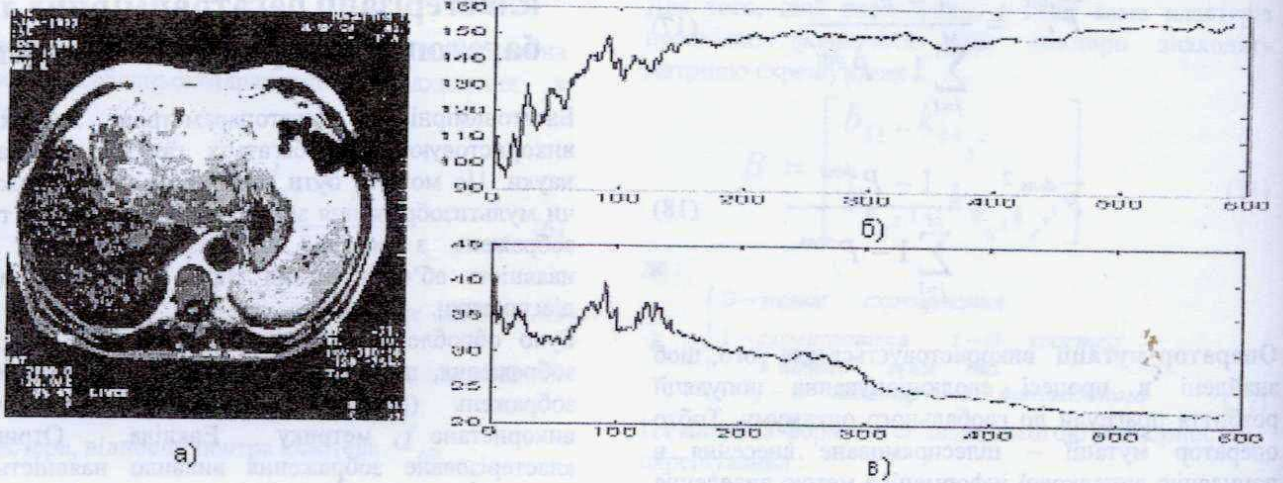


Рис. 2 Результат кластеризації багатопараметрового медичного зображення : а) нове кластері зоване зображення (49 кластерів); б) прогрес середньої міжкластерної відстані; в) прогрес середнього внутрішньокластерного середньоквадратичного відхилення.

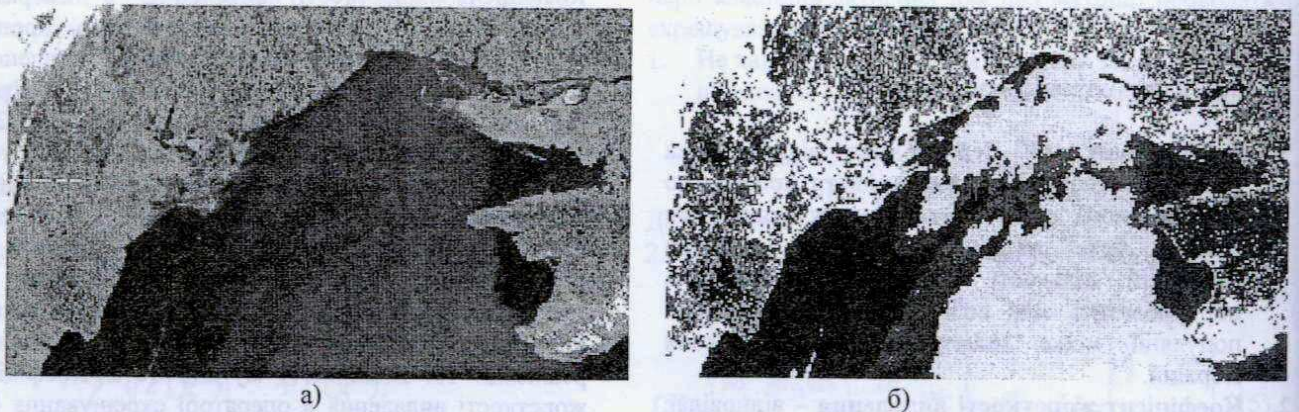


Рис. 3 Багатовимірне зображення земної поверхні (а) та нове кластері зоване зображення (б) 32 кластера.

В роботі розроблено алгоритм кластеризації багатовимірних даних "без вчителя", що базується на генетичному алгоритмі та виконана його комп'ютерна реалізація для медичних зображень та зображень земної поверхні.

Література

1. Goldberg D. E. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. Addison Wesley, MA. 1989.
2. Kohonen D. Self-organizing maps. NY. Springer-Verlag, 1995

СИНТЕЗ ЗОБРАЖЕНЬ, ЩО ХАРАКТЕРИЗУЮТЬСЯ ТОЧКОВИМИ ТИПАМИ СИМЕТРІЇ

В.М.Хавалко

Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури, м.Львів-31, а/с 5446,
Тел./факс (0322) 63-03-11, victorkh@dndiii.lviv.ua

В статті розглянуто задачу синтезу зображень і складних геометричних об'єктів (СГО), які характеризуються точковими типами симетрії. Для розширення множини синтезованих зображень як непохідні елементи запропоновано використовувати фрактальні криві різних розмірностей та рівнів деталізації. Побудовано та програмно реалізовано інформаційно-аналітичну систему (ІАС) синтезу зображень, в тому числі і симетричних.

ВСТУП

В теорії і практиці побудови систем розпізнавання, оцінки, класифікації і синтезу зображень зустрічаються зображення різного походження, фізичної природи і структури. У зв'язку з цим розглядають прості і складні зображення. До простих зображень відносять зображення, які не підлягають подальшому розбиттю на простіші і використовуються як непохідні елементи для синтезу і опису зображень складнішої структури і геометричної форми. Досить часто такі зображення характеризуються тим чи іншим типом симетрії. Для побудови складних зображень та опису взаємозв'язків між структурними елементами таких зображень прийнято використовувати R -функції [1], а також структурний [2] і функціональний [3] підходи. Однак застосування непохідних елементів, які описуються засобами традиційної Евклідової геометрії, не може забезпечити достатньої різноманітності та повноти множини синтезованих зображень, а тому доцільно доповнити цю множину непохідними елементами, які не є традиційними в сенсі Евклідової геометрії. Такими непохідними елементами є криві та поверхні фрактальної геометрії [4, 5], при побудові яких прийнято використовувати рекурсивний підхід [6, 7] та системи ітераційних функцій [8, 9].

1. ТОЧКОВІ ТИПИ СИМЕТРІЇ

Відповідно до основних означень [1], якщо O – об'єкт в R^n , а $Q: R^n \rightarrow R^n$ перетворення, яке визначається формулою

$$x' = Qx = Ax + b,$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то об'єкт $O \subset R^n$ характеризується деяким типом симетрії, якщо існує хоча б одне перетворення $Q \in \{Q_i\}$, відмінне від одиничного перетворення, таке що $Q^*O = O$.

Крім цього, якщо $f = 0$ – рівняння СГО O , який симетричний відносно перетворення Q , то вважаємо, що рівняння $f = 0$ має такий самий тип симетрії (тобто $f = 0$ симетричне відносно Q), якщо $f(Qx) = f(x)$.

Рівняння $f = 0$ будемо називати косиметричним відносно Q , якщо $f(Qx) = -f(x)$.

Загальноприйнята така класифікація за типами симетрій:

- ◆ Точкові типи симетрії:
 - симетрія відносно точки;
 - симетрія інверсії;
 - симетрія відносно площини;
 - симетрія відносно осі.
- ◆ Симетрії трансляційного типу.

Перетворення симетрії, які зберігають нерухомими хоча би одну точку простору прийнято називати точковими. Очевидно, що будь-яке точкове перетворення має вигляд

$$x' = Ax. \quad (1)$$

В інших випадках говорять про симетрію трансляційного типу.

1.1. Симетрія відносно осі

Для синтезу СГО, які характеризуються симетрією відносно осі, запропоновано новий алгоритм, який базується на матриці перетворення симетрії порядку N відносно осі Ox_1 .

$$C_{x,N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi/N & \sin 2\pi/N \\ 0 & -\sin 2\pi/N & \cos 2\pi/N \end{pmatrix}.$$

Означення 1. СГО O є симетричним відносно прямої C , яка називається віссю симетрії, якщо після повороту на кут $\alpha_N = 2\pi/N$, де N – ціле число більше одиниці, він займає початкову область простору. N називається порядком симетрії осі.

1.2. Симетрія інверсії

Симетрії цього типу відповідає перетворення (1) з матрицями:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Якщо $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 0$ – рівняння СГО або зображення O , який володіє симетрією в сенсі її інваріантності відносно перетворень (2). При цьому саме рівняння $f(x) = 0$ відносно перетворень (2) може бути і не симетричним. Очевидно, що рівняння $f(x_1, -x_2, -x_3) = 0$ також буде рівнянням СГО O при $i=1$, $f(-x_1, x_2, -x_3) = 0$ при $i=2$ і $f(-x_1, -x_2, x_3) = 0$ при $i=2$. Тоді симетричні рівняння для A_1 , A_2 та A_3 відповідно матимуть вигляд:

$$f_1(x) = 0.5 * [f(x_1, x_2, x_3) + f(x_1, -x_2, -x_3)] = 0,$$

$$f_2(x) = 0.5 * [f(x_1, x_2, x_3) + f(-x_1, x_2, -x_3)] = 0, \quad (3)$$

$$f_3(x) = 0.5 * [f(x_1, x_2, x_3) + f(-x_1, -x_2, x_3)] = 0.$$

Замість операції додавання, згідно з [1], в рівняннях (3) можна використовувати довільний тип операцій об'єднання або перетину, які ґрунтуються на R -функціях.

1.3. Симетрія відносно площини

Симетрії цього типу відповідає перетворення (1) з матрицями:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ – для СГО, які симетричні}$$

відносно площини $x_1 O x_2$;

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – для СГО, які симетричні}$$

відносно площини $x_1 O x_3$;

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – для СГО, які симетричні}$$

відносно площини $x_2 O x_3$.

Методики описані в попередніх пунктах, справедливі для цього типу точкової симетрії і є загальним прикладом, який використовується в більшості випадків. Однак в плані обчислювальних затрат цей тип симетрії приводить до громіздких виразів, що ускладнює реалізацію в реальному часі.

1.4. Симетрія відносно точки

Синтез зображень симетричних відносно точки [1] полягає в побудові такого рівняння $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, для якого справедливі такі припущення.

Якщо $f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$ – довільне рівняння СГО O_1 , яке характеризується симетрією відносно перетворення (1), де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

але саме рівняння не є симетричними відносно цього перетворення, то рівняння СГО O_1 можна записати у вигляді

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0.5 * [f(x_1, x_2, x_3) + f(-x_1, -x_2, -x_3)] = 0$$

і це рівняння буде симетричним відносно типу симетрії, що розглядається. Інший підхід до побудови зображень, які характеризуються симетрією відносно точки і який також базується на властивостях R -функцій, розглянуто в [1].

2. НЕПОХІДНІ ЕЛЕМЕНТИ ФРАКТАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Сучасні методи синтезу складних зображень використовують дійсні функції для опису елементарних об'єктів до яких застосовується ряд операцій, для синтезу більш складних зображень. Задання або вибір множини елементарних об'єктів, а також опис основних операцій, які дозволяють проводити перетворення над об'єктами, створювати плавні об'єкти та ін. належать до основних задач при синтезі складних зображень [10, 11].

В цій роботі пропонується доповнити традиційну, в сенсі Евклідової геометрії, множину непохідних елементів основними типами кривих фрактальної геометрії. Насамперед, це продиктовано тим, що фрактальна геометрія серед рекурсивних підходів є глобальним та потужним засобом, а протягом багатьох років розвитку розроблено велику кількість класів і типів методів та алгоритмів для роботи з СГО, які характеризуються високою ступінню складності і для опису яких потрібно застосовувати інший апарат ніж Евклідова геометрія.

До основних типів фрактальних кривих та об'єктів належать: просторово-заповнюючі і традиційні лінійні криві, а також різноманітна множина тривимірних об'єктів (губка Менгера, трикутник Серпінського, множини Жулія та ін.).

До традиційних одновимірних фрактальних кривих, які широко використовуються при синтезі складних природних структур, належать крива Коха, $3/2$ - крива та ін. Ці, а також багато інших фракталів відносяться до класу геометричних фракталів, які є найбільш наочними і зрозумілими. Поняття елементарного об'єкта в фрактальній геометрії дещо відрізняється від такого ж поняття в інших підходах синтезу та представлення зображень. Суть процесу побудови фрактальних кривих полягає в тому, що на початку задається відрізок певної довжини (ініціатор), кожна лінійна частина якого на подальших етапах побудови замінюється генератором, який з допомогою коефіцієнтів масштабування набуває потрібних розмірів [12]. На наступних етапах побудови кожен відрізок ламаної попереднього етапу замінюється генератором зменшеним в 4 рази для $3/2$ -кривої і в 3 рази для

кривої Коха. Процес побудови триває до тих пір, поки не досягнеться задовільна точність, або, коли зміни при переході від одного етапу до іншого стають непомітними для ока спостерігача.

3. СИСТЕМИ ІТЕРАЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Ще одним способом побудови фракталів є задання систем ітераційних функцій (СІФ). Систем, які відображають одну багатовимірну множину в іншу. Найбільш проста система ітераційних функцій складається з афінних перетворень площини:

$$\begin{aligned} u &= a * x + b * y + e \\ v &= c * x + d * y + f. \end{aligned}$$

Отже, зображення кодується декількома простими перетвореннями (в нашому випадку афінними), тобто коефіцієнтами цих перетворень.

Якщо систему ітераційних функцій замінити оператором Хатчінсона W , то ітераційний процес можна записати наступним чином

$$A_{k+1} = W(A_k), k = 0, 1, 2, \dots,$$

де A_0 – початкова множина (зображення), а $\{A_k\}$ – послідовність множин (зображень), отримана багаторазовим застосуванням W . Отримуємо послідовність, яка прямує до кінцевого зображення A_∞ , яке називається атрактором СІФ і залишається інваріантним щодо системи ітераційних функцій. В термінах W це означає

$$A_\infty = W(A_\infty).$$

Кінцеве зображення (атрактор) A_∞ і буде фракталом.

4. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ СИСТЕМИ СИНТЕЗУ СИМЕТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

На основі концепцій побудови ІАС синтезу зображень [13], розбиття таких систем на рівні абстракції [14], а також запропонованих алгоритмів синтезу СГО симетричної структури створено ІАС синтезу складних зображень і алгоритмічне забезпечення до цієї системи. В розробленій ІАС задача синтезу розв'язується шляхом виконання двох наступних етапів: 1) побудова аналітичного опису СГО, використовуючи множини елементарних геометричних об'єктів, операцій та відношень [10, 11]; 2) візуалізація синтезованого СГО або інше застосування отриманого аналітичного виразу.

Користувач ІАС взаємодіє з системою за допомогою найвищого рівня абстракції – графічного інтерфейсу користувача (ГІК). Ця взаємодія відбувається через спроектовану мову, яка може бути як текстовою або візуальною, так і поєднувати ці два види. На цьому рівні доступні засоби для побудови, модифікації, архівації і знищення як простих, так і складних об'єктів, а також присутні засоби для аналізу проектування.

Побудована ІАС функціонує таким чином. Нехай потрібно синтезувати чи відтворити СГО. Користувач, за допомогою ГІК, вибирає непохідні елементи та операції чи відношення з відповідних бібліотек. Кожен непохідний елемент визначений за допомогою параметризованої функції дійсних змінних. Відповідні параметри, під час вибору елемента з бібліотеки, в інтерактивному режимі задає користувач. Для підвищення ефективності роботи системи користувач повинен чітко знати логіку побудови СГО, який він хоче синтезувати. Якщо потрібного непохідного елемента в бібліотеці не має, то користувач, використовуючи СІК, може доповнити бібліотеку необхідним елементом. Для цього передбачено використання стандартних математичних функцій ('exp', 'sin', 'sqrt', 'sqrt', 'cos' та ін.). Таким чином, користувач, за допомогою ІАС, задає аналітичну конструкцію, яка описує синтезований СГО. При цьому основні теоретико-множинні операції задаються використовуючи зарезервовані символи ('|' – об'єднання, '&' – перетин, '\ ' – віднімання, '~' – заперечення, '@' – Декартовий добуток та ін.). Згідно з заданою аналітичною формулою та вибраною гамою кольорів ІАС синтезує зображення. При необхідності, користувач може побудувати поверхню, яка відповідає синтезованому СГО.

У випадку синтезу СГО симетричної структури користувач ІАС, використовуючи вікно вибору типів симетрії (рис.1), має можливість вибрати відповідний тип симетрії, який буде притаманним синтезованому СГО.

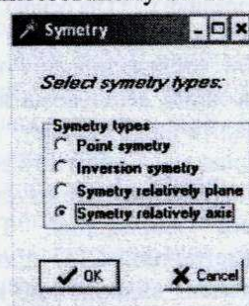


Рис.1. Вікно вибору типів симетрії

Після цього користувачу необхідно задати початкові координати синтезованого зображення (рис.2), а також порядок симетрії, тип непохідних елементів, які при цьому будуть використовуватись і рівень рекурсії у випадку вибору фрактальних кривих як непохідних елементів (рис.3).

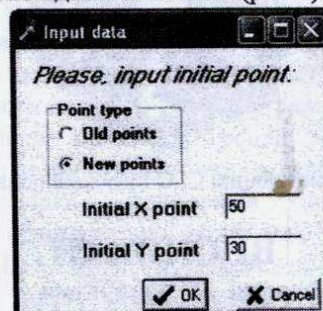


Рис.2. Вікно задання початкових координат

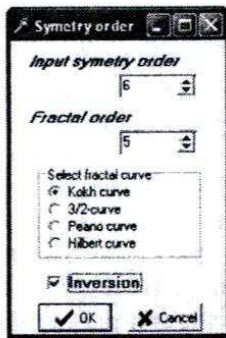


Рис.3. Вікно задання параметрів синтезованого СГО

Множина побудованих, за допомогою ІАС, зображень і СГО симетричної структури (рис.4, рис.5), які характеризуються широкою різноманітністю і крім цього СГО є інваріантними щодо різних форм представлення непохідних елементів.

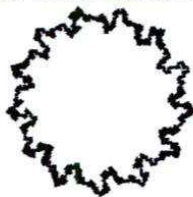


Рис.4. Синтезований СГО на основі 3/2 -кривої

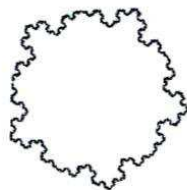


Рис.5. Синтезований СГО на основі кривої Коха

Синтезовані зображення зручні в зберіганні, адже описуються лише декількома коефіцієнтами – параметрами аналітичного виразу, що відповідає даному типу зображень. Саме типу зображень тому, що змінюючи параметри отримуємо можливість синтезувати різні зображення. Так на рис.6. зображено осесиметричний СГО п'ятого порядку, а як непохідний елемент використано криву Гільберта четвертого порядку. Крім цього візуалізація синтезованих зображень спрощується завдяки внутрішньому представленню побудованих аналітичних виразів.

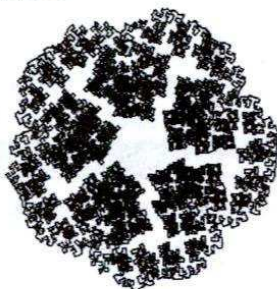


Рис.6. Осесиметричний СГО на основі кривої Гільберта

ВИСНОВКИ

Запропоновані алгоритми поєднують елементи функціонального, структурного і

рекурсивного підходів. Саме таке поєднання призводить до різкого зменшення обчислювальних затрат, та затрат, які необхідні на зберігання синтезованих СГО і зображень. Застосування функціонального підходу до синтезу зображень складної геометричної форми і структури, а систем ітераційних функцій – до опису непохідних елементів таких синтезованих СГО і зображень дає можливість досягнути високих коефіцієнтів стиску і дозволяє ефективним чином кодувати отримувані зображення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Рвачов В.Л. *Теория R-функций некоторые ее приложения.*- Киев: Наукова думка, 1982.- 456 с.
2. Александров В.В., Горский Н.Д. *Алгоритмы и программы структурного метода обработки данных.*- Ленинград: Наука, 1983.- 208 с.
3. Pasko A., Adzhiev V., Sourin A., Savchenko V. *Function representation in geometric modelling: concepts, implementation and applications // The Visual Computer.*- 1995.- vol.11.- №8.- P.429-446.
4. Mandelbrot Benoit B. *The Fractal Geometry of Nature.*- WH Freeman and company, 1977.- 468P.
5. Massopust P.R. *Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets.*- San Diego, Calif.: Acad. Press, 1994.- 383 P.
6. Александров В.В., Горский Н.Д. *Представление и обработка изображений. Рекурсивный подход.*- Ленинград: Наука, 1985.- 192с.
7. Мальцев А.И. *Алгоритмы и рекурсивные функции.*- М.:Наука, 1986.- 367с.
8. Michael Barnsley *Fractals everywhere.*- Academic press: Jones and Bartlett Publishers, 1988.- 394P.
9. Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D. et. al. *Fractals for the Classroom: Strategic Activities.*- New York: Springer-Verlag, 1999.- Vol. Two.- 187 P.
10. Хавалко В.М. *Використання теоретико-множинних операцій для синтезу та перетворень геометричних об'єктів // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології.*- 1999.- №386.- С.164-172.
11. Хавалко В.М. *Проблема вибору множини елементарних об'єктів для ефективного синтезу складних зображень // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології.*- 2000.- №392.- С.131-136.
12. Peitgen H.-O., Richter P.H. *The beauty of fractals: images of complex dynamical systems.*- Berlin: Springer, 1986.- 199 P.
13. Хавалко В.М. *Інформаційно-аналітична система синтезу та обробки зображень: концептуальний підхід // Труды Одесского политехнического университета.*- 2002.- Вып. 4(16).- С.86-90.
14. Хавалко В.М., Манишин І.Р. *Інформаційно-аналітична система як ефективний засіб синтезу складних зображень // Комп'ютерна технологія друкарства.*- 2000.- №4.- С.301-308.

СЕГМЕНТАЦІЯ ДАНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗУ

Г.М. Востров, М.В. Полякова, В.В. Любченко

ОНПУ, 65044, Україна, Одеса, пр. Шевченка, 1, (0482) 288-478, (0482) 685-152,
vvl@lmpo.ospu.odessa.ua

У представленій доповіді розглядається сегментація економічних часових рядів за допомогою вейвлет-аналізу. У якості меж сегментів використовуються моменти зміни властивостей випадкового процесу, що описує часовий ряд. Отримана сегментація використовується для підвищення ефективності виділення трендів економічних часових рядів.

1. ВСТУП

При вирішенні задач аналізу і обробки економічних часових рядів, зокрема при побудові ефективних алгоритмів стиснення або прогнозування, виникає проблема вивчення внутрішньої структури часових рядів. Під внутрішньою структурою будемо розуміти безліч схожих сегментів часового ряду із заданою на йому сукупністю n -арних відносин.

Ефективність структурного аналізу часових рядів залежить від точності оцінки коефіцієнтів тренда, тому вирішення задачі аналізу часових рядів передусім пов'язане з його виділенням. Автори досліджували часові ряди з властивостями, що стрибкоподібно змінюються. Момент зміни властивостей часового ряду відповідає точці розриву тренда. Тому використання безперервної функції для апроксимації тренда в цій ситуації некоректне. Необхідно використати кусочну апроксимацію у вигляді сплайнового тренду. Для цього передусім необхідно виконати виявлення змін властивостей випадкового процесу.

При аналізі сигналів, що характеризують випадкові процеси, можна використати вейвлет-перетворення, яке дає можливість отримати спектральну інформацію на вибраній частоті, враховуючи при цьому, що частота або амплітуда сигналу можуть змінюватися.

2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Часові ряди, що описують динаміку зміни цін на фондовому ринку, можна розглядати як одновимірні випадкові процеси з властивостями, що змінюються. На нашій думку ці сигнали можна описати з використанням наступної моделі. Передбачимо, що випадковий процес можна представити у вигляді сукупності сегментів даних з властивостями, що змінюються. На кожному з

сегментів часовий ряд являє собою нестационарний процес, що повільно міняється, зі стаціонарними або близькими до стаціонарних приростами, причому характеристики процесу на межах сегментів стрибкоподібно міняються. Будемо вважати, що на кожному з сегментів, де властивості ряду міняються повільно, часовий ряд описується моделлю [1]:

$$y(t) = c(t) + \sum_i a_i \sin(\omega_i t + \theta_i) + n(t) \quad (1)$$

где $c(t)$ — тренд,

a_i, ω_i, θ_i — амплітуда, частота, зсув по фазі i -ої циклічної компоненти,

$n(t)$ — іррегулярна компонента,

t — деякий параметр, наприклад, час або просторова координата, який може приймати дискретні значення $t=1, \dots, N$. Вважається, що подібне уявлення (1) справедливе в межах кожного з сегментів, де властивості ряду міняються повільно. Тоді точками зміни властивостей часового ряду будемо вважати точки, в яких спостерігаються стрибки трендової компоненти, а також параметрів циклічних компонент — амплітуди, частоти. Передбачимо, що в якості іррегулярної компоненти виступає білий шум, а також, що різкі зміни розділені у часі досить, щоб були можливі їх індивідуальні виявлення.

При вирішенні задачі виявлення зміни властивостей сигналів передусім перевіримо, чи адекватна модель (1) реальним даним. Модель (1) передбачає, що ряд містить тренд і циклічні компоненти. Для перевірки даних на наявність тренду звичайно перевіряють, чи містить спектральна щільність пік на нульовій частоті. Щоб перевірити, чи присутні в даних періодичні компоненти, можна, виділивши тренд, перевірити, чи містить значущі піки спектральна щільність.

Перевірка адекватності моделі (1) реальним даним проводилася для часових рядів, що описують динаміку зміни цін на фондовому ринку. Спектральна щільність сигналів до виділення тренда, як правило, має пік на нульовій частоті, говорячий про наявність тренду, а спектральна щільність сигналів після виділення тренда має піки, що свідчать про наявність циклічних компонент.

Перевірка фрагментів сигналу між стрибками показала, що вони мають стаціонарні прирости. Цей факт, а також приведені вище міркування дозволяють зробити висновок про адекватність часових рядів, що описують динаміку

зміни цін на фондовому ринку, моделі (1). У цій моделі повільна зміна властивостей сигналу виражена трендом, а як стрибкоподібні зміни будемо розглядати зміну частоти і амплітуди циклічних компонент.

3. ВИЯВЛЕННЯ ЗМІН ВЛАСТИВОСТЕЙ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

3.1. Виявлення стрибків середнього

Задача визначення моменту стрибкоподібної зміни трендової компоненти (стрибка середнього) розглядалася нами в [2]. Якщо для перетворення Фур'є ми маємо тільки необхідну умову глобальної регулярності, то, використовуючи вейвлет-перетворення, можна зробити висновок про локальну і глобальну регулярність сигналу. При реалізації вейвлет-методів виявлення зміни властивостей намагаються оцінити локальну асимптотичну поведінку вейвлет-перетворення $T(b, a)$ початкового сигналу для різних x при $a \rightarrow 0$, де a — рівень (масштаб) вейвлет-перетворення [3]. Для того, щоб уникнути цієї проблеми, пропонуємо замість оцінки асимптотики використати порогові значення для кожного рівня вейвлет-перетворення. Крім того, в [4] показано, що при визначенні локальної регулярності функції краще використати розкладання по надмірних вейвлет-базисах, в яких неінваріантність до зсуву відсутня (безперервний випадок) або спостерігається в меншій мірі (дискретний випадок), ніж при використанні звичайного дискретного вейвлет-перетворення (ДВП). Тому ми будемо використати стаціонарне вейвлет-перетворення (СВП). Це перетворення використовувалося для знаходження точок сингулярності в [2] і дало непогані результати.

Визначимо поріг для ідентифікації значущих максимумів СВП, і, отже, значущих стрибків сигналу. Розглянемо функцію що описує ідеальний стрибок:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Згідно [3], вейвлет-перетворення функції $f(x)$ має вигляд

$$T(b, a) = \int_{-b/a}^{\infty} \psi(t) dt, \quad (2)$$

де $\psi(t)$ — вейвлет-функція. У випадку

$$f(x) = \begin{cases} A_1, & x > x_0, \\ A_0, & x \leq x_0. \end{cases} \quad \text{внаслідок заміни змінних в (2)}$$

маємо $T(b, a) = A \int_{(x_0-b)/a}^{\infty} \psi(t) dt$, де $A = A_1 - A_0$ — величина

стрибка в точці x_0 . При вирішенні задачі виявлення зміни властивостей, коли величина стрибка невідома, одним з підходів є априорне завдання мінімальної

величини стрибка. Визначимо мінімальний розмір стрибка α_{thr} , наприклад, в процентах від $\max_{t=1, \dots, N} y(t) - \min_{t=1, \dots, N} y(t)$, где $y(t)$, $t=1, \dots, N$ — відліки часового ряду.

Тоді як порогову величину прийемо

$$T(a) = \alpha_{thr} \max_b \left| \int_{(x_0-b)/a}^{\infty} \psi(t) dt \right|, \quad (3)$$

(3) дозволяє обчислити поріг для визначення значущих максимумів, а оцінка моменту зміни прийме вигляд:

$$\hat{x}_0 = 2^j K + b,$$

$$\text{де } b = \arg \max_b \int_{(x_0-b)/a}^{\infty} \psi(t) dt.$$

3.2. Виявлення моментів змін параметрів циклічних компонент

Розглянемо задачу визначення моменту стрибкоподібної зміни параметрів циклічної компоненти, що має вигляд $h(x) = A \sin(\omega_0 x)$, где A — амплітуда, ω_0 — частота синусоїди, x — просторова координата або час. Якщо вважати, що вейвлет $\psi(x)$ антисиметричен, то вейвлет-перетворення синусоїди $h(x)$ [3]:

$$|Th(b, a)| = A |\cos \omega_0 b| |\hat{\psi}(a \omega_0)| \quad (4)$$

где $\hat{\psi}(\omega)$ — перетворення Фур'є вейвлет-функції $\psi(x)$, a — масштаб вейвлет-перетворення, b — параметр зсуву.

Знайдемо поріг для визначення моменту стрибкоподібної зміни амплітуди циклічної компоненти. Нехай амплітуда синусоїди стрибкоподібно змінюється з A_0 на A_1 та задана

відносна зміна амплітуди синусоїди: $\delta = \frac{A_0}{A_1}$. Без

обмеження спільності можна вважати, що $0 < \delta < 1$, тобто $A_0 < A_1$. Тоді відносну величину стрибка амплітуди можна оцінити в термінах стандартного відхилення вейвлет-коефіцієнтів. Нехай

$std_0(T)(a)$ — стандартне відхилення вейвлет-коефіцієнтів до стрибка, $std_1(T)(a)$ — стандартне відхилення вейвлет-коефіцієнтів після стрибка. Будемо вважати, що сталася зміна амплітуди циклічної компоненти з частотою, відповідною даному масштабу вейвлет-перетворення, якщо

$$\Delta std(T)(a) = \frac{std_0(T)(a)}{std_1(T)(a)} =$$

$$\frac{A_0 std(|\cos(\omega_0 b)|) |\hat{\psi}(a \omega_0)|}{A_1 std(|\cos(\omega_0 b)|) |\hat{\psi}(a \omega_0)|} = \frac{A_0}{A_1} \leq \delta$$

Знайдемо поріг для визначення моменту стрибкоподібної зміни частоти циклічної компоненти. Виберемо такий ортонормований вейвлет-базис, що функція $|\hat{\psi}(\omega)|$ має тільки один

глобальний максимум при $\omega > 0$, тоді вона монотонно спадає по обидві сторони цього максимуму. Цією властивістю володіють, наприклад, вейвлети Добеши з мінімальною фазою. З урахуванням цієї властивості, а також рівності (4) можна затверджувати, що стрибкоподібна зміна частоти синусоїди з ω_0 на ω_1 спричиняє за собою зміну стандартного відхилення вейвлет-перетворення на всіх масштабах, для яких $a \in \text{supp}|\hat{\psi}(a\omega_0)|$ або $a \in \text{supp}|\hat{\psi}(a\omega_1)|$, де supp — носій функції, причому максимальний стрибок стандартного відхилення буде спостерігатися для масштабів a близьких до ω_m/ω_0 і ω_m/ω_1 , де $\omega_m = \arg \max_{\omega} |\hat{\psi}(\omega)|$.

Нехай задана відносна зміна частоти синусоїди: $\gamma = \frac{\omega_0}{\omega_1}$. Без обмеження спільності можна

вважати, що $0 < \gamma < 1$, тобто $\omega_0 < \omega_1$. Оцінимо відносну величину зміни частоти синусоїди у термінах стандартного відхилення вейвлет-коефіцієнтів.

Нехай $\text{std}^0(T)(a)$ — стандартне відхилення вейвлет-коефіцієнтів до зміни, $\text{std}^1(T)(a)$ — стандартне відхилення вейвлет-коефіцієнтів після зміни. Тоді

$$\Delta \text{std}(T)(a) = \frac{\text{std}^0(T)(a)}{\text{std}^1(T)(a)} = \frac{A \text{std}(|\cos(\omega_0 b)|) |\hat{\psi}(a\omega_0)|}{A \text{std}(|\cos(\omega_1 b)|) |\hat{\psi}(a\omega_1)|}$$

Враховуємо, що $\text{std}(|\cos(\omega_0 b)|) = \text{std}(|\cos(\omega_1 b)|)$. Тоді

$$\Delta \text{std}(T)(a) = \frac{|\hat{\psi}(a\omega_0)|}{|\hat{\psi}(a\omega_1)|}. \quad (6)$$

Для подальшого аналізу формули (6) виразимо значення $|\hat{\psi}(a\omega)|$ через a і ω . Зазначимо, що вибраний нами для аналізу вейвлет Добеши [4] другого порядку з мінімальною фазою не має аналітичного уявлення, значення цієї функції можна обчислити за допомогою рекурентної формули з будь-якою мірою точності. Аналогічні проблеми виникають і при обчисленні її модуля перетворення Фур'є $|\hat{\psi}(\omega)|$. Тому як аналітичний вираз для $|\hat{\psi}(\omega)|$ будемо використати апроксимацію цієї функції, враховуючи при цьому графічне уявлення $|\hat{\psi}(\omega)|$. На відріжку

$[0, 0.5]$ $|\hat{\psi}(\omega)|$ будемо апроксимувати квадратичною функцією $|\hat{\psi}(\omega)|_{[0, 0.5]} \sim \omega^2$, на відріжку $(0.5, 4.5]$ — лінійною функцією: $|\hat{\psi}(\omega)|_{(0.5, 4.5]} \sim \omega$. У випадку $\omega > 4.5$ функцію $|\hat{\psi}(\omega)|$ будемо апроксимувати гіперболою: $|\hat{\psi}(\omega)|_{\omega > 4.5} \sim 1/\omega$. Числа 0.5 і 4.5 виражають частоту в радіанах і отримані евристично, виходячи з графічного уявлення $|\hat{\psi}(\omega)|$.

Виходячи з приведених вище міркувань, будемо вважати, що зміна частоти циклічної компоненти сталася, якщо

$$\Delta \text{std}(T)(a) \leq \gamma^n,$$

де γ визначається як ω_0 / ω_1 , n залежить від рівня

$$\text{вейвлет-перетворення } i \text{ таким чином: } n = \begin{cases} 2, & i = 1, \\ 1, & i = 2, \\ -1, & i > 2. \end{cases}$$

У разі виявлення зміни обох параметрів циклічної компоненти — амплітуди і частоти, як порогову величину можна використати

$$\delta\gamma^n. \quad (7)$$

3.3. Особливості алгоритму сегментації даних

Розроблений алгоритм сегментації даних буде мати наступні дві особливості. Перша особливість буде полягати в тому, що цей алгоритм буде багато масштабним. Це пов'язано передусім з тим, що необхідно визначити моменти зміни параметрів циклічних компонент, які характеризуються різними частотами і, отже, вимагають розгляду поведінки сигналу на різних частотних смугах. До того ж, для більшості задач виявлення змін, що використовують єдиний масштаб, типова суперечність, виникаюча при виборі вікна. Велике вікно дає можливість дістати більш точні статистичні оцінки. Мале вікно дозволяє збільшити швидкодію, більш точно оцінити момент зміни, а також визначити близько розташовані моменти змін. Щоб обійти цю проблему, виконується сегментація на різних масштабах, а потім результати сегментацій об'єднують по деякому критерію з використанням оптимізаційних алгоритмів. При цьому використовують ДВП або який-небудь інший пірамідальний алгоритм і об'єднання результатів сегментацій проводять, починаючи з найнижчого рівня, використовуючи співвідношення між батьківськими і дочірніми блоками коефіцієнтів піраміди або вейвлет-розкладання. Відомо, що сегментації на низьких рівнях мають мале число помилкових меж сегментів і добре характеризують великі однорідні регіони, в той час як сегментації на високих рівнях дозволяють більш точно локалізувати межі сегментів навіть у випадку близько розташованих меж. Тому при об'єднанні результатів сегментацій на різних масштабах, за основу приймають результат сегментації на самому великому масштабі, поступово уточнюючи межі сегментів за допомогою результатів сегментацій на малих масштабах.

У розробленому алгоритмі виявлення змін, ми використали СВП, яке дозволяє більш точно локалізувати межі сегментів вже на низьких масштабах в порівнянні з ДВП. До того ж нам потрібно виявити зміни властивостей сигналу на різних частотних смугах, тому буде не зовсім коректно приймати за основу результат сегментації

на самому низькому рівні, уточнюючи межі сегментів за допомогою сегментацій на малих масштабах. У зв'язку з цим при об'єднанні результатів сегментацій на різних масштабах використовувався наступний евристичний підхід.

1. Виконувалася сегментація на самому високому рівні СВП.

2. При виявленні змін властивостей на наступному рівні СВП перевірялося, чи не попадає

момент зміни в місцевість $\delta = \sum_{j=1}^{j_0} k_j$,

де j_0 — поточний рівень СВП, k_j — довжина фільтра на рівні j , якої-небудь точки зміни середнього, записаної на попередньому рівні, або в околицю, рівної розміру вікна L , якої-небудь точки зміни стандартного відхилення, записаної на попередньому рівні.

3. Якщо умова виконується, то відповідний момент зміни властивостей записується у вектор сегментації.

Таким чином, в нашому випадку ми використали об'єднання результатів сегментації на різних масштабах в зворотному порядку: від більш високих рівнів СВП до більш низьких. Щоб уникнути виникнення помилкових тривог (пересегментації), ми будемо використовувати два вигляду порогів, абсолютний і відносний, та робастну оцінку стандартного відхилення. Це ж дозволило уникнути використання оптимізаційної процедури, що підвищує обчислювальну ефективність алгоритму.

Другою особливістю алгоритму виявлення змін властивостей випадкового процесу буде його універсальність в тому значенні, що він буде виконувати виявлення як по диференційних, так і по інтегральних ознаках. Це дозволить врахувати представлення єдиної реалізації випадкового процесу у вигляді детермінованої функції часу і виявляти її сингулярності (диференційний підхід), а також використати ймовірно-статистичні характеристики випадкового процесу (інтегральний підхід).

Тоді алгоритм сегментації буде складатися з трьох основних частин:

1. Виявлення змін з використанням диференційної ознаки (моментів змін середнього з порогом (3)).

2. Виявлення змін з використанням інтегральної ознаки (моментів змін стандартного відхилення з порогом (7)).

3. Основний алгоритм, який об'єднує сегментації по обох ознаках, а також виконує об'єднання результатів сегментацій на різних масштабах.

4. РЕЗУЛЬТАТИ

Визначення моментів змін властивостей дозволяє отримати розбиття часового ряду на

сегменти, в межах кожного з яких властивості ряду мало міняються. Для кожного сегмента як оцінки коефіцієнтів тренду використовуються оцінки у вигляді сплайнів першого порядку та циклічних компонент [2]. У цьому випадку вдається дозволити суперечність між великою довжиною інтервалу часу, на якій виділяється тренд, і необхідністю використати для опису тренда поліному низького порядку. Часовий інтервал спостережень виявляється розбитим на відрізки невеликої довжини, на кожному з яких тренд описується поліномом та циклічними компонентами, причому поліноми зшиваються на межах відрізків. Коефіцієнти сплайну будуються рекурентно за допомогою методу найменших квадратів, коефіцієнти циклічних компонент знаходимо за допомогою циклічного аналізу [2].

Порівняємо ефективність виділення кусочного циклічного тренду з виділенням безперервного тренда сплайном першого порядку та циклічними компонентами на часових рядах, що описують динаміку зміни цін на фондовому ринку. Результати дослідження якості виділення тренда показують, що для часових рядів зі складною структурою і стрибкоподібними змінами властивостей кусочний тренд є більш точною оцінкою, тому імовірність того, що в залишку містяться частини тренда, низька.

5. ВИСНОВКИ

Застосування запропонованого підходу до виділення тренда економічних часових рядів підтвердило його ефективність. Результати роботи методу порівнювалися нами з іншими методами виявлення змін, зокрема методом Брандта [5]. Сегментація, отримана за допомогою запропонованого алгоритму дозволяє більш ефективно виділити тренд.

ЛІТЕРАТУРА

1. Harvey A.C. *Time series models*. — Cambridge: University Press, 1993.
2. Востров Г.Н., Полякова М.В., Любченко В.В. *Использование статистических и вейвлет-технологий в анализе временных рядов* // Автоматика-2000, Міжнародна конференція з автоматичного управління. — Львів, 11 — 15 вересня 2000р.: Праці в 7-ми томах. — Т.6. — С.116 — 122.
3. Tchamitchian P. *Wavelets: functions and operators* // *Wavelets: Theory and applications* / Erlebacher. G. (ed.)— Oxford: University Press, 1996.
4. Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*. — New York: Academic Press, 1992.
5. *Обнаружение свойств сигналов и динамических систем*. /Под ред. М.Бассевиль, А.Банвениста.: — М.: Наука, 1983.

Сегментація текстурних зображень на основі методу векторної підтримки

Довженко Оксана Володимирівна

Дніпропетровський національний університет, Радіофізичний факультет, вул. Наукова 13,
корпус 12, м. Дніпропетровськ 49050. тел. 056-7769092. e-mail: dovzhenko@mail.dsu.dp.ua

Мета даної роботи – дослідження інформаційних характеристик методу векторної підтримки стосовно до задачі сегментації текстур. Метод сегментації включає два етапи: на першому реалізується розпізнавання і локалізація текстурних об'єктів зображення на основі модуля векторної підтримки з учителем, на другому - додаткова обробка результатів з використанням медіанної фільтрації і морфологічної обробки для виявлення невірно класифікованих блоків і більш зручного візуального аналізу результатів. Експериментальні дослідження проводилися для різних типів текстурних зображень.

1. Вступ

Сегментація текстурних зображень відноситься до високоактуальних задач в області комп'ютерного бачення, що приваблює увагу багатьох дослідників довгий час, оскільки і на даний момент є проблемою, далекою від кінцевого розв'язку. Вирішення задачі сегментації текстур провадиться за двома основними напрямками, до першого з котрих відноситься відшукування текстурної моделі, в рамках якої кожен піксел вихідного зображення представляється вектором характеристик (точка багатомірного простору ознак), причому віднайдена модель повинна задовольняти вимогам чутливого аналізу і локалізації подібних регіонів зображення, другий напрямок включає безпосередньо розробку методів сегментації. На даний момент для вирішення першого типу задач найбільш активно використовуються підходи, основані на моделюванні випадкових полів (Марківські, Гаусівські випадкові поля) [1], а також багаторівневої декомпозиції зображення за допомогою банків фільтрів Лапласа, Габора [2], вейвлет-перетворення і популярного останнім часом апарату орієнтованих пірамід [3]. Сегментація текстур, в залежності від наявності апріорної інформації про характер і тип вихідного зображення, може бути реалізована на основі методів навчання з учителем, куди можна віднести нейромережеві підходи [4], метод векторної підтримки або на основі адаптивних методів без учителя [5], однак, єдиного підходу, котрий би задовольняв вимогам високої чутливості аналізу, точності і низьких витрат ресурсів і машинного часу на даний момент не існує.

В даній роботі демонструється можливість застосування нового методу розпізнавання образів, названого як метод векторної підтримки (МВП) для вирі-

шення задачі сегментації текстур, причому обґрунтуванням до використання саме цього методу є задовільні в розумінні точності і витрат машинного часу результати застосування МВП для вирішення задач класифікації [6].

Головна ідея методу – це побудова на основі модуля векторної підтримки оператора, що на основі апріорної інформації про характер ділянок, які треба локалізувати, здійснює аналіз зображення. Питання вибору розміру оператора досліджується в експериментальній частині.

2. Метод векторної підтримки

Алгоритм векторної підтримки являє собою нелінійний варіант узагальненого портретного алгоритму, що був запропонований Вапніком на початку 60-х років. У зв'язку зі складною програмною реалізацією практично метод векторної підтримки не використовувався, і тільки в 1998 році Платтом [7] був розроблений алгоритм послідовної мінімальної оптимізації, що дозволив усунути обмеження прямого варіанта МВП, пов'язані з високими витратами машинного часу при вирішенні задачі квадратичного програмування.

В рамках спрощеного опису, МВП являє собою задачу побудови гіперплощини, що розділяє вхідні дані $\{x_i, y_i\}$, $i=1, \dots, m$; $y_i \in \{-1, +1\}$, $x_i \in R_n$ таким чином, що забезпечується максимальна відстань між найближчими точками "позитивного" і "негативного" піднаборів.

Нехай існує набір вхідних даних x_1, x_2, \dots, x_m де $x_i \in R_n$. Кожному вхідному значенню відповідає мітка з набору y_1, y_2, \dots, y_m , де $y_i \in \{-1, +1\}$, що показує, до якого з двох класів належить те чи інше вхідне значення. Будемо говорити, що гіперплощина $(w \cdot x) + b$, що розділяє дані, існує тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$$(w \cdot x_i) + b \geq 0, \text{ для } y_i = 1, \quad (1)$$

$$(w \cdot x_i) + b \leq 0, \text{ для } y_i = -1, \quad (2)$$

або

$$y_i((w \cdot x_i) + b) \geq 1, \text{ для } \forall i. \quad (3)$$

Оптимальною гіперплощиною буде така, для котрої відстань між найближчими точками з піднаборів, що помічені позитивними і негативними мітками та самою гіперплощиною була б максимальною.

Відстань між двома найближчими точками з різних піднаборів може бути визначена як:

$$d(w,b) = \min_{\{x_i|y_i=1\}} \frac{w \cdot x_i + b}{|w|} - \max_{\{x_i|y_i=-1\}} \frac{w \cdot x_i + b}{|w|},$$

З виразів (1) та (2) можна бачити, що значення максимуму та мінімуму відповідно дорівнюють 1 та -1. Тоді необхідно максимізувати відстань:

$$d(w,b) = \frac{1}{|w|} - \frac{-1}{|w|} = \frac{2}{|w|},$$

Задача відшукування максимальної відстані еквівалентна задачі мінімізації $|w|^2/2$ за умови, що виконуються обмеження (3).

Для вирішення цієї задачі використаємо перехід до форми Лагранжа, в результаті чого задача в двоїтій формі може бути записана як:

$$\min(\sum_i \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i \cdot x_j)$$

За обмежень

$$\begin{aligned} \alpha_i &\geq 0 \\ \sum_i \alpha_i y_i &= 0 \end{aligned}$$

Де α_i – множники Лагранжа. Кожному вхідному значенню може відповідати лише один такий множник. Ті значення вхідного набору, для котрих множники Лагранжа приймають ненульові значення, називаються векторами підтримки і використовуються для відшукування розділюючої гіперповерхні.

Розглянута вище задача оптимізації не має розв'язків, якщо вхідні дані не є такими, що можуть бути розділені лінійно. В даному випадку обмеження (1) та (2) модифікуються наступним чином:

$$\begin{aligned} (w \cdot x_i) + b &\geq 1 - \xi_i, \text{ для } y_i = 1, \\ (w \cdot x_i) + b &\geq \xi_i - 1 \text{ для } y_i = -1, \\ \xi_i &\geq 0, \text{ для } y_i = 1, \end{aligned}$$

де ξ_i – це “послаблююча” змінна, що задає верхню межу похибки навчання. Схематичне зображення цього випадку задачі класифікації представлено на Рис. 1. Тоді задача мінімізації $|w|^2/2$ може бути сформульована як

$$\min(\frac{|w|^2}{2} + C(\sum_i \xi_i)),$$

Параметр C – параметр, що задається, і він визначає припустиму похибку класифікації. Якщо перейти до запису задачі в формі Лагранжа, то в двоїтій

тому формулюванні вона буде виглядати наступним чином:

$$\min(\sum_i \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i \cdot x_j),$$

за обмежень

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_i \leq C, \\ \sum_i \alpha_i y_i &= 0. \end{aligned}$$

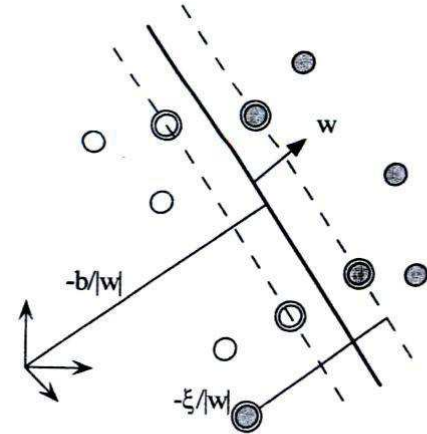


Рис. 1 Схематичне зображення розділюючої гіперплощини для лінійно-нероздільного випадку.

Наступний крок полягає в приведенні розглянутого алгоритма до більш узагальненого, тобто нелінійного варіанту, що досягається відображенням вхідних ознак x_i в деякий багатовимірний простір, причому його розмірність вище, ніж розмірність простору вхідних значень R^d . Це відображення може бути представленим як $\Phi: X \rightarrow F$; після здійснення попередньої обробки вхідних даних використовується стандартний алгоритм МВП. Як було розглянуто раніше, для лінійного варіанту методу вхідні дані представляються в формі точкового добутку між вхідними ознаками x_i, x_j , причому $i \neq j$, що для нелінійного випадку: $k(x, x') = \langle \Phi(x), \Phi(x') \rangle$, причому k називають функцією ядра.

Тепер виникає наступне питання: яким умовам мають задовільняти функції, що можуть бути вибрані в якості функцій ядер? Розглянемо теорему, що характеризує такі функції.

Теорема: нехай існує $k \in L_\infty(X^2)$, таке, що інтегральний оператор $T_k: L_2(X) \rightarrow L_2(X)$,

$$T_k f(\cdot) = \int_X k(\cdot, x) f(x) d\mu(x)$$

є додатнім.

Тоді, якщо

$$\int_{X \times X} k(x, x') f(x) f(x') dx dx' \geq 0$$

для всіх $f \in L_2(X)$, то ми можемо представити $k(x, x')$ як векторний добуток в деякому просторі відображення. Такі функції k будемо називати припустимими ядрами векторної підтримки.

Аналіз публікацій показує, що наступні функції, котрі задовільняють умовам припустимості ядер векторної підтримки, найчастіше використовуються для вирішення практичних задач.

1) Поліноміальні ядра k з $p \in \mathbb{N}$:

$$k(x, x') = \langle x, x' \rangle^p.$$

2) Поліноміальні ядра k з $p \in \mathbb{N}$ і $c > 0$:

$$k(x, x') = (\langle x, x' \rangle + c)^p.$$

3) Ядра на основі радіальних базисних функцій

$$k(x, x') = e^{-\frac{\|x - x'\|^2}{2\sigma^2}}.$$

В описі теоретичних основ методу векторної підтримки був розглянутий випадок розділення даних на два класи, однак, в реальних задачах зазвичай постає питання класифікації вхідних ознак на значно більшу кількість класів, у зв'язку з чим виникає необхідність розширення апарату класифікації до т. з. мультикласифікатора або N -класифікатора, що дозволяє вирішувати задачу для випадку $N > 2$, де N – кількість класів. Стандартний метод для конструювання N -класифікатора полягає в послідовному створенні N класифікаторів, кожен з котрих визначає розділяючу гіперповерхню для i -го класу, позначеного міткою “1” та всіх тестових входів, позначених “-1”. Цей підхід скорочено називається “1-vs-r” (1-versus-rest) або “один проти багатьох”.

Інший підхід, котрий вигідно відрізняється від попереднього більшою точністю класифікації, вимагає побудови $K = N(N-1)/2$ класифікаторів і скорочено позначається “1-vs-1” або “один проти одного”. Метод 1-vs-1 базується на комбінації бінарних класифікаторів на основі архітектури орієнтованого ациклічного графу.

Кінцевий N -класифікатор представляє собою деревоподібну структуру з $N(N-1)/2$ вузлами, кожен з котрих – елемент множини булевих функцій $F = \{f: X \rightarrow \{0, 1\}\}$, де X – простір вхідних даних, при чому будь-який i -й вузол у шарі $j < N$ зв'язаний з i -тим $(i+1)$ -м вузлом $(j+1)$ -го шару. Таким чином, вузли дерева повністю описують всі можливі двокласові комбінації на множині з N класів і кожна вхідна точка для віднесення її до якогось з класів повинна пройти шлях від кореневого вузла до найнижчого шару дерева з N виходами, котрий визначається як шлях оцінки. Недолік описаного підходу – це надлінійне зростання кількості операторів із зростанням значення N . З іншого боку, кожен операційний вузол

преставляє собою окремих класифікатор, що дозволяє регулювання параметрів і похибки класифікації, завдяки чому забезпечується вища точність класифікації.

3. Вибір функції ядра

Важливим питанням при реалізації методу для вирішення практичних задач є правильний вибір функції ядра, від котрого, в більшості випадків, залежить точність отримуваних результатів. Однак, єдиного підходу для визначення необхідної функції ядра, а також її параметрів, на даний момент немає, тому ця задача вирішується емпірично в кожному окремому випадку.

Для вирішення задачі сегментації текстур з учителем найліпші результати були отримані з використанням радіальних базисних функцій з вар'юванням коефіцієнту σ від 0.001 до 2.5 в залежності від розміру вікна оператора сегментації.

4. Експериментальна частина

Експериментальні дослідження було проведено з використанням різних типів текстурних зображень з відомої бази текстур Brodatz Collection [8]. Реалізація методу сегментації здійснювалася на основі алгоритму послідовної мінімальної оптимізації з використанням методу ациклічних графів для побудови мультикласифікатора.

Для кожного аналізованого зображення було досліджено можливість використання вікон операторів (window) різних розмірів: 4×4 , 8×8 , 16×16 , 32×32 . Необхідно зазначити, що розмір блока навчання визначає кількість операцій i , відповідно, обсяг витрат машинного часу. Ця обставина пов'язана з тим, що обчислення векторів підтримки відбувається для кожного кроку вікна оператора. Розмір вікна вибирався в залежності від характеру вихідного зображення, що сегментується.

5. Висновки

Як показують отримані результати (Рис. 2), метод векторної підтримки представляє собою чутливий апарат для вирішення задачі сегментації текстурних зображень, котрий вигідно відрізняється від стандартних підходів високою точністю і низькими витратами машинного часу при реалізації його на основі алгоритму послідовної мінімальної оптимізації.

Однак, виникає цілий ряд додаткових питань, пов'язаних з розвитком методу сегментації, котрі в цілому визначають успішність результатів – а саме розробка автоматичного (адаптивного) методу вибору параметрів ядер, оскільки, як видно з Рис. 2е-л, точність сегментації (котра визначається кількістю невірних класифікованих блоків) суттєво змінюється при невеликому вар'юванні параметру σ ядра радіальної базисної функції.

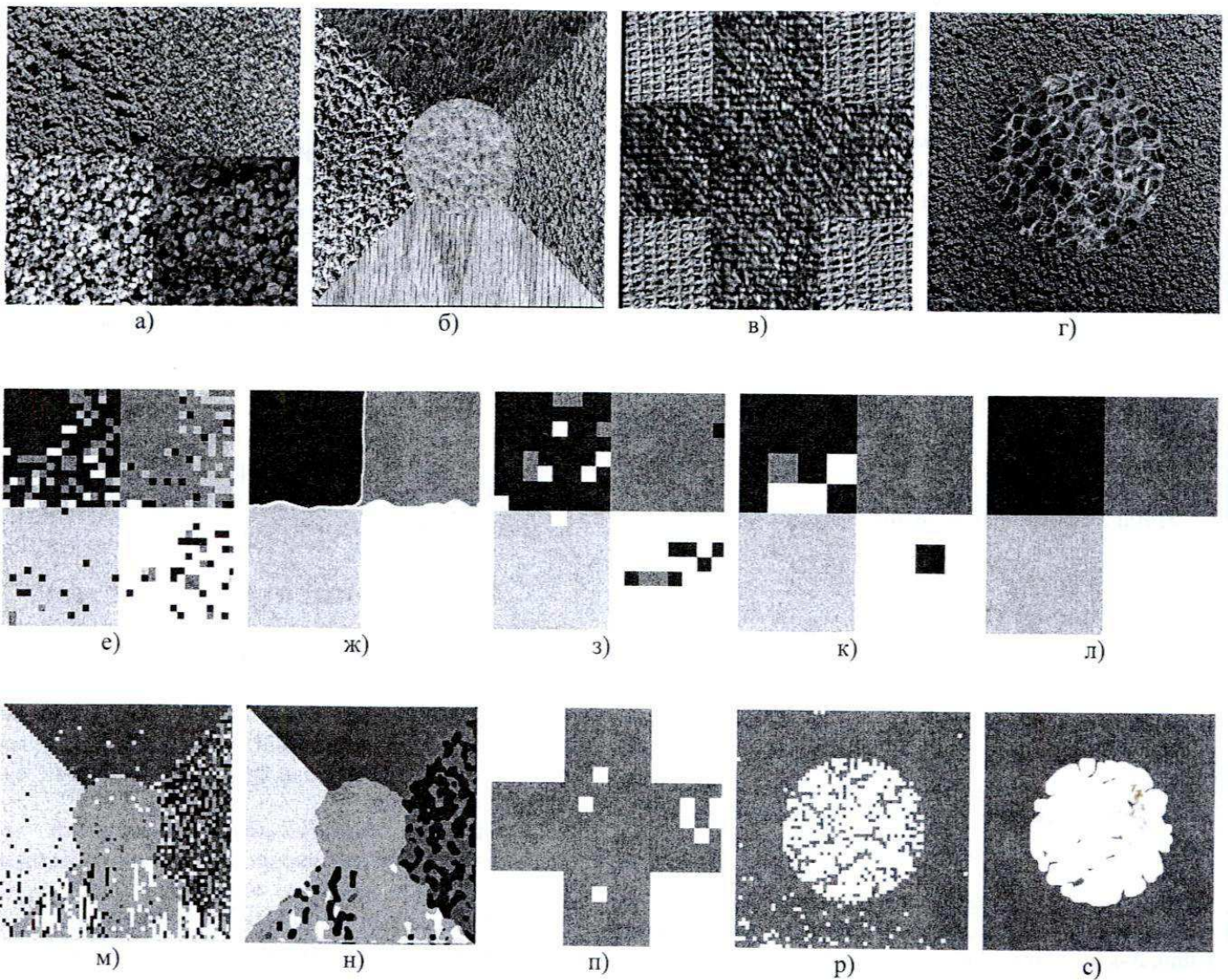


Рис. 2 Результати сегментації текстурних зображень на основі МВП:

а-г – вихідні зображення; е – результат сегментації зображення а: $window = 8, \sigma = 1.5$; ж – результат додаткової фільтрації і морфологічної обробки сегментованого зображення; з – $window = 16, \sigma = 0.1$; к – $window = 32, \sigma = 0.05$; л – $window = 32, \sigma = 0.07$; м - результат сегментації зображення б: $window = 8, \sigma = 1.5$; н – додаткова обробка результатів; п - результат сегментації зображення в: $window = 16, \sigma = 0.05$; р - результат сегментації зображення г: $window = 8, \sigma = 1.0$; с – додаткова обробка результатів.

Література

1. Geman S, Graffigne C., *Markov random fields and their application to computer vision*. In Gleason, A. (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pp. 1496-1517 Berkeley, California, 1989.
2. Jan Puzicha and Joachim M. Buhmann, *Multiscale Annealing for Real-Time Unsupervised Texture Segmentation*. Technical Report IAI-TR-97-4, Institut für Informatik III, University of Bonn. April 1997.
3. Simoncelli E. P. and Portilla J. *Texture Characterization via Joint Statistics of Wavelet Coefficient Magnitudes*. // 5th IEEE Int'l Conf on Image Processing. - Chicago, IL. Oct 4-7, 1998.
4. Mario Koppen, Javier Ruiz-del-Solar, Pierre Soille, *Texture Segmentation by biologically-inspired use of*

Neural Networks and Mathematical Morphology, Pattern recognition, v. 30, pp. 183-196, 1997.

5. Tanachit Tangsukson, Joseph P. Havlicek, *AM-FM image segmentation*, Image Processing, 2000. Proceedings. 2000 International Conference on, Vol. 2, pp. 104 – 107, Jan. 2001.

6. Ахметшин О. М. , Довженко О. В., *Підвищення ефективності класифікації в багатовимірному просторі ознак великої розмірності на основі методу векторної підтримки*, Збірка праць МКІМ-2002, т. 4, сс. 36-41, 2002.

7. J. Platt, *Fast training of support vector machines using sequential minimal optimization*. In *advances in kernel methods—support vector learning*, pp.185-208, Cambridge, 1999.

8. <http://www.ux.his.no/~tranden/brodatz.html>.

ДЕКОМПОЗИЦІЯ СКЛАДНИХ СХЕМ НА ОСНОВІ ІЄРАРХІЧНОЇ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ

Р.П.Базилевич, І.В.Подольський, П.Р.Базилевич

НУ "Львівська політехніка", вул. С.Бандери 12, Львів, 79013,

тел. (0322) 398578, ел. пошта: rbaz@polynet.lviv.ua

Анотація. Пропонується ряд алгоритмів декомпозиції складних схем, придатних для задач високих та надвисоких розмірностей. Методологічною основою є метод оптимального згортання схеми, який виявляє ієрархічно вкладені згустки схеми – її кластери. Деталізовано декілька алгоритмів початкового розбиття схеми на частини та його оптимізації. Замість оперування базовими елементами схеми, число яких може бути надзвичайно великим, використовуються кластери довільної розмірності. Це покращує якість розв'язку та зменшує обчислювальні затрати, підвищуючи швидкодію алгоритмів. Приводяться результати тестувань, які підтверджують ефективність запропонованої методики.

1. ВСТУП

Однією з важливих задач при розробці алгоритмів розпізнавання образів є розбиття складної схеми на частини з заданими обмеженнями. З математичної точки зору – це важковирішувана комбінаторна задача неполіноміальної складності (NP важка). У випадку її великих та надвеликих розмірностей (сотні тисяч та мільони складових елементів) для її ефективного розв'язання можливим є використання тільки наближених методів. Доцільним для цієї мети виявився метод оптимального згортання схеми [1,2], що дозволяє виявити ієрархічно вкладені кластери схеми. Кожна реальна електрична схема є неоднорідною, має певні згустки (кластери), в яких складові елементи зв'язані більш щільно, ніж у решті її частинах. При розв'язуванні різноманітних задач їх можна розглядати як макроелементи та описувати макромоделями. Це суттєво зменшує обчислювальну складність та сприяє покращенню якості розв'язку.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Під розбиттям схеми, утвореної множиною $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ складових елементів, на частини вважаємо систему $\tilde{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$, для якої

$$(\forall P_i \in \tilde{P}) [(P_i \subset P) \& (P_i \neq \emptyset)];$$

$$(\forall (P_i, P_j) \in \tilde{P}) [P_i \cap P_j = \emptyset]; \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^{n_i} p_{ij} = P.$$

Тут $P_i = \{p_{i1}, \dots, p_{in_i}\}$ – множина всіх елементів частини P_i . Задача полягає у знаходженні найкращого з можливих розбиттів, що задовольняє

бажані обмеження. Вона може бути сформульована як знаходження такого розбиття \tilde{P}^* , при якому досягається екстремум значення критерію Q у допустимій області D можливих розв'язків:

$$Q(\tilde{P}^*) = \text{extr } Q(\tilde{P}_i); \tilde{P}_i \in D.$$

Як критерії та обмеження при розбитті можуть виступати: функційна завершеність утворених підсхем; еквівалентність виділених частин підсхемам з набору типових рішень, заданих бібліотекою (задача покриття); взаємна еквівалентність виділених підсхем з мінімізацією числа їх типів (задача типізації); число утворених підсхем; зовнішня зв'язність підсхем – сумарне число зв'язків між утвореними частинами; внутрішня зв'язність підсхем – сумарне число зв'язків всередині підсхем та їх середнє значення на одну підсхему; окремі характеристики кожної підсхеми: число її складових елементів, число зовнішніх зв'язків та деякі інші величини (сумарна площа всіх елементів, сумарний об'єм, сумарне тепло, що виділяється; множини елементів, які повинні бути призначені в різні підсхеми, або навпаки – в одну підсхему; прив'язка за характеристиками зв'язності до певних зовнішніх об'єктів, наприклад роз'ємів).

Основна ідея розвинутого підходу полягає в тому, що спочатку будується дерево оптимального згортання T^R за висхідною стратегією, яке виділяє кластери схеми, після чого за низхідною та комбінованою стратегіями на основі попередньо отриманої інформації здійснюється розбиття схеми на частини. Замість аналізу схеми на рівні початкових елементів здійснюється комбінаторний аналіз ієрархічно вкладених кластерів. Базуючись на розвинутому підході, задача розв'язується за три етапи: побудова дерева оптимального згортання; початкове розбиття; оптимізація розбиття.

3. АЛГОРИТМИ

ПОЧАТКОВОГО РОЗБИТТЯ

Використовуючи дерево оптимального згортання можна реалізувати декілька алгоритмів отримання початкового розв'язку для задачі розбиття схеми на частини: послідовного та паралельно-послідовного виділення частин; дихотомічного низхідного ділення; ділення схеми по її мінімальних розрізах та комбіновані.

Алгоритми послідовного виділення частин розбиття є найпростішими для реалізації, проте вони мають суттєвий недолік – в процесі вилучення

елементів та формування частин розбиття утворюються "хвости" – частини схеми, які слабо пов'язані між собою, та з яких формуються останні частини розв'язку. Перші виділені частини будуть доброї якості, а останні – погані.

В алгоритмах паралельно-последовного виділення частин розбиття дерево згортання формується повністю. Виділяються всі підсхеми, число елементів яких дорівнює бажаному значенню або перевищило це значення вперше в процесі нарощення дерева згортання. З них процедурою вилучення зайвих елементів формуємо частини розбиття. Для решти елементів будемо нове дерево та виділення частин рекурсивно продовжуємо. У порівнянні з попереднім типом вказаний підхід є більш швидкодіючим, проте він може давати гірші результати, оскільки "хвости" формуються паралельно без врахування решти частини схеми. Для одного дерева згортання утворюється одночасно декілька "хвостів". У попередньому випадку після формування кожної окремої частини дерево згортання будувалось наново.

Ефективним підходом для усунення "хвостів" може бути "вимушене" призначення елементів у частини, яке одночасно враховує потреби рівномірного розподілу елементів серед усіх частин розбиття з врахуванням характеристик їх зв'язності. Такий підхід реалізується в алгоритмах дихотомічного низхідного ділення. Виділяються дві найвищі вершини дерева згортання та визначається число частин розбиття, що може бути утворене з

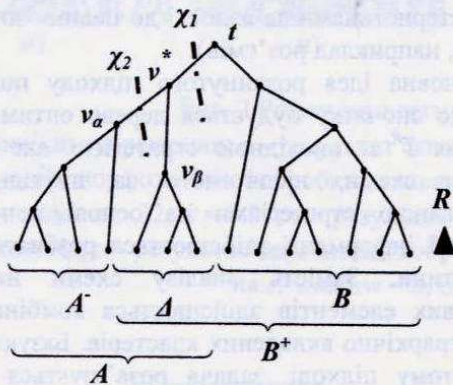


Рис. 1. Початкове виділення частин

кожної з них. Якщо числа їх елементів є кратними до бажаного значення елементів однієї частини (або близькими з врахуванням заданих обмежень на їх значення), то задача розбивається на дві ідентичні задачі менших розмірів, які продовжуємо дробити аналогічним чином. У більшості випадків ця умова не виконується. Тоді визначаємо, яке число елементів необхідно перенести з однієї частини в іншу, щоб задовольнити це значення. Виділяємо ту частину, з якої необхідно вилучити менше число елементів. Нехай це буде частина A , що відповідає вершині v^* (Рис. 1). Розглянемо процедуру

перенесення елементів з однієї частини в іншу. Тут можливими є два варіанти – спрощеного або розширеного аналізу. При спрощеному аналізі порівнюємо за числом елементів обидві складові підсхеми вершини v^* : v_α та v_β , виділяємо меншу з них (нехай це буде v_β) та визначаємо серед її елементів бажані для перенесення. Можливими є три випадки. У першому з них число її елементів відповідає бажаному для перенесення значенню. Тоді приєднуємо цю підсхему до частини B , утворюючи дві нові частини: $A'(A - \Delta)$ та $B'(B + \Delta)$ з бажаним для наступного ділення числом елементів. У другому випадку це число може виявитися меншим за бажане значення. Тоді можливими є два варіанти. Для першого з них, який забезпечує більшу точність, приєднуємо елементи Δ до частини B , моделюємо частину $(B + \Delta)$ однією вершиною, а з елементів частини $(A - \Delta)$ будемо нове дерево та продовжуємо пошук необхідних для перенесення елементів аналогічним чином. Для другого, більш простого, йдемо вниз по дереву, розглядаючи наступні дві складові більшої підсхеми v_α і т.д. аж поки не отримаємо бажане для перенесення значення число елементів або перше більше за це значення. У третьому випадку це число є більше бажаного значення. Тоді задача зводиться до розподілу елементів множини Δ між частинами A' та B' таким чином, щоб задовольнити бажані умови на число елементів, що призначаються в обидві частини.

При розширеному аналізі пошук елементів для перенесення здійснюємо серед всіх елементів частини A . Тут можуть бути використані два

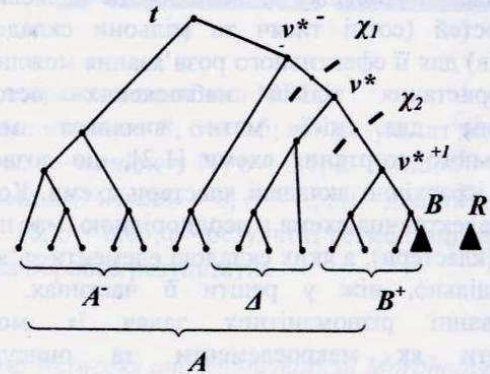


Рис. 2. Перерозподіл елементів частини A

підходи: на основі дерева згортання та на основі визначення ефективності перенесення окремих елементів та кластерів. Розглянемо спочатку перший підхід. Суть його полягає в побудові дерева згортання на основі всіх елементів частини A з розглядом частини B як єдиного цілого (Рис. 2). Решта частини схеми R також розглядається як єдине ціле, проте в процесі побудови дерева згортання до неї не дозволяється приєднувати елементи. Аналізуємо шлях від вершини B до вершини дерева t . Визначаємо на цьому шляху першу таку вершину v^* , що включення всіх елементів (включно з нею) на шляху від неї до B утворює вперше множину з

числом елементів, рівним або більшим від бажаного для перенесення. Нехай перетин χ_1 (між вершинами v^{*1} та v^*) виділяє таку вершину. Якщо це число відповідає бажаному для перенесення значенню, то розрізаємо схему за цим перерізом, утворюючи нові частини. Якщо воно є більшим від бажаного, то утворюємо нові частини A^- та B^+ , а елементи множини Δ розсіпаємо. До частини A^- приєднуємо всі елементи, що знаходяться на рисунку лівіше перерізу χ_1 , а до частини B^+ - всі елементи від перерізу χ_2 до вершини B включно з останньою.

Може трапитися частковий випадок, коли на виділеному вище шляху від вершини B до t немає належного числа елементів, або такі елементи взагалі є відсутніми. У першому разі до частини B приєднуємо всі ці елементи та задачу зводимо до нової аналогічної задачі зі збільшеним числом елементів частини B та зменшеним числом елементів частини A і продовжуємо задачу ітеративно розв'язувати аналогічним чином. Виродженням може трапитися випадок, коли на цьому шляху взагалі вершин немає. Рациональним тут слід вважати застосування підходу на основі визначення ефективності перенесення окремих елементів та кластерів.

Перейдемо до розгляду процедури розподілу елементів множини Δ між частинами A^- та B^+ (або B^+). Частини A^- та B^+ та решта частина схеми R розглядаються як окремі елементи, а елементи множини Δ розсіпаються. Будується дерево

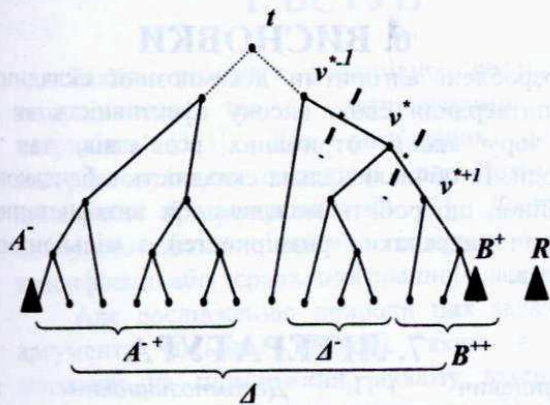


Рис. 3. Розподіл елементів множини Δ

згорання (Рис. 3). У процесі його побудови не дозволяється об'єднуватися піддеревом, що включають елементи A^- та B^+ . До елемента R також не дозволяється приєднувати елементи, проте зв'язки з цим елементом беруться до уваги. Після завершення згорання вершин утворюються два піддеревом, які умовно об'єднуємо вершиною t . На шляху від B^+ до A^- знаходимо вершину v^* таку, що включення її елементів та решти елементів цієї частини шляху буде відповідати бажаному значенню або буде першим значенням, більшим за задане число. Якщо це число відповідає бажаному значенню, то задачу вважаємо розв'язаною. В протилежному

випадку всі елементи до цієї вершини зліва додаємо до частини A^- , а всі елементи справа - до частини B^+ , а елементи самої вершини v^* розсіпаємо на множини Δ та продовжуємо задачу ітеративно розв'язувати аналогічним чином. Як вироджений може трапитися випадок, коли всі елементи між вершинами A^- та B^+ об'єднуються в процесі згорання в одну вершину v^* , тобто не виникає умов для їх перерозподілення. Тоді необхідно застосувати підхід на основі визначення ефективності призначення окремих елементів та кластерів в кожному з підсхем зокрема.

4. АЛГОРИТМИ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗБИТТЯ

Доцільно виділити дві основні стратегії оптимізації розбиття: попарну та групову. Перша реалізується між окремими сформованими на попередньому етапі частинами розбиття. Групова оптимізація дозволяє переформовувати одночасно декілька груп. Початковими умовами для оптимізації є деяке розбиття $\tilde{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$, яке оцінюється за певним значенням критерію якості $Q(\tilde{P})$. Метою оптимізації є отримання розбиття $\tilde{P}^* = \{P_1^*, \dots, P_k^*\}$ з кращим значенням критерію якості: $Q(\tilde{P}^*) > Q(\tilde{P})$. Запропоновані алгоритми реалізують покроковий процес покращання розв'язку.

В алгоритмах попарної оптимізації заданими є частини P_i та P_j , які описуються критерієм якості $Q(P_i, P_j)$. Необхідно отримати оптимізовані частини P_i^* та P_j^* , для яких $Q(P_i^*, P_j^*) > Q(P_i, P_j)$. Мова йде про перерозподіл елементів між частинами, який може покращити значення критерію. Можливими є два шляхи: для випадку розбиття на декілька частин (більше двох) поновне розділення множин, утворених елементами всіх пар P_i та P_j , або ітераційна оптимізація кожної пари (P_i, P_j) . Перший шлях передбачає об'єднання елементів обох частин в одну множину з повторним розв'язуванням задачі розбиття розглянутими вже методами початкового розбиття. Другий шлях передбачає ітераційну оптимізацію кожної пари (P_i, P_j) . Можливими є декілька стратегій: поодинокого переносу кластерів та елементів з коригуванням показників ефективності після кожної такої процедури, що забезпечуватиме найкращу якість, проте вимагає суттєвих обчислювальних затрат, або групового одночасного перенесення всіх елементів та кластерів з найкращим значенням критерію, а також парного чи групового обміну множинами кластерів та елементів. Для виходу з локальних екстремумів досліджено декілька типів різних збурень отриманого розв'язку з наступним продовженням оптимізаційного процесу. Збурення реалізуються перенесенням одного або декількох кластерів з однієї частини в іншу з погіршенням значення критерію, а також вилученням кластерів з найкращим значенням критерію для перенесення в обох частинах та

наступним перерозподілом їх складових елементів. Для цього можуть бути використані вже описані алгоритми початкового розподілу, які реалізуються тільки на виділеній частині елементів з початковими умовами, що визначаються залишеними частинами, або їх випадковий перерозподіл з наступною оптимізацією.

5. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ефективність запропонованих алгоритмів підтверджена рядом експериментів, виконаних на відомих тестах фірми IBM [3]. Графік часової залежності для базової процедури – побудови дерева

згортання, при якому мінімізується кількість зовнішніх зв'язків кожного кластера. Для виходу з локальних екстремумів застосовувались збурення кількох типів: перенесення одного, двох або трьох кластерів одночасно, які мають оптимальне відношення оцінки ефективності перенесення до кількості елементів або найкраще значення оцінки ефективності перенесення, комбіновані збурення та зрізання заданого відсотку елементів “шапки” (кластери, що мають найкраще значення оцінки перенесення) в обох частинах з подальшим випадковим призначенням цих елементів частинам розбиття. Часові характеристики наведено для процесора Intel Pentium III 800 MHz.

Таблиця 1. Результати оптимізації

Стратегія	Зріз “шапки”, %	Кількість кластерів збурення	Тип збурення	Кількість збурень	Макс. значення критерію	Мін. значення критерію	Оптимальні	≤1%	≤2%	≤5%	≤10%	Середнє арифметичне	Середня кількість ітерацій	Середній час, с.
1	0	1	оптимальний кластер	5	699	180	2	16	60	60	60	227	62	274
2	0	1	найкращий кластер	5	707	180	7	28	40	44	44	299	39	194
3	0	1	чергування 2 опт./ 2 найкр.	5	699	180	3	24	58	59	59	230	53	244
4	0	1	чергування 2 найкр./ 2 опт.	5	699	180	6	35	52	52	52	241	49	292
5	0	1+1	одночасно опт. + найкр.	5	699	180	2	16	61	61	61	227	62	252
6	0	2+2	одночасно опт. + найкр.	5	699	180	4	17	62	62	62	226	62	214
7	10	0	зрізання “шапки”	2	707	180	7	32	47	49	49	290	38	204
8	10	0	зрізання “шапки”	5	707	180	20	43	49	49	49	288	60	281
9	10	0	зрізання “шапки”	10	707	180	29	48	50	50	50	284	96	407
10	2	0	зрізання “шапки”	5	707	180	12	37	46	46	46	293	54	272

згортання є близьким до лінійного [4].

На пачці зі ста випадково згенерованих початкових розбиттів досліджено вплив ряду параметрів алгоритмів оптимізації, таких як тип критерію згортання, кількість та тип збурень, відсоток згортання дерева, відсоток зрізання “шапки” для збурення, на якість отримуваних розв'язків та кількість попадань в певний окіл оптимуму. Стратегії з високим відсотком попадань розв'язків у заданий окіл оптимуму доцільно застосовувати для подальшої оптимізації розв'язків у задачах розбиття.

У Таблиці 1 наведено результати досліджень для алгоритму оптимізації, що виявився при попередніх тестуваннях швидкодіючим та ефективнішим, у порівнянні з іншими розглянутими алгоритмами. Обраний алгоритм оптимізації передбачає почергове одностороннє перенесення з однієї частини в іншу кластерів/елементів з від'ємним та нульовим значенням оцінки ефективності перенесення q_i в кількості, що не перевищує заданого відхилення розміру схеми від точного розбиття на два. Завершується робота алгоритму при умові повторення значення критерію якості $Q(\tilde{P}^*)$.

Результати подано для відсотку згортання дерева на кожній ітерації у 20% від діапазону значень критерію, допустимому відхиленні розбиття схеми від точного розбиття на два - 10% та критерію

6. ВИСНОВКИ

Розроблені алгоритми декомпозиції складних схем підтвердили свою високу ефективність як з точки зору якості отриманих розв'язків, так і швидкодії. Їх обчислювальна складність є близькою до лінійної, що робить можливим їх використання для задач надвеликих розмірностей з мільйонами елементів.

7. ЛІТЕРАТУРА

1. Базилевич Р.П. *Декомпозиционные и топологические методы автоматизированного конструирования электронных устройств*. Львів: Вища школа, 1981. –168 с.
2. Bazylevych R. *The Optimal Circuit Reduction Method as an Effective Tool to Solve Large and Very Large Size Intractable Combinatorial VLSI Physical Design Problems* // Proc. of 10th NASA Symposium on VLSI Design. - Albuquerque. - 2002. – P. 6.1.1-6.1.14.
3. Alpert C.J. *The ISPD-98 Circuit Benchmark Suit* // Proc. ACM/IEEE Intern. Symposium on Physical Design.- April 1998. – P. 80-85.
4. Базилевич Р.П., Подольський І.В. *Ієрархічна кластеризація складних схем*. Вісник Державного університету “Львівська політехніка”, №. 392, 2000, с. 155-158

ДВІ ЗАДАЧІ РОЗБИТТЯ

Надія ТИМОФІЄВА

МННЦ ІТiС НАН та Мiносвiтu України 03022, Київ, просп. Ак. Глушкова, 40,
тел.: (044) 266 53 52, факс (044) 266 1570

ABSTRACT

Two subclasses of the problems of partitioning which are divided by a method of assigning of entry datas are considered. Mathematical models are elaborated for them, a structure of entry datas is investigated, an objective function is formulated. Differences of their mathematical models are investigated. For beforehand assigned order of the set partitioning into subsets, elements of which are arguments of the objective function, its values shanges are analyzed. It is proved, that for assigned order for both types of the problems of partitioning, its values changes follow the laws of piece-monotonons functions.

The results of these researches may be used for elaboration the practical problems of partitioning.

1. ВСТУП

Задачі розбиття ґрунтовно досліджені як закордонними так і вітчизняними вченими, наприклад [1-3]. Для розв'язання цих задач використовуються ітераційні, послідовні методи, динамічне програмування [1, 3]. Досить часто використовуються способи ієрархічної ростучої класифікації або ієрархічної спадної класифікації.

Але дослідженню природи цих задач, аналізу аргумента цільової функції, яким є розбиття множини на підмножини, аналізу вхідних даних достатньої уваги не приділяється. У статті на прикладі двох підзадач задач розбиття, які відрізняються між собою способом завдання вхідних даних (їх математичні постановки подано нижче), коротко висвітлено ці проблеми. Незважаючи на те, що цільова функція для них формулюється по різному, а для їх розв'язання необхідно розробляти різні підходи, в літературі ці задачі ототожнюються наприклад [1].

В літературі [2 3] оговорено, що значення цільової функції на всій множині змінюється за законами монотонних функцій, але строгого доведення не наводиться. Знання властивостей задач розбиття дозволяє строго довести, що вона змінюється за законами кусково-монотонних функцій.

2. ПРО АРГУМЕНТ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ ЗАДАЧ РОЗБИТТЯ

Так як аргументом цільової функції в задачах розбиття є розбиття n елементної множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ на підмножини, спочатку розглянемо характерні властивості цих об'єктів і структуру їх множини.

Розбиттям n елементної множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ на η підмножин (блоків) назвемо множини підмножин $\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_\eta\}$ таку, що $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_\eta = A$, $\rho_j \neq \emptyset$, $\rho_j \cap \rho_t = \emptyset$, $j \neq t$, $j, t \in \{1, \dots, \eta\}$. Непуста підмножина $\rho_j = \{a_1, \dots, a_{\xi_j}\}$, $a_s \in A$, $s \in \{1, \dots, n\}$, може мати від 1 до n елементів, ξ_j - кількість a_s у підмножині ρ_j .

Два розбиття ρ і ρ^* назвемо тотожними, якщо кількість їх підмножин однакова і для будь-якої підмножини ρ_j можна знайти у множині ρ^* підмножину ρ_t^* , яка не відрізняється від ρ_j ні кількістю елементів ні самими елементами.

Множину розбиттів позначимо Θ . Вважатимемо, що Θ упорядкована у заданому порядку, а її елементи перенумеровані від 1 до q . В подальшому розбиття множини на підмножини позначимо ρ^k , де k порядковий їх номер у множині Θ .

Означення. Два нетотожні розбиття $\rho^k, \rho^l \in \Theta$ назвемо ізоморфними, якщо кількість їх підмножин однакова ($\eta^k = \eta^l$), і для будь-якої підмножини ρ_j^k у розбитті ρ^k знайдеться підмножина ρ_t^l для якої $\xi_j^k = \xi_t^l$.

Підмножину $L_{\eta^k} \subset \Theta$, яка складається з ізоморфних розбиттів, назвемо підмножиною ізоморфних розбиттів. Кількість ρ^k

у ній $\frac{n!}{\xi_1^k! \xi_2^k! \dots \xi_{\eta^k}^k! m_s!}$, де m_s - число підмножин $\rho_j^k, \rho_i^k \subset \rho^k$, у яких $\xi_j^k = \xi_i^k$, $s \in \{1, \dots, e\}$, e - кількість блоків, кожен із яких об'єднує ρ_j^k з однаковою кількістю ξ_j^k .

Отже пошук оптимального значення цільової функції в задачах розбиття проводиться або на всій множині Θ , або на підмножинах ізоморфних розбиттів L_{η^k} .

3. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧ РОЗБИТТЯ

Математична модель задач розбиття, як правило, задається однією множиною $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Але, в залежності від їх типу, вхідні дані у них задаються по-різному. Від цього залежить спосіб завдання цільової функції, способи і алгоритми розв'язання цих задач.

Отже за способом завдання вхідних даних в задачах розбиття можна виділити такі підкласи: а) задачі, у яких вхідними даними є значення вагів між заданими елементами $a_i, a_j \in A$. Це - кластеризація, таксономія, компоновка, розрізання графа на задану кількість частин, та ін.; б) задачі, у яких вхідні дані визначають властивість заданих елементів $a_j \in A$. До них належить задача про купу каміння, задача розбиття множини споживачів на зони обслуговування.

Побудуємо математичну модель для задачі а)

Нехай задано множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, між елементами яких визначено взаємозв'язок, кількісне значення яких подамо симетричною матрицею C . Назвемо вагою величину, що визначає залежність, яка існує між елементом a_i і елементом a_j .

Уведемо також (0,1)-симетричну комбінаторну матрицю $Q(\rho^k) \in Q_{\Theta}$, яка задає розподілення елементів a_j множини A по підмножинах ρ_j^k для k -го розв'язку задачі. Елемент цієї матриці $g_{ij}(\rho^k) = 1$, якщо елементи a_i і a_j відносяться до однієї підмножини, і $g_{ij}(\rho^k) = 0$, якщо a_i і a_j відносяться до різних підмножин; Q_{Θ}

упорядкована множина усіляко можливих таких матриць. Матриця $Q(\rho^k)$ утворюється із попередньої $Q(\rho^l)$ за правилами генерування усіляко можливої множини розбиттів.

Подамо елементи правого поля матриці $Q(\rho^k)$ комбінаторною функцією

$$\bar{\beta}(\bar{f}(\bar{x})(\rho^k)) = (\beta(f(x_1)(\rho^k)), \dots,$$

$\dots, \beta(f(x_m)(\rho^k)))$, а елементи правого поля матриці C числовою функцією

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_m)), \quad \text{де}$$

$$m = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{кількість складових у}$$

$\bar{\beta}(\bar{f}(\bar{x})(\rho^k))$ і $\bar{\varphi}(\bar{x})$. Функція цілі для задачі а) набуде вигляду

$$F(\rho^k) = \sum_{j=1}^m \beta(f(x_j)(\rho^k)) \varphi(x_j) \quad (1)$$

Задача а) полягає у тому, щоб об'єднати однорідні елементи в одні і ті ж блоки. В залежності від критерію, який використовується для оцінки результату розв'язання задачі, однорідні елементи можуть мати між собою або найбільші ваги або найменші. Вважатимемо, що однорідні елементи мають між собою найбільші ваги і вони об'єднуються в одну підмножину. В цьому випадку задача розбиття полягає у знаходженні такого аргументу $\rho^k \in \Theta$, для якого функція цілі (1) при задоволенні заданих умов була б найбільшою.

Побудуємо математичну модель для задачі б). До них відноситься задача про купу каміння, яка формулюється так. Задано множини каменів $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, кожному із яких присвоєно додатне число, його вагу $V(j)$. Необхідно розділити цю множини на задану кількість куп так, щоб вага самої важкої із них була б найменшою.

Математична модель для цієї задачі також задана однією множиною $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, але між $a_j \in A$ відсутні зв'язки. Натомість вхідні дані задано скінченною послідовністю (числовою функцією) $\bar{\varphi}(\bar{x})$, складові якої $\varphi(x_j)$ визначають характерні властивості елемента a_j (в задачі про купу каміння це вага j -го каменя).

Для визначення розподілення елементів множини A по підмножинах ρ_j^k для k -го варіанту розв'язку задачі уведемо комбінаторну функцію $\bar{\beta}(\bar{f}(\bar{x})(\rho^k)) = (\beta(f(x_1)(\rho^k)), \dots,$

..., $\beta(f(x_n)(\rho_i^k))$, де $\beta(f(x_j)(\rho_i^k)) \in \{0,1\}$ і $\beta(f(x_j)(\rho_i^k))=1$, якщо a_j - й елемент входить у ρ_i^k - й блок розбиття ρ^k , і $\beta(f(x_j)(\rho_i^k))=0$ в іншому разі. Для цього типу задач запишемо цільову функцію

$$F(\rho^k) = \max_{\substack{\rho_i^k \subseteq \rho^k \\ i=1, \eta^k}} \left(\sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \beta(f(x_j)(\rho_i^k)) \right), \dots$$

$$\dots, \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \beta(f(x_j)(\rho_{\eta^k}^k))$$

Задача б) полягає у знаходженні такого ρ^{k*} , для якого цільова функція $F(\rho^k)$ на $L_{\eta^k} \subset \Theta$ набуває найменшого значення

$$F(\rho^{k*}) = \min_{\rho^k \in L_{\eta^k} \subset \Theta} F(\rho^k)$$

4. ПРО ЗМІНУ ЗНАЧЕНЬ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

Для вибору способів розв'язання задач а) і б) необхідно спочатку визначити, яким чином змінюється цільова функція на усій множині розбиттів. Відомо [2,3], якщо $\rho^k \in \Theta$ упорядкувати так, що або $\eta^k < \eta^l$, або $\eta^k > \eta^l$, $k < l$, то цільова функція $F(\rho^k)$ змінюється за законами монотонних функцій.

Розглянемо, наскільки правильне це твердження. Спочатку наведемо такий приклад.

Задано множину $A = \{1, \dots, 5\}$. Для задачі а) числа функція $\varphi(x) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, а для задачі б) - $\varphi(x) = (1, 2, 3, 4, 5)$. Комбінаторна функція $\beta(\bar{f}(\bar{x})(\rho^k))$ для задачі а) змінюється в залежності від значення $\rho^k \in \Theta$ і з урахуванням властивостей комбінаторних матриць. Для задачі б) функція змінюється за правилами, описаними вище.

Для цих параметрів підраховуємо значення цільової функції $F(\rho^k)$, $k = \overline{1, 52}$. Результати обчислення наведено у табл. 1. Перша колонка містить кількість блоків η^k у розбитті ρ^k для підмножини $L_{\eta^k} \subset \Theta$. Друга - розбиття ρ^k , третя - значення комбінаторної функції для задачі а), четверта - значення цільової функції для задачі а), п'ята - значення цільової

функції для задачі б). У зв'язку з обмеженням на об'єм статті для підмножин L_{η^k} у табл. 1 наведено лише ті ρ^k , для яких $F(\rho^k)$ набуває найбільшого і найменшого значень.

Таблиця 1. Зміна значень цільової функції $F(\rho^k)$ для задач а) і б)

	$\bar{\varphi}(\bar{x})$	1	2	3	4	5										
1	(1 2 3 4 5)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	55	55
2	(1 2 3 4) (5) (5 2 3 4) (1)	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	25	10
2	(1 2 3) (4 5) (4 1 2) (3 5) (3 4 5) (1 2)	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	18	9	
3	(1 2 3) (4) (5) (4 5 3) (1) (2)	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	8	6	
3	(3 2) (1 4) (5) (2 3) (4 5) (1)	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	8	5	
4	(1 2) (3) (4) (5) (5 4) (1) (2) (3)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	
5	(1) (2) (3) (4) (5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	

Із результатів обчислень видно, що у підмножині ізоморфних розбиттів L_{η^k} по відношенню до L_{η^l} , $\eta^k < \eta^l$, і $\eta^l = \eta^k + 1$, або $\eta^k = \eta^l$, а $\xi_1^k < \xi_1^l$, значення цільової функції $\min_{\rho^k \in L_{\eta^k}} F(\rho^k) < \max_{\rho^l \in L_{\eta^l}} F(\rho^l)$.

Отже, те, що значення цільової функції для оговореного вище порядку на множині Θ змінюється за законами монотонних функцій, не є справедливим.

Дослідимо зміну значень цільової функції на множині Θ для загального випадку. Складові $\varphi(x_j)$ функції $\bar{\varphi}(\bar{x})$ є випадкові змінні і для конкретних задач неоднакові. Комбінаторна функція змінюється лише в залежності від розбиття $\rho^k \in \Theta$ за законами комбінаторних матриць і для будь якої задачі значення її постійне. Розглянемо, яким чином вона змінюється на множині розбиттів Θ . Так як

значення $\beta(f(x_j)(\rho^k)) \in \{0,1\}$, визначимо, яким чином змінюється кількість одиниць у $\bar{\beta}(\bar{f}(\bar{x})(\rho^k))$ в залежності від ρ^k .

Наведемо такий приклад. Нехай задано множину $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $n = 8$.

За формулою
$$\sum_{j=1}^{\eta^k} \frac{\xi_j^k (\xi_j^k - 1)}{2} \quad [4] \text{ для}$$

підмножин L_{η^k} обчислимо кількість одиниць у комбінаторних функціях. Їх кількість для розбиттів $\rho^k \in L_{\eta^k}$ і $\rho^l \in L_{\eta^l}$ різна, а для розбиттів $\rho^k \in L_{\eta^k}$ однакова. Результати обчислень наведено у табл. 2. Перша колонка містить номер підмножини L_{η^k} , друга - розбиття числа n , яке задає кількість блоків η^k у ρ^k і кількість елементів у ρ_j^k , третя - кількість одиниць у функції $\bar{\beta}(\bar{f}(\bar{x})(\rho^k))$ для $\rho^k \in L_{\eta^k}$.

Таблиця 2. Кількість одиниць у комбінаторних функціях для підмножин $L_{\eta^k} \subset \Theta$.

1	2								3
	ξ_1^k	ξ_2^k	ξ_3^k	ξ_4^k	ξ_5^k	ξ_6^k	ξ_7^k	ξ_8^k	
1	8								28
2	7	1							21
	6	2							16
	5	3							13
	4	4							12
3	6	1	1						15
	5	2	1						11
	4	3	1						9
	4	2	2						8
	3	3	2						7
4	5	1	1	1					10
	4	2	1	1					7
	3	3	1	1					6
	3	2	2	1					5
	2	2	2	2					4
5	4	1	1	1	1				6
	3	2	1	1	1				4
	2	2	2	1	1				2
6	3	1	1	1	1	1			3
	2	2	1	1	1	1			2
7	2	1	1	1	1	1	1		1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Незалежно від вхідних даних (функція $\phi(x)$) найменша кількість одиниць у комбінаторних функціях для $L_{\eta^k} \subset \Theta$ порівняно з $L_{\eta^l} \subset \Theta$,

$\eta^k < \eta^l$, $\eta^l = \eta^k + 1$, або $\eta^k = \eta^l$, $\xi_1^k > \xi_1^l$, менша, ніж найбільша їх кількість для L_{η^l} . У [4] детально розглянуто що

властивість комбінаторних функцій для задачі а).

Сформулюємо теорему, яка справедлива як для задачі а) так і для задачі б).

Теорема. (Справедлива для $n > 6$ і $1 < \eta^k \leq n - 3$). Якщо множина розбиттів Θ упорядкована ізоморфними підмножинами L_{η^k}, L_{η^l} таким чином, що $\eta^k \leq \eta^l$ або $\eta^k \geq \eta^l$, $k \neq l$, то цільова функція змінюється за законами кусково-монотонних функцій, а в точці розриву її приріст $\Delta F(\rho^k)$ змінює знак на додатній у випадку кусково-монотонно зростаючої, або від'ємний для кусково-монотонно спадної функції.

5. ВИСНОВКИ

Отже, при розробленні алгоритмів і методів для розв'язання задач розбиття, слід урахувати описані властивості цих задач. Якщо, наприклад, проводити пошук оптимального значення цільової функції на підмножинах L_{η^k}, L_{η^l} , для яких $\eta^k = \eta^l$, то $F(\rho^k)$ набуває найбільшого значення для $\rho^k \in L_{\eta^k}$, у якого $\xi_1^k > \xi_j^k$, а $\xi_j^k = 1$ для $j = \overline{1, \eta^k}$. Найменшого значення вона набуває для

$\rho^l \in L_{\eta^l}$, у якого $\xi_1^k \leq \sum_{j=2}^{\eta^k} \xi_j^k$. Якщо для цього

випадку при розв'язанні задачі не увести додаткових обмежень, можна одержати некоректний результат.

ЛІТЕРАТУРА

1. Винцок Т.К. Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов. К.: Наукова думка, 1987 262 с.
2. Винцок Т.К. Оптимальное разбиение последовательности элементов на подпоследовательности//Кибернетика. 1970, N 4. С. 128 - 133.
3. Жамбю М. Иерархический кластер анализ и соответствия. М: Финансы и статистика, 1988. 342 с.
4. Тимофієва Н.К. Про властивості комбінаторних функцій в задачах комбінаторної оптимізації//Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень. Зб. наукових праць. - Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України - 2001- том 2. - С. 411 - 417.