ДВОВИМІРНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є З КОМПЛЕКСНОЮ ФАЗОЮ

Микола Будник

Інститут кібернетики НАНУ, просп. Акад. Глушкова 40, Київ 03680, Україна
Тел: (044) 266-1267, Факс: 266-3348, Електронна пошта: budnik @ d220.icyb.kiev.ua

ABSTRACT: In general, report is devoted to development of a theory of Fourier Transform (FT) for multidimensional signal domain. In particular, a new approach for the two-dimensional (2D) FT is proposed. Essence of above approach consists in replacing of the single (scalar) phase to two phases which are proportional to Cartesian co-ordinates of the FT garmonics onto the 2D signal plane. It was shown that the proposed FT have hipercomplex nature and the two orthogonal phases one can interpret as the vector-phase so as components of complex number. It was introduced the 22 so-called "derivative" spectra, which permit to analyze 2D imaging in a detail way. Developed results are useful for the spatial filtration of 2D imaging and simulation of appropriate technical systems as a 2D complex spatial filters.

ВСТУП

Багато прикладних задач зводиться до аналізу двовимірних функцій. Сюди відносяться задачі прикладної оптики [1], розпізнавання зображень [2] та оброблення двомірному інформації довільної природи. Відомо, що одним із розповсюджених методів аналізу є інтегральне перетворення Фур'є (ПФ). У найбільш загальній комплексній формі для одно - та багатовимірного випадків ПФ має вигляд [3,4]

$$C(k)=(1/2\pi)\int f(x)\exp[-ikx]dx=A(k)\exp[-i\varphi(k)], \quad (1)$$

$$S(x)=\int C(k)\exp[ikx]dk=\int A(k)\exp[i\{kx-\varphi(k)\}]dk, \quad (2)$$

$$C(K)=(1/2\pi)^N\int f(X)\exp[-i\langle KX\rangle]dX, \quad (3)$$

$$S(X)=\int C(K)\exp[i\langle KX\rangle]dK. \quad (4)$$

В операторній формі (1,3) та (2,4) можна записати у вигляді $C=F(f)$ та $S=F^{-1}(C)$, де C, S - фур'є-спектр та відновлений сигнал, F та F^{-1} оператор ПФ та оберненого ПФ (ОПФ). В (3,4) вхідна змінна та хвильове число (частота) є векторами $X=\{x_p\}$, $K=\{k_p\}$, $p=1,\ldots N$; $\langle KX\rangle$ - їх скалярний добуток, $\int dX(K)$ - N-кратні інтеграли $\int\ldots\int dx_1(k_1)\ldots dx_N(k_N)$. Відмітимо, що (1-4) описують математичний спектр, визначений як для додатних (реальних) частот, так і для від'ємних $k_p\in]-\infty,\infty[$ на нескінченній області визначеності $x_p\in]-\infty,\infty[$. Вирази (1,3) для оберненого ПФ (ОПФ) є розв'язок оберненої задачі. Для її розв'язання, тобто відновлення функції f(x), необхідно знати комплексний спектр C(k). З другого боку ОПФ можна розглядати як оператор, що переводить амплітудний спектр у вихідний сигнал $G^{-1}(\varphi):A\rightarrow f$ і залежить від фази як від параметра. Таким чином, одномірне ОПФ має один параметр. Обгрунтуємо, що у N-мірному випадку оператор повинен залежати від N параметрів.

Для цього необхідно зрозуміти, чому ПФ одновимірної функції має два параметра – амплітуду та фазу. Причина полягає в тому, що графік цієї функції є підмножиною прямого добутку області визначення та множини значень $G(f)\subset X\times Y$. При $X\subset R$, $Y\subset R$, маємо $G\subset R\times R=R^2$, тобто графік є підмножиною двовимірного простору. Тому одновимірне ПФ повинно мати два параметри, а оператор ОПФ, що переводить $A\rightarrow f$ - один параметр. Аналогічно для N-вимірного випадку маємо $X\subset R^N$, $Y\subset R$, та $G\subset R^{N+1}$. Тому ПФ повинно описуватися N+1 параметрами, а оператор ОПФ, що переводить $A\rightarrow f$ – N параметрами.

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Зрозуміло, що такими додатковими параметрами повинні бути додаткові фази. Проте N-вимірне ПФ має всього лише одну фазу φ(K). Її вигляд можна встановити, виділивши явно в комплексному спектрі, аналогічно одновимірному випадку

$$C(K)=A(K)\exp[-i\varphi(K)]. \quad (5)$$

Підстановка (5) в (4) дає вигляд сумарної фази ОПФ

$$S(X)=\int A(K)\exp[i\varphi_\Sigma]dX, \quad \varphi_\Sigma=\langle KX\rangle-\varphi(K). \quad (6)$$

Якщо x одновимірна і має смисл часу t, то $k=\omega$ та $\varphi=\omega t_0$, де t_0 має смисл часу затримки гармоніки. Тоді у багатовимірному випадку запропонуємо

$$\varphi(K)=\langle KX_0\rangle=\Sigma\varphi_p, \quad \varphi_p=k_p x_{op}, \quad (7)$$

де φ_p можна інтерпретувати як фазовий спектр, що відповідає p–ій координаті вхідного сигналу. Таким чином, в рамках існуючого багатомірного ПФ, що описується амплітудою та скалярною фазою, у фур'є-області відбувається втрата інформації. Для адекватного опису вхідного сигналу такому ПФ недостає N-1 ступеня вільності, яким відповідають додаткові параметри. Шлях до розробки ПФ, при якому не відбувається втрата інформації, полягає у переході від скалярної фази до векторної. Зрозуміло, що таку векторизацію фази легко провести на основі (7), вважаючи величини φ_p проекціями деякої вектор-фази Φ. Метою роботи є розробка ПФ з такою “векторною” фазою для N=2.

2. СТАНДАРТНЕ ПФ

У випадку періодичних функцій ПФ зводиться до ряду. Функція f(X) задана на *N*-мірному кубі $x_p\in[-L_p,L_p]$. Далі будемо користуватися нормованими величинами $k_{op}x_p$ k_p/k_{op}, де $k_{op}=\pi/L_p$ – характерна частота по *p*–ій координаті. Тоді при p=1,2, $x_1=x$, $x_2=y$, $k_{0x}=k_{01}$, $k_{0y}=k_{02}$ маємо $x=k_{0x}x_1$, $y=k_{0y}x_2$, $k_x=k_1/k_{ox}=n$, $k_y=k_2/k_{oy}=m$, а $(x,y)\in[-\pi,\pi]$. Фізичний спектр $n,m\in[1,\infty[$, в одновимірному випадку має вигляд [4]

$$S(x)=a_0/2+\Sigma A_n\sin\{nx+\varphi_n\},\ A_n^2=a_n^2+b_n^2,\ tg\varphi_n=a_n/b_n, \quad (8)$$

$$a_n=(1/\pi)\int f(x)\cos(nx)dx,\quad b_n=(1/\pi)\int f(x)\sin(nx)dx, \quad (9)$$

$$C_n=(1/\pi)\int f(x)\exp[-inx]dx=A_n\exp[-i\varphi_n]=a_n-ib_n, \quad (10)$$

$$S(x)=a_0/2+\Sigma C_n\exp[inx]. \quad (11)$$

У багатовимірному випадку приводиться вираз для математичного спектру при $n,m\in]-\infty,\infty[$ [3]

$$S(x,y)=\Sigma\Sigma C_{nm}F^{-1},\quad F^{-1}=1/F=\exp[i(nx+my)], \quad (12)$$

$$C_{nm}=(1/2\pi)^2\iint f(x,y)Fdxdy,\ F=\exp[-i(nx+my)], \quad (13)$$

На практиці, як правило, розглядають чотири коефіцієнти Фур′є, одержані в результаті розкладу спектру (13) по добутках косинусів і синусів [5].

$$4\pi^2a_{nm}=\iint f(x,y)\, g_{11}dxdy,\ 4\pi^2b_{nm}=\iint f(x,y)\, g_{12}dxdy, \quad (14)$$

$$4\pi^2c_{nm}=\iint f(x,y)\, g_{22}dxdy,\ 4\pi^2d_{nm}=\iint f(x,y)\, g_{22}dxdy, \quad (15)$$

$$S(x,y) = \Sigma\Sigma[a_{nm}g_{11}+b_{nm}g_{12}+c_{nm}g_{21}+d_{nm}g_{22}], \quad (16)$$

$$g_{11}=\cos(nx)\cos(my),\quad g_{21}=\cos(nx)\sin(my), \quad (17)$$

$$g_{12}=\sin(nx)\cos(my),\quad g_{22}=\sin(nx)\sin(my). \quad (18)$$

При цьому всі амплітудні спектри (a_{nm} - косинус-спектр, d_{nm} – синус-спектр; b_{nm} і c_{nm} - крос-спектри) дійсні, а фаза ігнорується. Такі парціальні спектри не мають прозорого фізичного сенсу, а тому використовується сумарний спектр (19).

$$A_{nm}^2=a_{nm}^2+b_{nm}^2+c_{nm}^2+d_{nm}^2. \quad (19)$$

Враховуючи комплексний характер ПФ (13), $F=g_{11}-g_{22}-i(g_{12}+g_{21})$ одержимо, що спектр дорівнює

$$C_{nm}=\Lambda\exp[-i\gamma],\quad tg\,\gamma=(b_{nm}+c_{nm})/(a_{nm}-d_{nm}), \quad (20)$$

$$\Lambda=[A_{nm}^2+2(b_{nm}c_{nm}-a_{nm}d_{nm})]^{1/2}.$$

Проте такий підхід пов′заний із двома проблемами По-перше, безпосередній фізичний смисл фази γ невідомий, а по-друге – амплітуда Λ, яка відповідає такій фазі, відрізняється від (19). (Причина таких проблем полягає в тому, що в дійсності двовимірне ПФ не може бути адекватно описане комплексними числами (див. П.7.)). Тому автору невідомі приклади використання фази у випадку двовимірного (тим більше багатовимірного) ПФ.

Згідно наших уявлень (7), така фаза повинна бути сумою двох фаз-проекцій

$$C_{nm}=A_{nm}\exp[-i\varphi_{nm}],\qquad \varphi_{nm}=\varphi_n+\varphi_m, \quad (21)$$

$$\varphi_n(x)=k_{0X}x_{0n},\quad \varphi_m(y)=k_{0Y}y_{0m}, \quad (22)$$

де $\varphi_n(x)$ та $\varphi_m(y)$ - відповідні фази-проекції, що описують положення nm-ї гармоніки на площині. Далі будуть одержані вирази (40,41), які показують, що дійсно $\gamma\equiv\varphi_{nm}$ та $\Lambda\equiv A_{nm}$. Але для повного описання двовимірного ПФ однієї амплітуди та однієї фази недостатньо. Таким чином, за незалежні параметри (тобто спектри), що підлягають визначенню і мають фізичний сенс, необхідно взяти амплітуду A_{nm} та ортогональні фази $\varphi_n(x)$, $\varphi_m(y)$ відносно вісей прямокутної декартової системи координат на площині.

3. ВВЕДЕННЯ 2-ВИМІРНОГО ПФ

Спочатку покажемо, що вираз для одновимірного фізичного спектру (8), що використовується на сьогодні, не зовсім коректний. Для цього необхідно перейти до математичного спектру

$$S(x)=\Sigma A'_n\sin\{nx+\varphi_n\},\quad a'_n=a_n/2,\ b'_n=b_n/2. \quad (23)$$

і записати вираз для амплітуди 0-ї гармоніки відновленого сигналу $S_0(x)=A'_0\sin\varphi_0$. Проте з точки зору ПФ постійна складова вихідного сигналу визначається тільки відповідним коефіцієнтом Фур′є, тобто $f_0(x)=A'_0$. Для того, щоб узгодити обидва вирази $S_0(x)=f_0(x)$ необхідно покласти $\varphi_0=\pi/2$. Останнє означає, що нульова гармоніка повина мати фазу (=π/2), що не має фізичного сенсу. Реально, як це добре видно з (8) або (9), постійна складова є чисто дійсною, тобто їй відповідає нульова фаза. Вихід із цього протиріччя полягає у переході до нової фази ψ, що задовільняє умову $\psi_0=0$. В результаті отримаємо

$$S(x)=\Sigma A'_n\cos\{nx+\psi_n\},\quad \psi_n=\pi/2-\varphi_n,\quad tg\psi_n=b'_n/a'_n. \quad (24)$$

Причина такого протиріччя полягає в тому, що тангенс кута φ (8) є відношенням дійсної частини до уявної частини комплексного спектрального коефіцієнта, отже φ є кутом між останнім і його уявною частиною. Це приводить до того, що рівність (9) $C_n=A_n\exp[-i\varphi_n]=a_n-ib_n$, є формальною тому, що строго маємо $Re\{C_n\}=b_n$, $Im\{C_n\}=-a_n$. Заміна (24) дає кут ψ між комплексним спектром і його дійсною частиною, що відповідає формалізму комплексних чисел

$$C=A\exp(i\psi),\ a=Re\{C\}=A\cos\psi,\ b=Im\{C\}=A\sin\psi. \quad (25)$$

Для подальшого використання знову перейдемо до фізичного спектру, де для уніфікації врахуємо очевидне співвідношення $a_0=A_0$

$$S(x)=A_0/2+\Sigma A_n\cos\{nx+\psi_n\},\quad tg\psi_n=b_n/a_n. \quad (26)$$

Для обчислення двовимірного ПФ подамо двовимірну функцію у вигляді добутку двох одновимірних

$$f(x,y)=f(x)g(y). \quad (27)$$

Можливість такого представлення у загальному випадку грунтується на властивостях матриць. З точки зору теорії матриць, двовимірна функція, задана в дискретних відліках, є матрицею, а одновимірна

- вектором. Відомо [6], що кожна матриця може бути представлена прямим добутком двох векторів. Неважко переконатись, що йому відповідає добуток двох функцій, отже і кожна двовимірна функція може бути подана як добуток одновимірних.

При підстановці (27) у (12,13) ядра ПФ та ОПФ вироджуються, тобто подвійні інтеграл та ряд розщеплюються на добутки одинарних, що дає

$$S(x,y) = S(x)S(y), \quad C_{nm} = C_nC_m. \tag{28}$$

Щоб отримати явний вираз для S(x,y), підставимо в (28) вирази для одновимірних ОПФ у коректному вигляді (25), тоді формально маємо

$$S(x,y)=S_0+S_X+S_Y+S_{XY}, \quad S_0=A_{0X}A_{0Y}/4, \tag{29}$$

$$S_X=(A_{0Y}/2)\Sigma A_n\cos\{nx+\psi_n\}, \quad tg\psi_n=b_n/a_n, \tag{30}$$

$$S_Y=(A_{0X}/2)\Sigma A_m\cos\{my+\psi_m\}, \quad tg\psi_m=b_m/a_m, \tag{31}$$

$$S_{XY}=\Sigma\Sigma A_nA_m\cos(nx+\psi_n)\cos(my+\psi_m). \tag{32}$$

З (29-32) випливає, що двовимірний спектр складається з 4-х парціальних компонент: постійної складової S_0, двох одновимірних спектрів S_X, S_Y та власне двовимірного S_{XY}. Важливо відмітити, що парціальні одновимірні спектри не співпадають зі звичайними одновимірними, а власне двовимірний спектр не має смислу кореляційного спектру.

Проте, двовимірний спектр у вигляді (9,29-32) не може нас задовольнити тому, що він описується 4-ма параметрами – двома амплітудами та двома фазами. Така кількість завелика, незалежних параметра повинно бути тільки три, а тому необхідно шукати рівняння зв'язку між ними. Для цього розкладемо (32), використовуючи формули для косинуса від двох аргументів. В результаті одержимо, що власне двовимірний спектр має вигляд (19) з коефіцієнтами

$$a_{nm}=A_nA_m\cos\psi_n\cos\psi_m, \quad b_{nm}=A_nA_m\sin\psi_n\cos\psi_m, \tag{33}$$

$$c_{nm}=A_nA_m\cos\psi_n\sin\psi_m, \quad d_{nm}=A_nA_m\sin\psi_n\sin\psi_m, \tag{34}$$

або, враховуючи (25)

$$a_{nm}=a_na_m, \quad b_{nm}=b_na_m, \quad c_{nm}=a_nb_m, \quad d_{nm}=b_nb_m. \tag{35}$$

Вирази (33-35) можна одержати також в результаті підстановки (25) у (28)

$$C_{nm}=A_nA_m\exp[i(\psi_n+\psi_m)]=a_{nm}-d_{nm}+i(b_{nm}+c_{nm}). \tag{36}$$

4. ЗАГАЛЬНИЙ ВИРАЗ

Комбінування виразів (33) дають можливість ввести нові двовимірні коефіцієнти Фур'є A, B, C, D, що зв'язані з коефіцієнтами a, b, c, d одновимірного ПФ (далі, для простоти, індекси nm в них опущено)

$$A=(a^2+c^2)^{1/2}=a_nA_m, \quad B=(b^2+d^2)^{1/2}=b_nA_m, \tag{37}$$

$$C=(a^2+b^2)^{1/2}=A_na_m, \quad D=(c^2+d^2)^{1/2}=A_nb_m, \tag{38}$$

звідки одержимо шукані рівняння зв'язку

$$A_{nm}{}^2=A^2+B^2=C^2+D^2=A_n{}^2A_m{}^2, \tag{39}$$

$$tg\psi_n = B/A = d/c = b/a \equiv b_n/a_n, \tag{40}$$

$$tg\psi_m = D/C = c/a = d/b \equiv b_m/a_m, \tag{41}$$

що визначають три незалежних параметра – амплітуду A_{nm} та дві фази ψ_n, ψ_m як нелінійні комбінації 4-х амплітуд (14,15) двовимірного ПФ, які повністю описують фур'є-образ та мають безпосередній фізичний смисл. Смисл парціальних фаз – зміщення гармонік на площині відносно центра системи координат, яке, згідно (21) та (24), має вигляд

$$x_{0n} = \psi_n/k_{0x}, \quad y_{0m} = \psi_m/k_{0y}. \tag{42}$$

Згідно (29-41), фізичний спектр має загальний вигляд

$$S(x,y)=A_{00}/4+\Sigma(A_{n0}/2)\cos\{nx+\psi_n\}+ \tag{43}$$

$$+\Sigma(A_{0m}/2)\cos\{my+\psi_m\}+\Sigma\Sigma A_{nm}\cos(nx+\psi_n)\cos(my+\psi_m),$$

$$A_{00}=A_{0X}A_{0Y}, \quad A_{n0}=A_nA_{0Y}, \quad A_{0m}=A_{0X}A_m, \tag{44}$$

$$A_{nm}{}^2=A^2+B^2, \quad tg\psi_n=B/A, \quad tg\psi_m=D/C, \tag{45}$$

$$A^2=a^2+c^2, \quad B^2=b^2+d^2, \quad C^2=a^2+b^2, \quad D^2=c^2+d^2, \tag{46}$$

$$\pi^2a=\iint f(x,y)\, g_{11}dxdy, \quad \pi^2b=\iint f(x,y)\, g_{12}dxdy, \tag{47}$$

$$\pi^2c=\iint f(x,y)\, g_{21}dxdy, \quad \pi^2d=\iint f(x,y)\, g_{22}dxdy, \tag{48}$$

де функції g_{ij} описуються виразами (17,18). Коефіцієнти Фур'є для фізичного спектру (47,48) в 4 рази більші від (14,15), згідно з (35).

Замість (45) можна також користуватися формулами, залежними від "малих" коефіцієнтів

$$A_{nm}{}^2=a^2+b^2+c^2+d^2, \quad tg\psi_n = b/a, \quad tg\psi_m = c/a, \tag{49}$$

З (49) випливає, що амплітудний спектр описується виразом, аналогічним (19). Відмітимо, що для відшукання парціальних фазових спектрів вирази (40, 41) дають ще можливість $tg\psi_n=d/c$, $tg\psi_m=d/b$, але для визначеності вибрано варіант подібний до одномірного за позначеннями. Вирази (43, 44, 45 або 49, 46-48) описують ПФ у загальному вигляді. Для практичних обчислень можна привести спрощені вирази для $A_{00}=a_{00}$, A_{n0} та A_{0m}

$$A_{00}=\pi^{-2}\iint f(x,y)dxdy, \; A_{n0}{}^2=a_{n0}{}^2+b_{n0}{}^2, \; A_{0m}{}^2=a_{0m}{}^2+c_{0m}{}^2, \tag{50}$$

$$\pi^2a_{n0}[b_{n0}]=\iint f(x,y)\cos(nx)[\sin(nx)]dxdy, \tag{51}$$

$$\pi^2a_{0m}[c_{0m}]=\iint f(x,y)\cos(mx)[\sin(mx)]dxdy. \tag{52}$$

5. ДОСЛІДЖЕННЯ ПФ

Для математичного спектру (n,m∈]-∞, ∞[) замість (43) маємо однорідну формулу

$$S=\Sigma\Sigma A_{nm}G_{nm}(x,y), \quad G_{nm}=\cos(nx+\psi_n)\cos(my+\psi_m), \tag{53}$$

Тут парціальні спектри обчислюються за допомогою (49), а коефіцієнти Фур'є – (14,15). Набір функцій $\{G_{nm}\}$ є повною ортонормованою системою функцій для двовимірного ПФ. Таким чином, (53) дає загальний вигляд двовимірної тригонометричної функції, справедливий і для фізичного спектру. Тому, більш коректно подати останній у вигляді, подібному (53)

$$S=\Sigma\Sigma E_{nm}G_{nm}(x,y), \quad E_{nm}=A_{nm}, \quad n,m>1, \tag{54}$$

$$E_{00}=A_{00}/4, \quad E_{n0}=A_{n0}/2, \quad E_{0m}=A_{0m}/2, \tag{55}$$

Де коефіцієнти в (54) та (55) визначаються, відповідно, виразами (47-49) та (50-52). Також (53) дозволяє узагальнення на континуальний випадок

$$A(k_X,k_Y)=(1/2\pi)^2\iint f(x,y)G(k_X,k_Y,x,y)dxdy, \quad (56)$$
$$S(x,y)=\iint A(k_X,k_Y)G^{-1}(k_X,k_Y,x,y)dk_Xdk_Y, \quad (57)$$
$$G^{-1}(k_X,k_Y,x,y)=\cos[k_Xx+\psi(k_X)]\cos[k_Yy+\psi(k_Y)], \quad (58)$$

У вигляді (56-58) ПФ є інтегральним перетворенням з ядром G. Враховуючи континуальний аналог (42)

$$x_0(k_X)=\psi(k_X)/k_x, \quad y_0(k_Y)=\psi(k_Y)/k_y \quad (59)$$

одержимо, що ядро двомірного ОПФ G^{-1} дорівнює

$$G^{-1}(k_X,k_Y,x,y)=\cos[k_X(x+x_0)]\cos[k_Y(y+y_0)], \quad (60)$$

Приймаючи до уваги аналогію з виразами для ядер ПФ та ОПФ, одержимо, що ядро двомірного прямого ПФ є простим узагальненням одномірного випадку.

$$G(k_X,k_Y,x,y)=\cos[k_X(x-x_0)]\cos[k_Y(y-y_0)]. \quad (61)$$

Звідси легко одержати випадок періодичної функції, коли спектр дискретний, тоді відповідне ПФ має ядро, що є узагальненням (53) та (61)

$$A_{nm}=(1/2\pi)^2\iint f(x,y)H_{nm}(x,y)dxdy \quad (62)$$
$$H_{nm}(x,y)=\cos[(k_{0X}(nx-x_{0n})]\cos(k_{0Y}(my-y_{0n})]. \quad (63)$$

З огляду на те, що фаза є вектор, можна перейти до довжини Ф та кута θ в полярній системі координат, а також аналогічних параметрів ρ, α для зміщень.

$$\Phi^2=\psi_n^2+\psi_m^2, \quad tg\theta=\psi_m/\psi_n, \quad (64)$$
$$\rho^2=x_{0n}^2+y_{0m}^2, \quad tg\alpha=y_{0m}/x_{0n}=(k_{0X}/k_{0Y})tg\theta, \quad (65)$$

Це має сенс при аксіальній симетрії функції $f(\rho,\alpha)=f(\rho)g(\alpha)$, тоді $k_\rho^2=k_X^2+k_Y^2$, $tgk_\alpha=k_Y/k_X$. Таким чином, можна розглядати 5 спектрів – 3 двовимірних та 2 одновимірних: A_{nm} - амплітудний, ψ_n - x-фазовий, ψ_m - y-фазовий, Φ_{mn} – радіально-фазовий, θ_{nm} – аксіально-фазовий. Замість останніх 4-х можна розглядати X-спектр x_{0n}, Y-спектр y_{0m}, радіальний ρ_{mn} та α_{nm} аксіальний спектри. Будемо називати їх первісними тому, що вони описують розподіл у фур'є-області.

6. ПОХІДНІ СПЕКТРИ

Спектри, утворені з первісних спектрів як параметрично заданих функцій, назвемо похідними спектрами. Можна утворити всього 22 різних похідних спектра – 6 двомірних та 16 одномірних. Двовимірні: амплітудно-фазовий $A_{nm}(\psi_n,\psi_m)$ або амплітудно-радіально-аксіально-фазовий $A(\Phi,\theta)$, амплітудно-просторовий $A_{nm}(x_{0n},y_{0m})$ або амплітудно-радіально-аксіальний $A(\rho,\alpha)$, радіально-амплітудно-аксіальний фазовий $\Phi(A,\theta)$, аксіально-амплітудно-радіальний фазовий $\theta(A,\Phi)$, радіально-амплітудно-аксіальний $\rho(A,\alpha)$, аксіально-амплітудно-радіальний $\alpha(A,\rho)$. Одновимірні: амплітудно-радіально-фазовий $A(\Phi)$, амплітудно-радіальний $A(\rho)$, амплітудно-аксіально-фа-зовий $A(\theta)$, амплітудно-аксіальний $A(\alpha)$, радіально-аксіальний фазовий $\Phi(\theta)$, радіально-аксіальний $\rho(\alpha)$, радіально-фазово-аксіальний $\Phi(\alpha)$, радіально-аксіально-фазовий $\rho(\theta)$ – всього 8 прямих та стільки ж обернених.

Наявність значної кількості спектрів (5 первісних та 22 похідних) дає можливість всебічно аналізувати властивості двовимірного зображення як у фур'є-області (первісні спектри), так і в площині (похідні спектри). Наприклад, амплітудно-просторовий спектр $A(x_0,y_0)$ дає розподіл гармонік в площині, радіально-аксіальний $\rho(\alpha)$ – залежність зміщення гармоніки від напрямку (діаграма направленості) і т.д. Можливо, в прикладних задачах матимуть сенс й інші комбінації наведених спектрів.

7. ГІПЕРКОМПЛЕКСНИЙ СПЕКТР

Так введений спектр має гіперкомплексний (ГК) характер [5], а саме – є тривимірним ГК числом, бо має дві фази. Легко показати, що (53) є дійсною частиною ГК спектру S=Re{Z} як інтегрального перетворення, одержаного узагальненням (12,13)

$$4\pi^2C=\iint f(x,y)F(x,y)dxdy, \quad (66)$$
$$C=a+ib+jc+ijd=A\exp[i\psi_n+j\psi_m], \quad (67)$$
$$Z=\Sigma\Sigma CF^{-1}=\Sigma\Sigma A_{nm}\exp[i(nx+\psi_n)]\exp[j(my+\psi_m)], \quad (68)$$
$$F(x,y)=\exp[-(inx+jmy)], \quad F^{-1}=1/F=\exp[inx+jmy]. \quad (69)$$

Уявні одиниці i,j мають смисл орт-векторів площини. Спектр (67) можна вважати добутком двох комплексних чисел (КЧ) з різними уявними одиницями. Зображення ГК спектру як КЧ приводить до інтерпретації як КЧ також і фази (Ф та θ даються (64))

$$C=A\exp[i\psi_n+j\psi_m]=A\exp[i\Psi], \quad \Psi=\Phi\exp[-k\theta], \quad k=ij. \quad (70)$$

Фаза Ψ описує координати двовимірної фур'є-гармоніки на площині, яка розглядається як площина КЧ.

ВИСНОВКИ

Розвинутий в роботі підхід дозволяє:

1) зберегти всю інформацію у вхідному сигналі, до якого застосовується ПФ;
2) одержати багато похідних спектрів, що дають змогу детально проаналізувати вхідний сигнал;
3) одержати просторовий розподіл амплітуд двовимірних фур'є-гармонік на площині;
4) проводити фазову фільтрацію зображення;
5) досліджувати різноманітні системи реєстрації зображень як двовимірні просторові фільтри.

ЛІТЕРАТУРА

1. Апенко М.И., Дубовик А.С., *Прикладная оптика*. – М:Наука, 1982.
2. Иванюгин В.М., Петухов С.В., Машинное стереозрение / *Зарубежная радиоэлектроника*. - № 7-9, 1993. - с. 56-66.
3. *Математическая энциклопедия*, т.4, /Гл. ред. И.М. Виноградов. - М:Сов. Энциклопедия, 1982.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А., *Справочник по математике*. - М:Наука, 1980.
5. Пытьев Ю.П., Чуличков А.И., *ЭВМ анализирует форму изображения*. – М:Знание, 1988.
6. Ланкастер П., *Теория матриц*. – М:Наука, 1978.
7. Кантор И.Л., Солодовников А.С., *Гиперкомплексные числа*. – М:Наука, 1973.