Узагальнений підхід швидкого трансформування класу Фур'є на основі згорток

І.О. Процько, В.А. Радомський

Інститут конструювання моделювання швейних виробів, м. Хмельницький, вул. Львівське шосе, 43/2, тел. (0382)557799, e-mail:khikmshv@ifocom.khmelnitskiy.ua

Узагальнений підхід для обчислення дискретного трансформування Фур'є (ДТФ) послідовностей довільного обсягу на основі циклічних згорток одержано в даній роботі. Синтез швидкого трансформування Фур'є (ШТФ) базується на декомпозиції експоненціального базису (ЕБ) ДТФ на матрицю показників і матриці знаків синуса і косинуса. Доведено еквівалентність блочно-матричних структур матріці показників і відповідних матриць знаків. В результаті, ДТФ послідовностей довільного обсягу зводиться до обчислень циклічних згорток для синусної і косинусної частини ЕБ. Це спрощує індексацію послідовностей і синтез швидких алгоритмів дискретного трансформування Фур'є або Хартлі послідовностей довільного обсягу.

ВСТУП

Існують задачі аналізу інформаційних даних, що значно ефективніше розв'язуються в області спектрального представлення. Для цього використовують ШТФ вхідного масиву даних. ШТФ є потужним інструментом, що базується на ефективних алгоритмах реалізованих спеціальними програмними або апаратними засобами.

Теорія ШТФ почала свій розвиток з появою алгоритмів типу Кулі-Тюкі [1]. Особливого поширення алгоритми даного класу одержали для значень обсягів даних рівних цілій степені двійки. Але фізична природа багатьох явищ характеризується обсягом інформації, що може мати довільну кількість даних. Тому актуальним є довільний обсяг вхідних даних ефективного обчислення ДТФ масиву даних з кількістю відліків N (1), що належать множині натуральних чисел.

Виконання ДТФ послідовностей довільного обсягу, що проводиться засобами ШТФ з обсягами інформаційних даних рівних цілій степені двійки вимагає додаткових операцій. Вони полягають в зміні частоту дискретизації вхідного інформаційного сигналу в процесі аналізу. Збільшення числа відліків за рахунок збільшення частоти дискретизації при незмінному інтервалі аналізу сигналу вимагає змінення тривалості такту роботи аналого-цифрового перетворювача. При цьому практично складно отримати значення кількості вибірок рівного цілій степені два. В більшості випадків одержані вхідні дані доповнюють нулями до кількості, що дорівнює цілій степені двійки. Розгляд питання використання підходу доповнення нулями послідовності ДТФ до необхідної (рівної цілій степені два) кількості відліків функції, дозволяє отримати інтерпольоване перетворення більшого числа компонент функції ДТФ та підвищити точність оцінки частотних піків на спектральній характеристиці [2]. Але при збільшені обсягу, зростає величина обчислювальних затрат і, відповідно, час виконання ШТФ.

Для довільного обсягу N інформаційних даних, одержано різноманітні форми узагальненого ШТФ [3,4]. Існуючі підходи мають як свої переваги, так і особливості, що полягають в специфічній складності синтезу швидкого алгоритму, для певних значень обсягів. Тому є актуальним дослідження і розвиток загальних підходів ефективного обчислення ДТФ послідовностей довільного обсягу, що дасть можливість створювати гнучкі та універсальні інструменти спектрального представлення інформації.

1. ПРИВЕДЕННЯ ОБЧИСЛЕННЯ ДТФ ДО ЦИКЛІЧНИХ ЗГОРТОК

Одним з підходів в теорії синтезу алгоритмів ШТФ є приведення обчислення до циклічних згорток. Тобто, алгоритми швидких згорток визначають ефективне обчислення ДТФ. Цей підхід ефективного обчислення ДТФ започатковано в роботі Рейдера [5]. ДТФ зводилось до обчислення циклічної згортки для послідовності обсягом, що дорівнює простому числу. В основу приведення ДТФ:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk}, \qquad (1)$$

де n,k=0,...N-1, $W=\exp(-j2\pi/N)$, до циклічної згортки покладено переіндексацію порядку вхідної послідовності x(n). Для цього застосовано первісний корінь g з відповідним показником степені, що зводить добуток індексів до додавання показників степені числа g. Тобто, обчислення ДТФ набуває виду:

$$X(g^l)=\sum_{m=0}^{N-2} x(g^{-m})W^{g^{(l-m)}} + x(0) \qquad (2)$$

що відповідає циклічній згортці без x(0) [6]. При цьому враховується, що $W^{nk} = W^{(nk)\mathrm{mod}N} =$ $= W^{g^l g^m} = W^{g^{(l+m)}}$ та $W^N=1$ Числу g відповідає первісний корінь з властивостями $g^{N-1}=1$, $g^k \neq 1$, для $0<k<N-1$.

Дальше підхід розвинуто та узагальнено в роботах Винограда [7] для послідовностей обсягом, що дорівнює простому числу та степені простого числа, та одержано значення мінімальної мультиплікативної обчислювальної складності. В цих алгоритмах використовуються для певного обсягу конкретні обчислення з використанням китайської теореми про залишки, властивостей прямого добутку матриць та алгоритмів циклічної згортки. В роботі [8] розглянуто показники елементів матриці ЕБ ДТФ, що дорівнюють (nk)mod N, при n,k=1,2,...,N-1, і виконано відносно них переставлення (переіндексацію), з метою одержання циклічної зліва матриці показників степені ЕБ ДТФ. Це дало можливість більш зручніше проаналізувати структуру матриці показників ЕБ ДТФ для довільних значень обсягів.

2. ДЕКОМПОЗИЦІЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО БАЗИСУ ДТФ

Проведемо декомпозицію та детальний аналіз елементів матриці ЕБ ДТФ (1). Функція W^{rk}_N, де r,k =0(1)N-1, періодична відносно N, тому, можна записати квадратну матрицю показників експоненціального базису порядку (N×N) у вигляді:

$$V=[v(r,k) \bmod N], \qquad (3)$$

де v(r,k) -значення елементів матриці по r=1(1)N-1 рядку та k=1(1)N-1 стовпцю. Враховуючи симетричність функцій ЕБ ДТФ W_N^l, де l=1(1)N-1, її можна повністю визначити для l=0(1)N/4, доповнюючи матрицями знаків Zs синуса і Zc косинуса [9], при цілих N, кратних 4-ом, і для парних N , що є дільниками 360 :

$$V=[v(r,k) \bmod (N/4)], \quad r,k=1(1)(N/4), \qquad (4)$$

для решти N, (непарних, парних не кратних 4 і парних не дільників 360) визначаємо при l=0(1){N/2} :

$$V = [v(r,k) \bmod (N/2)], \quad r,k=1(1)\{N/2\}, \qquad (5)$$

при N-непарному, береться ціла частина від ділення {N/2}. Порядок матриць (4,5) при цьому зменшується.

Матриці знаків синуса Zs і косинуса Zc формуються на основі елементів матриці (3) і визначаються за нерівностями:

$$Zs[r,k]=\begin{cases} +1, & \text{якщо } v(r,k)< N/2 \\ -1, & \text{якщо } v(r,k)> N/2 \ ; \end{cases} \qquad (6)$$

$$Zc[r,k]=\begin{cases} +1, & \text{якщо } 3N/4<v(r,k)<N/4 \\ -1, & \text{якщо } N/4<v(r,k)<3N/4 \ , \end{cases} \qquad (7)$$

де r,k=1(1)N/4 для (4) і r,k=1(1){N/2} для (5).

На рис. 1 показано розміщення симетрії значень матриць знаків синуса, косинуса, де для Zs - -антисиметричне відображення значень синуса; для Zc + - симетричне відображення значень косинуса; для Zs ▬ -антисиметричне відображення значень парних лінійок і парних стовпців матриці значень знаків синуса; для Zc ▬ - антисиметричне відображення значень непарних лінійок і непарних стовпців матриці значень знаків косинуса.

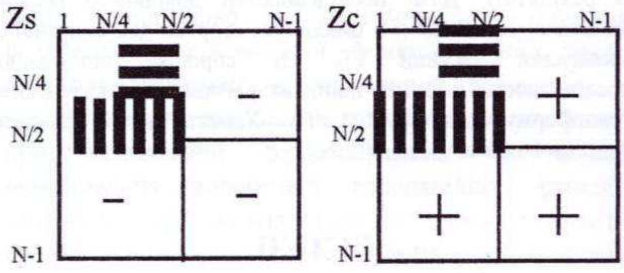

Рис.1. Симетричність розміщення елементів у матрицях знаків Zs синуса та Zc косинуса.

Аналіз одержаних матриць V (4,5) показників ЕБ ДТФ, що містять цілі числа, у випадку для N простого, показує, що матриця є нормалізований латинський квадрат. В інших випадках, довільних значень обсягів N, з матриці V (4,5) може бути виділений набір латинських квадратів, де кожен одержаний квадрат не містить елементів інших квадратів.

Визначення матриць показників ЕБ ДТФ у випадку довільного обсягу вимагає затрат часу при обчисленні за формулами (4,5) для кожного конкретного значення обсягу. Тому ефективніше формувати матриці показників за допомогою переставлення елементів кожного наступного рядка матриці на основі попереднього. Для цього знайдено форму підстановки, що визначається на основі елементів першого та другого рядка квадратної матриці показників. Підстановку можна описати за допомогою циклічного розкладу, який характеризується числом циклів циклічного розкладу $P(z)=(z_1)(z_2)...(z_i)$, що є конкретним для кожного довільного значення обсягу. Наприклад, для обсягу N=17, P(z)=(1 2 4 8)(3 6 5 7); N=30, P(z)=(1 2 4 7)(3 6) (5); N=44, P(z)= (1 3 9 5 7)(2 4 8 6 10); N=64, P(z)=(1 3 9 5 15 13 7 11)(2 6 14 10)(4 12)(8).

Отже, сформовані Vp матриці показників за циклічним розкладом підстановки P(z) визначають структури матриць показників степені ЕБ ДТФ послідовностей довільного обсягу і відповідні еквівалентно-структурні матриці знаків Z'c, Z's, які в сукупності становлять цілісність ЕБ ДТФ. Під еквівалентно-структурними матрицями розуміються матриці одного порядку з однаковими властивостями, що складаються з різних елементів, і містять відповідні підматриці з однаковими порядками та властивостями.

Розглянемо структуру, сформованих за циклічним розкладом підстановки, матриць показників Vp степені ЕБ ДТФ послідовностей довільного обсягу та відповідних матриць знаків Z's синуса і Z'c косинуса, що містять елементи ±1. Кожен одержаний квадрат, що побудований на основі підстановки z_i, з циклічного розкладу P(z), містить елементи рівні між собою розміщені паралельно бічній діагоналі v[i,j]=v[k,l], при i+j=k+l, де $i,j,k,l \in \{1,2,..., n\}$, $v[i,j] \in Vp$ або рівні всі елементи симетрично розміщені відносно головної діагоналі.. Тобто, такі квадратні матриці називаються Ганкелевими (Hankel), що повністю визначаються своїм першим рядком та останнім стовпчиком. Окрім того, у даної Ганкелевої матриці Vp кожен наступний рядок одержаний з попереднього циклічним зсувом вліво. Тобто, Ганкелева матриця повністю визначається своїм першим рядком і такі матриці називають ліво-циркулянтними або циклічними зліва.

Можна сформулювати на основі декомпозиції ЕБ ДТФ (3-7) для відповідних косинусних і синусних частин теорему еквівалентності структур матриці показників степені і матриці знаків.

Теорема. Для квадратних матриць показників степені (5) і знаків косинусу (7) порядку $\{N/2\}\times\{N/2\}$, обчислених на основі періодичності та симетрії ЕБ ДТФ, а для матриці показників степені (3) і відповідної матриці знаку синуса (6) порядку $\{N\times N\}$, обчислених на основі періодичності, та переставленні рядків і стовпців за допомогою підстановок з циклічного розкладу, існує еквівалентність структур для довільного обсягу N.

Доведення. Для взаємозв'язку елементів декомпозиції ЕБ ДТФ необхідні аналогічні дії по переставленню рядків і стовпців, у відповідність до матриці Vp, над матрицями (6,7) знаків Z's синуса і Z'c косинуса. Так, як значення величин $\cos(2\pi n/N)$ для n=0(1)N-1 експоненціального базису ДТФ, рівномірно розподілених на відрізку $(0,2\pi)$, симетричні відносно осі N/2, як для абсолютних величин значень косинуса, так і для їх знаків. Тому достатньо для косинусної частини розглядати елементи декомпозиції Vp та Z'c і одержані їхні властивості для порядку $\{N/2\}\times\{N/2\}$, на відміну від антисиметричної функції $\sin(2\pi n/N)$ для n=0(1)N-1 відрізка $(0,2\pi)$ властивості еквівалентності структур, якої вірні для порядку $\{N\times N\}$, обчислених на основі періодичності даної функції.

3. ОБЧИСЛЕННЯ ДТФ НА ОСНОВІ ПРОВЕДЕНОЇ ДЕКОМПОЗИЦІЇ

Одержана структура матриць показників степені Vp і відповідних матриць знаків задає процедуру (рис.2) проведення обчислення ДТФ послідовностей довільного обсягу за допомогою циклічних згорток. При цьому необхідно застосовувати швидкі алгоритми згорток [6], що і визначатимуть основні обчислювальні затрати даного трансформування.

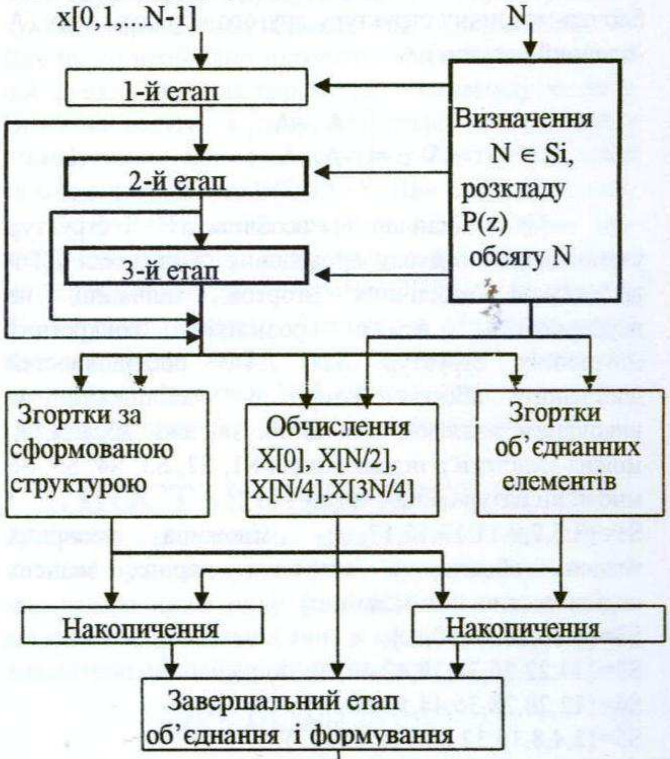

Рис.2. Обчислення ДТФ послідовностей довільного обсягу.

На початковому етапі проводиться групування (переіндексація) вхідних даних, що визначається циклічним розкладом підстановки. Одночасно можуть визначатись коефіцієнти косинусних і синусних складових ЕБ ДТФ, що приймають участь в операціях згортки. Для косинусної частини проводиться групування вже об'єднаних вхідних даних:

$$x_c(i) = x(i) \pm x(N-1), \qquad i=1(1)\{N/2\}-1, \quad (8)$$

що може виконуватись в один-три етапи. На основі сформульованої теореми за одержаним циклічним розкладом підстановки матриця показників степені Vp ЕБ ДТФ послідовностей довільного обсягу і відповідна матриця знаку Z'c, Z's, розбиваються на еквівалентні блочно-матричні структури. Вони можуть визначати додаткові об'єднання даних та обсяг і кількість циклічних згорток необхідних для проведення обчислення. Так, варто зауважити, для парних значень обсягів перетворення ДТФ матриця показників степені Vp для косинусної і синусної частин складатиметься з підматриць Vo, Ve і матиме вид:

$$Vp = \begin{bmatrix} Vo & Ve \\ Ve & Ve \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

що вимагає додаткових об'єднань даних. Важливо, що для синусної частини ЕБ ДТФ порядку (N×N) циклічні зліва підматриці містять асиметричну блочно-матричну структуру другого порядку виду (А -блочний елемент):

$$V'p = \begin{bmatrix} A & -A \\ -A & A \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Ці основні особливості структур узагальненого підходу проведення обчислення ДТФ на основі циклічних згорток, звичайно, не перекривають всього розмаїття конкретних матричних структур для ДТФ послідовностей довільного обсягу. Тому ці особливості, за виконаним аналізом для цілих значень обсягів N, можна виділити в підмножинах S1, S2, S3, S4, S5, S6 множини натуральних чисел.

S1={3,5,7,9,11,13,15,17,...}- множина непарних значень обсягів, а множина парних значень поділяється на підмножини:

S2={6,10,18,30,90,...},

S3={14,22,26,34,38,42,46,50,58,...},

S4={12,20,28,36,44,52,60,...}.

S5={2,4,8,16,32,64,128,256,...}.

S6={24,40,48,56,72,80,88,96,104,...}.

Наприклад, для обсягів, що належать підмножині S5, елементи якої дорівнюють цілій степені двійки, легко подати кількість згорток s для косинусної частини на основі даного підходу у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1.

N	8	16	32	64	128	...
s	1	4,1	8,4,1	16,8,4,1	32,16,8,4,1	
		1	4,1	8,4,1	16,8,4,1	
			1	4,1	8,4,1	...
				1	4,1	
					1	

На завершальному етапі на основі одержаної матричної структури, об'єднуємо з попередніх етапів одержані значення згорток і компонуючи дійсні та уявні частини, проводимо формування вихідних значень дискретних коефіцієнтів Фур'є або Хартлі.

ВИСНОВКИ

В роботі показано, як на основі переставлення елементів вхідної послідовності, що визначається на основі перших двох рядків матриці показників (3), обчислюється ДТФ за допомогою алгоритмів згортки. Визначення переставлення не потребує спеціальних обчислень і для обсягів N, N/2 - простих чисел може формуватись елементарним відбором елементів натурального ряду. Використання циклічного розкладу підстановки P(z) приводить до однотипового підходу проведення організації обчислення ДТФ послідовностей довільного обсягу. Окреме проведення обчислень для косинусної та синусної частин ЕБ дозволяє розпаралелювати процес обчислення і визначати не тільки ДТФ, але і дискретне перетворення Хартлі послідовностей довільного обсягу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Cooley, J.W., J.W. Tukey, An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series, Math. Comp. 19, 1965, p.297-301.

2. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы: Пер. с англ - М.: Мир, 1982. -428 с.

3. Ryszard Stasinski, The techniques of the Generalized Fast Fourier Transform Algorithm IEEE Transactions on Signal Processing, vol.39, NO. 5, MAY 1991, p.1058-1069

4. Сверлик М.Б., Троянский А.В. Обобщенное матричное описание алгоритма БПФ. Радиоэлектроника №7, 1995, с.27-33

5. C.M.Rader, Discrete Fourier transform when the number of data samples is prime. Proc.IEEE 56, 1968, p.1107-1108.

6. Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов: Пер. с англ.-М.: Радио и связь, 1983. -264с.

7. S. Winograd, On cumputing the discrete Fourier transform. Math.Comput. 32, 1978, p.175-199.

8. Ш. Зохар, Алгоритм Винограда для дискретного преобразования Фурье. В кн.: Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений/ Под. ред. Т.С. Хуанга. Пер. с англ. -М.:Радио и связь, 1984. -224 с.

9. Prots'ko I.E. An algorithm for computing the discrete Fourier transform.//Proceedings of LSPIC-90. -Riga, april 22-26, -1990. -P.123-127.