

# РЕСТАВРАЦІЯ ОБРАЗІВ У ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНО-АДАПТИВНОЇ УМОВНОЇ ДЕКОНВОЛЮЦІЇ

КОРОЛЬОВ В.Ю.

Національний Технічний Університет України /КПІ/, радіотехнічний факультет, кафедра теоретичних основ радіотехніки, м. Київ 252056, вул. Політехнічна 12, т. 441-12-71

Розглядається новий алгоритм адаптивної лінійної фільтрації у частотній області з локальною регуляризацією. За критерій правильності реставрації прийнято мінімальне середньоквадратичне відхилення оцінки від початкового образу та неперевикнення енергії шума у кожній відновленій трансформанті.

## ВСТУП

Реставрація образів — це науковий напрям по розробці методів та засобів компенсації спотворень, що вносяться у зображення в процесі його формування різними системами та джерелами. Значна кількість систем реєстрації зображень мають лінійні інваріантні до зсуву характеристики. Математична модель такої системи — це двомірна згортка [1,2]:

$$g(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f(x, y) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta + v(x, y), \quad (1)$$

де  $g(x, y)$  — спотворене зображення;  $h(x, y)$  — імпульсна характеристика системи;  $f(x, y)$  — початковий “ідеальний” образ;  $v(x, y)$  — невідома реалізація шуму.

## 1.РЕСТАВРАЦІЯ В ОБЛАСТІ КООРДИНАТ

Після процедури дискретизації модель (1) набуває вигляду:

$$G = HF + V, \quad (2)$$

де  $G$  — вектор-стовпець дискретних відліків образу  $g(x, y)$ , послідовно зчитаний по стовцях розміром  $M^2 \times 1$  (для спрощення позначень приймемо, що образи квадратні  $M \times M$ );  $F$  — вектор-стовпець вхідного сигналу  $f(x, y)$  розміром  $M^2 \times 1$ ;  $H$  — матриця конволюції розміром  $M^2 \times M^2$ ;  $V$  — вектор-стовпець невідомої реалізації шуму.

В результаті розв’язку задачі отримують оцінку  $f_0(x, y)$ , яка мало відрізняється від початкового образу по деякому апріорно заданому критерію точності на основі  $g(x, y)$ ,  $h(x, y)$  та статистичних характеристик шуму  $v(x, y)$ . Якщо таким критерієм є мінімум середньоквадратичного відхилення оцінки початкового зображення від його оцінки  $F_0$  та обмеження на величину дисперсії шуму, то розв’язок задачі (2) набуває вигляду [1,2]:  $F_0 = (H^T H + \alpha C^T C)^{-1} H^T G$ , де  $C$  — мат-

риця регуляризуючого оператора [3] оцінки  $F_0$  розміром  $M^2 \times M^2$ , а  $\alpha$  — параметр регуляризації. Розмір матриці  $(H^T H + \alpha C^T C)^{-1}$  (зі змінним емпірично оптимізуємим параметром  $\alpha$ ), яку необхідно обертати на кожній ітерації складає  $M^2 \times M^2$ . Для телевізійного образу форматом  $1024 \times 1024$  пікселей  $M^2 > 10^6$ . Складність обертання такої матриці можна оцінити по кількості операцій множення-ділення, кількість яких  $(M^2)^3 > 10^{18}$ . Зрозуміло, що отримати розв’язок на серійних ПЕОМ середньої швидкодії у прийнятних часових інтервалах неможливо.

## 2.РОЗВ’ЯЗОК В ОБЛАСТІ ПРОСТОРОВИХ ЧАСТОТ

Суттєво скоротити кількість обчислень дозволяє перехід в область трансформант Фур’є з використанням теореми про згортку оригіналів для (2). В цьому випадку модель спотворення для кожної спектральної складової операндів в (2) буде

$$G(m, n) = H(m, n)F(m, n) + v(m, n) \quad (3)$$

де  $G(m, n)$  та  $F(m, n)$  — дискретне перетворення Фур’є (ДПФ) від спотвореного  $g(x, y)$  та початкового  $f(x, y)$  образів;  $H(m, n)$  — ДПФ від імпульсної характеристики реєструючої системи  $h(x, y)$ ;  $v(m, n)$  — ДПФ від невідомої реалізації шуму. Знайдемо оцінку  $F_0(m, n)$  початкового образу  $F(m, n)$ . За критерій вірності реставрації приймемо мінімальне середньоквадратичне відхилення оцінки від початкового образу:  $\sum_m \sum_n |F(m, n) - F_0(m, n)|^2$  та не перевищення енергії  $\epsilon$  початкового шуму  $v(m, n)$  в оцінці  $F_0(m, n)$ . Такий підхід приводить до системи рівнянь виду [1,2]:

$$\left\{ \sum_m \sum_n |G(m, n) - H(m, n)F(m, n)|^2 = \epsilon \quad (4a) \right.$$

$$\left. \sum_m \sum_n |C(m, n)F(m, n)|^2 \rightarrow \min \quad (4b) \right\}$$

де (4a) — умова гладкості розв’язку,  $C(m, n)$  — регуляризуючий оператор, що реалізує цю умову; (4b) — умова обмеженості дисперсії шуму у розв’язку. Методи визначення енергії шуму наведені в [4].

Таким чином, розглянута проблема звелась до задачі оптимізації — класичної задачі на умовний екст-



ремум, яку можна розв'язувати за методом множників Лагранжа. Отже, умова (4а) — це цільова функція, а умова (4б) — допустима множина розв'язка. Для того, щоб розв'язати систему рівнянь (4) побудуємо функцію Лагранжа

$$L(F_0(m, n)) = \sum_m \sum_n |C(m, n) F_0(m, n)|^2 + \dots \\ \dots + \lambda \left[ \sum_m \sum_n |G(m, n) - H(m, n) F_0(m, n)|^2 - \epsilon \right],$$

де  $\lambda$  — множник Лагранжа. Оскільки, коефіцієнти  $G(m, n)$ ,  $F_0(m, n)$  та  $H(m, n)$  — комплексні числа, то мінімум функції Лагранжа будемо шукати, прирівнюючи нулю частинні похідні від неї за дійсною та уявною частинами  $F_0(m, n)$  [8]. В результаті отримуємо:

$$\frac{\partial L[F_0(m, n)]}{\partial \text{Re}[F_0(m, n)]} = \sum_m \sum_n 2 \text{Re}[F_0(m, n)] C(m, n)^2 + \dots \\ \dots + \lambda \sum_m \sum_n [-G(m, n) H^*(m, n) - H(m, n) G^*(m, n) - \dots \\ \dots - 2 \text{Re}[F_0(m, n)] H(m, n)^2] = 0 \\ \frac{\partial L[F_0(m, n)]}{\partial \text{Im}[F_0(m, n)]} = \sum_m \sum_n 2 \text{Im}[F_0(m, n)] C(m, n)^2 + \dots \\ \dots + \lambda \sum_m \sum_n [jG(m, n) H^*(m, n) - jH(m, n) G^*(m, n) - \dots \\ \dots - 2 \text{Im}[F_0(m, n)] H(m, n)^2] = 0$$

Розділимо останню частинну похідну на  $-j$ , складемо її з першою. Оскільки система функцій Фур'є є власним базисом для лінійної системи, то система рівнянь буде виродженою і її розв'язок знаходиться з алгебраїчного рівняння:

$$2 \{ \text{Re}[F_0(m, n)] + j \text{Im}[F_0(m, n)] \} C(m, n)^2 + \dots \\ \dots + 2\lambda [-G(m, n) H^*(m, n) - \dots \\ \dots - \{ \text{Re}[F_0(m, n)] + j \text{Im}[F_0(m, n)] \} H(m, n)^2] = 0$$

Позначимо:  $\alpha = -\frac{1}{\lambda}$ . Після зведення подібних отримуємо:

$$F_0(m, n) = \frac{G(m, n) H^*(m, n)}{|H(m, n)|^2 + \alpha |C(m, n)|^2} \quad (5)$$

Виділимо з (5) вираз для реставруючого лінійного фільтра:

$$K(m, n) = \frac{H^*(m, n)}{|H(m, n)|^2 + \alpha |C(m, n)|^2} \quad (6)$$

Якщо відсутня апріорна інформація про поведінку енергетичних спектрів початкового зображення та шуму, то на практиці використовують тихонівські регуляризуючі множники зі стабілізаторами задачі вида  $|C(m, n)|^2 = m^{2p} + n^{2p}$ ,  $p$  — натуральне число. Недоліком такого підходу, як буде показано далі, є надмірне згладжування дрібних деталей, тобто дефокусування образу без процедури підбору параметра  $\alpha$  [3,4].

## 2.1. ПОБУДОВА РЕГУЛЯРИЗУЮЧОГО ОПЕРАТОРА В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ ЗА МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Розглянемо інший підхід до побудови регуляризуючого оператора  $C(m, n)$  в (4) — згладжування за методом найменших квадратів (МНК). Можна показати [4,5], що всереднення емпіричних даних за МНК за допомогою прямих ліній у двовірному випадку в частотній області приводить до розділимого КІХ фільтра:

$$C(m, n) = \frac{\sin\left(\frac{N_x}{N_{tx}} \pi m\right)}{N_x \cdot \sin\left(\frac{\pi m}{N_{tx}}\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{N_y}{N_{ty}} \pi n\right)}{N_y \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{N_{ty}}\right)}$$

Де  $N_x, N_y$  — кількість точок, в околицях яких проводиться згладжування;  $N_{tx}, N_{ty}$  — загальна кількість точок; індекси  $x, y$  означають напрям відповідної просторової частоти  $m$  та  $n$ . Чисельні експерименти показали, що при  $N_x = N_{tx} - 1$  (у "згладжуванні" значення в одній точці використовується інформація з усіх інших) використання громіздких формул усереднення за допомогою парабол другої та четвертої степені не приводить до покращення результату. Крім того, використання пропонуемого оператора замість тихонівського дозволяє отримувати негіршу якість реставрації образу ( $\alpha=1$ ) без процедури підбору параметрів регуляризації при еволюційній фільтрації [3].

## 2.2. ПРОЦЕДУРА ВИБОРА ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ

Розглянемо процедуру вибору параметра регуляризації  $\alpha$ . Теоретично знайти параметр регуляризації  $\alpha$  можна підстановкою розв'язка задачі (5) в систему рівнянь (4). Знайдене значення  $\alpha$  буде оптимальним у середньоквадратичному сенсі. Так при малих значеннях  $\alpha$  фільтр  $K(m, n)$  (6) вироджується в інверсний фільтр, тобто фільтрація виконується без урахування шумової компоненти, що приводить до значного зашумлення образу замість відновлення. Великі значення  $\alpha$ , навпаки, призводять до повного подавлення складової  $|H(m, n)|^2$  у знаменнику (6), тобто до сильного дефокусування зображення. Крім того, відомо, що середньоквадратичний критерій оптимальності розв'язку системи (4) не співпадає з психовізуальним. Тому на практиці параметр глобальної регуляризації  $\alpha$  емпірично добирається оператором на основі суб'єктивних критеріїв якості відновлення образу. Покращення якості реставрації спотвореного образу, зрозуміло, можливе вибором частотнозалежного параметра регуляризації  $\alpha$ . Ідея визначення  $\alpha$  окремого для кожної трансформанти Фур'є, тобто переходу від процедури глобальної регуляризації до локальної на основі додаткової інформації подана в монографії [7]. Для того, щоб побудувати алгоритм реставрації, оптимальний для конкретного образу [8],



в даній роботі пропонується використати інформацію про енергетичний спектр шуму  $W(m,n)$ . Тоді перше рівняння системи (4) можна переписати у вигляді:

$$\sum_m \sum_n |\hat{G}(m,n) - \hat{H}(m,n)F_0(m,n)|^2 = \sum_m \sum_n W(m,n) \quad (8).$$

Позначимо:  $N(m,n) = \sqrt{W(m,n)}$ . Тоді з (6) та (8) легко отримати:

$$\alpha(m,n) = \frac{|\hat{C}(m,n)|^2 [\hat{G}(m,n) - N(m,n)]}{|\hat{G}(m,n)|^2 N(m,n)}.$$

Результати обчислень (початкове зображення, спотворений образ, відновлений еволюційним фільтром [3], реставрований за пропонуємим методом при  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = \alpha(m,n)$ , інверсна фільтрація) приведені на рис. 1 – 6 відповідно. Прийнято, що імпульсна характеристика системи  $h(x,y) = e^{-(x^2+y^2) \cdot 10^{-2}}$ , а відношення сигнал/завада =  $10^3$ . Видно, що описаний алгоритм зваженої фільтрації забезпечує кращу якість фільтрації високочастотних компонент образа ніж відомі підходи. Для порівняльної ілюстрації можливостей алгоритма на рис. 7 – 12 наведені результати обробки одномірному сигналу: початковий сигнал, спотворений, результат відновлення еволюційним фільтром [3], реставрований за методом умовної деконволюції  $\alpha = \text{const}$ , відновлений за описаним алгоритмом при  $\alpha = \alpha(\omega)$ , відновлений за методом інверсної фільтрації. При імпульсній характеристиці системи  $h(t) = e^{-t^2 \cdot 10^{-2}}$  та відношенні  $C/3 = 10^2$  коефіцієнти  $\lambda(\omega)$  наведені на рис. 13, на рис. 14 – зворотні величини  $\alpha(\omega) = \lambda^{-1}(\omega)$ . Обернене перетворення Фур'є від  $\alpha(\omega)$  наведене на рис. 15.



Рис. 1. Початковий образ.



Рис. 2. Спотворений образ.



Рис. 3. Відновлення еволюційним фільтром.



Рис. 4. Відновлення за методом умовної деконволюції.



Рис. 5. Реставрація за методом локально-адаптивної умовної деконволюції



Рис. 6. Результат інверсної фільтрації.

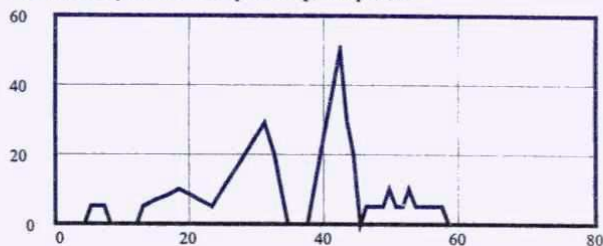


Рис. 7. Початковий сигнал.

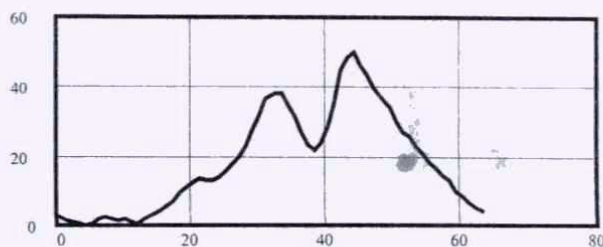


Рис. 8. Спотворений сигнал.



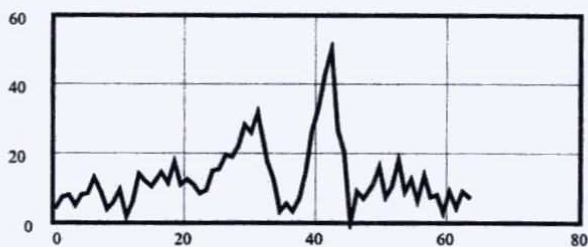


Рис. 9. Відновлення еволюційним фільтром.

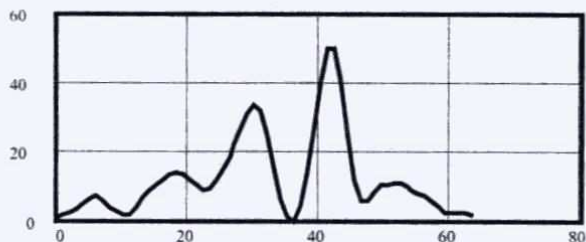


Рис. 10. Відновлення за методом умовної деконволюції.

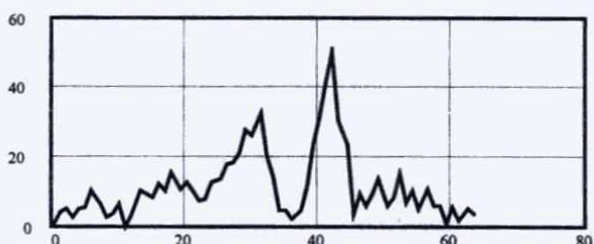


Рис. 11. Реставрація за методом локально-адаптивної умовної деконволюції.

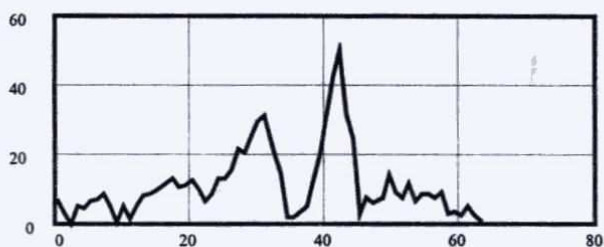


Рис. 12. Результат інверсної фільтрації.

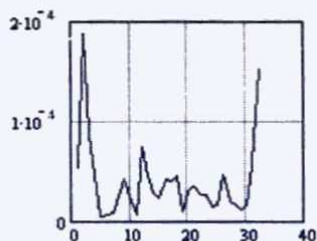


Рис. 13. Графік коефіцієнтів регуляризації  $\lambda(\omega)$ .

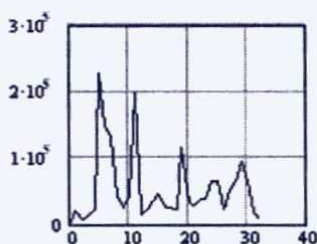


Рис. 14. Графік коефіцієнтів регуляризації  $\alpha(\omega)$ .

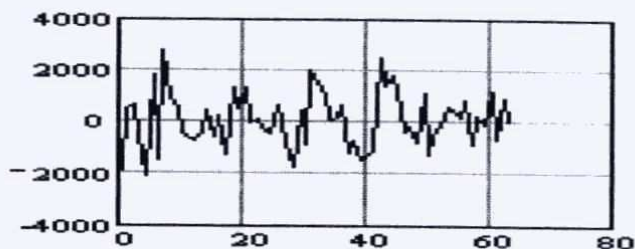


Рис. 15. Графік оберненого перетворення Фур'є для коефіцієнтів регуляризації  $\alpha(\omega)$ .

## ВИСНОВКИ

Описан новий алгоритм локально-адаптивної реставрації образів у частотній області. Запропоновано нові способи побудови регуляризуючого оператора та визначення параметра локальної регуляризації. В результаті чого покращилась якість відновлення дрібних деталей спотвореного образу порівняно з широко відомими підходами. Описаний алгоритм відновлення зображень був реалізований на ПЕОМ РІ-233 ММХ. Час на реставрацію образу формату 181x217 завдяки використанню алгоритма швидкого перетворення Фур'є та теореми про згортку в частотній області склав менше однієї хвилини.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Рибін О.І., Корольов В.Ю. Реставрація образів методом умовної деконволюції в області просторових частот // Вісник Технологічного університету Поділля. — 2000. — №1. — С.145-147.
2. Рыбин А.И., Корольов В.Ю. Алгоритм условной деконволюции изображений в частотной области // Радиоэлектроника. — 2000. — № 4. — С. 51-55. (Изв. высш. учеб. заведений).
3. Василенко Г.И., Тараторин А.М. Восстановление изображений. — М.: Радио и связь, 1986. — 304 с., ил.
4. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. — М.: Сов. радио, 1979. — 312 с., ил.
5. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры: Пер. с англ./ Под ред. А.М. Трахтмана. — М.: Сов. радио, 1980. — 224 с., ил.
6. Ярославский Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. — М.: Радио и связь, 1987. — 296 с., ил.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1987. — Проблемы науки и технического прогресса. — 160 с., ил.
8. Виткус Р.Ю., Ярославский Л.П. Адаптивные линейные фильтры для обработки изображений // Адаптивные методы обработки изображений. /Под. ред. В.И. Сифорова, Л.П. Ярославского. — М.: Наука, 1988. — 248 с., ил. С. 6-35.