МНОЖИНИ ПРИНАЛЕЖНОСТІ В ЗАДАЧАХ КЛАСИФІКАЦІЇ СИГНАЛІВ.

М.Ф.Кириченко,
Інститут кібернетики НАНУ,031876,Київ,проспект академіка Глушкова,40
Тел.(044)266-3725,E-mail kir@dept115.icyb.kiev.ua
Роман Куц (США),Yale University,USA
М.П.Лепеха,Київський національний університет, факультет кібернетики

АНОТАЦІЯ.

У даній роботі подані нові математичні засоби для розробки ефективних алгоритмів класифікаці і розпізнавання просторових об'єктів. Вони базуються на побудові в просторі ознак множин належності об'єктів до того або іншого класу, а також умов неперетину цих множин. Запропоновані засоби використовується для розпізнавання просторових об'єктів на підставі аналізу ультразвукових ехо-сигналів.

Умови класифікації сигналів є достатньо конструктивними, допускають побудову ефективних алгоритмів, а також програмних засобів для перевірки розділимості множин у просторі ознак і розпізнавання об'єктів. Результати роботи є розвитком ідей, поданих у раніше опублікованих статтях авторів [3]-[5].

ВСТУП.

Запропоновані в роботі математичні засоби розвиваються з метою використання їх при створенні мобільних сонарних систем, що були б здатні розпізнавати просторові об'єкти на підставі прийнятих ультразвукових ехо-сигналів. Ці засоби базуються

- на виявленні в ультразвукових ехо-сигналах характерних для даного класу розпізнаваних об'єктів групи ознак,
- формуванні в просторі виділених ознак для кожного з об'єктів спеціальних множин належності у формі канонічних геометричних тіл (еліпсоїди, паралелепіпеди і т.п.),
- формулюванню умов розділимості множин приналежності між собою.

Утворені множини приналежності повинні бути достатньо компактно натягнуті на множину характерних точок кожного об'єкта. Геометричне тіло з достатньо компактним включенням у себе точок множини ознак одного об'єкта будемо називати контейнером. Канонічність форми контейнерів дозволяє в аналітичній формі записати умови неперетину тих контейнерів, що відносяться до різних об'єктів розпізнавання. Постановки задач класифікації й ідеї побудови контейнерів будемо ілюструвати на практичній задачі розпізнавання за даними ультразвукової локації просторових об'єктів [4]-[5].

Математичні результати статті є фактично розвитком ідеї розкладу по Каруннену-Лоеву з використанням в задачах класифікації просторових об'єктів [2].

1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ.

Як вхідна інформація в задачі розпізнавання N об'єктів розглядаються сигнали $x_j(t),\ j=\overline{1,M}$, $t\in[0,T]$. Кожний сигнал $x_j(t),\quad t\in[0,T]$ перетворюється в вектор $a(j)\in R^m$ простору ознак, який будемо іменувати *зображенням об'єкта* в просторі ознак. Множину всіх векторів $a(j),\ j=1,n$ для деякого конкретного об'єкта будемо позначати

$$\Omega_a=\left\{a: a=a(j),\ j=\overline{1,n}\right\} \tag{1}$$

із матрицею

$$A=\big(a(1)\ \vdots\ \ldots\ \vdots\ a(n)\big). \tag{2}$$

Задача 1. Визначення центру множини Ω_a.

Визначити деяку точку $\overline{a}\in R^m$, що будемо називати центром для Ω_a в ефективному для наступного розпізнавання об'єктів виді. Звична, але не завжди ефективна форма представлення центру має вигляд

$$\overline{a}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a(j) \tag{3}$$

Позначимо $\widetilde{a}=a(j)-\overline{a}$, $\widetilde{A}=\big(\widetilde{a}(1)\ \vdots\ \ldots\ \vdots\ \widetilde{a}(n)\big)$.

Задача 2. Конструювання множин приналежності (контейнерів).

Сформувати множину $\Omega_a(p)$ з достатньо простим математичним описом (структурою), що задовольняє умові приналежності

$$\Omega_a(p)\supset\Omega_a, \tag{4}$$

де p - деякий параметр, що визначає тип цієї множини.

Звичайні форми для множин приналежності: многомірний еліпсоїд, циліндричний еліпсоїд, паралелепіпед і їхні об'єднання при відповідним чином вибраних центрах.

Задача 3. Умова неперетину для множин приналежності.

Сформулювати необхідні і достатні умови неперетину для різноманітних множин приналежності Ω_a. Сформулювати тільки достатні умови неперетину контейнерів для різноманітних множин, але в зручній для використання формі.

Задача 4. Оптимальний вибір простору ознак для робастності умов неперетину контейнерів.

Розробити алгоритм вибору простору ознак для оптимізації відстаней між контейнерами для різноманітних множин Ω_a.

Задача 5. Правила класифікації об'єктів.

Сформулювати правило класифікації об'єктів із використанням контейнерів і умов їхнього неперетину.

2. РОЗПОДІЛ ЗОБРАЖЕНЬ В ПРОСТОРІ ЇХ ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ.

Для конструювання множин-контейнерів і формулювання правил класифікації об'єктів у наступних розділах цієї роботи будуть використані система власних векторів у просторі ознак і підпростори, обумовлені цією системою. Тому приведемо деякі властивості власних векторів і власних значень для матриці $\widetilde{A}$. Відповідно до [1] матриця $\widetilde{A}$ має таке сингулярне представлення:

$$\widetilde{A} = \sum_{i=1}^{r} y_i x_i^T \lambda_i \ , \quad r = rank\,\widetilde{A} , \tag{5}$$

де

$$\widetilde{A}\widetilde{A}^T y_j = \lambda_j^2 y_j , \quad y_i^T y_j = \delta_{ij} , \tag{6}$$

$$\widetilde{A}^T \widetilde{A} x_j = \lambda_j^2 x_j , \quad x_i^T x_j = \delta_{ij} , \tag{7}$$

$$\widetilde{A}^T y_j = \lambda_j x_j , \quad \widetilde{A} x_j = \lambda_j y_j \tag{8}$$

$i,\ j = \overline{1,r}$, $\lambda_1^2 \geq \ldots \geq \lambda_r^2$.

Формулу (5) можна розписати в співвідношеннях по стовпчиках $\widetilde{a}(j)$ матриці $\widetilde{A}(j)$ таким чином

$$\widetilde{a}(j) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i x_{ji} , \ j = \overline{1,n} , \tag{9}$$

де $x_i^T = (x_{1i}, \ldots, x_{mi})$. Тоді

$$\widetilde{a}(j) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i y_i x_{ji} + \Delta_{js} , \quad s < r \tag{10}$$

$$\Delta_{js} = \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i y_i x_{ji} \ . \tag{11}$$

При цьому мають місце оцінки

$$\left\| \Delta_{js} \right\|^2 = \sum_{i=s+1}^{r} {\lambda_i}^2 \left| x_{ji} \right|^2 \leq \lambda_{s+1}^2 \sum_{i=s+1}^{r} \left| x_{ji} \right|^2 \leq \lambda_{s+1}^2 \tag{12}$$

згідно таким співвідношенням

$$\left(x_1 \vdots \ldots \vdots x_n \right)^T \left(x_1 \vdots \ldots \vdots x_n \right) = I_n ,$$

$$\left(x_1 \vdots \ldots \vdots x_n \right) \left(x_1 \vdots \ldots \vdots x_n \right)^T = I_n ,$$

$$\sum_{i=s+1}^{r} \left| x_{ji} \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left| x_{ji} \right|^2 = 1 .$$

3. КОНСТРУЮВАННЯ МНОЖИН ПРИНАЛЕЖНОСТІ – КОНТЕЙНЕРІВ.

Розглянемо декілька варіантів опису множин-контейнерів.

Еліптичні циліндри.

З (10), (11) і (12) випливають такі вирази для контейнерів у формі еліптичних циліндрів:

$$\Omega_a^1(s,\lambda) = \left\{ a : (a - \overline{a})^T \sum_{i=1}^{s} y_i y_i^T \lambda_i^{-2} (a - \overline{a}) \leq \alpha^2(s,\lambda), \right.$$

$$\left. \lambda_{s+1}^{-2} \left\| \left(I_m - \sum_{i=1}^{s} y_i y_i^T \right) (a - \overline{a}) \right\|^2 \leq \beta^2(s,\lambda) \right\}, \ s < r,$$

$$\alpha^2(s,\lambda) = \max_{j=\overline{1,n}} \widetilde{a}_j^T \sum_{i=1}^{s} y_i y_i^T \lambda_i^{-2} \widetilde{a}_j \leq 1 , \tag{13}$$

$$\beta^2(s,\lambda) = \max_{j=\overline{1,n}} \lambda_{s+1}^{-2} \sum_{k=s+1}^{r} x_{jk}^2 \lambda_k^2 \leq \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{k=s+1}^{r} x_{jk}^2 \leq 1$$

і

$$a_j \in \Omega_a^1(s,\lambda), \ \forall\, j = \overline{1,n} . \tag{14}$$

Якщо $s = r$, то формула (13) матиме вигляд

$$\Omega_a^1(r,\lambda) = \left\{ a : (a - \overline{a})^T \left(\widetilde{A}^+\right)^T \widetilde{A}^+ (a - \overline{a}) \leq \right.$$

$$\leq \max_{j=\overline{1,n}} e_j^T \widetilde{A}^+ \widetilde{A} e_j , \tag{15}$$

$$\left. (a - \overline{a})^T Z(\widetilde{A}^T) (a - \overline{a}) \leq \varepsilon^2 \right\}, \ \varepsilon > 0,$$

де $\widetilde{A}^+ = \sum_{j=1}^{r} x_j y_j^T \lambda_j^{-1}$, $Z(\widetilde{A}^T) = I_n - \widetilde{A}\widetilde{A}^+$,

$$a_j \in \Omega_a^1(r,\lambda), \ \forall\, j = \overline{1,n} . \tag{16}$$

Варто зауважити, що

$$\lambda_j^2 = \sum_{i=1}^{n} (\widetilde{a}_i^T y_j)^2 , \ j = \overline{1,r} \tag{17}$$

і λ_j^2 має тенденцію зростати з порядком n.

Для тих випадків, коли при $s << n$ виконуються умови

$$s \max_{i=1,n} \left|\widetilde{a}_i^T y_j\right| < \sum_{i=1}^{n} (\widetilde{a}_i^T y_j)^2, \quad j = \overline{1,s},$$

множина-контейнер буде мати вигляд

$$\Omega_a^1(s,d) = \left\{ a:\ (a-\overline{a})^T \sum_{i=1}^{s} y_i y_i^T d_i^{-2} (a-\overline{a}) \le s, \right.$$

$$\left. \left\| (I_m - \sum_{i=1}^{s} y_i y_i^T)(a-\overline{a}) \right\| \le d_{s+1} \right\}, \quad s < r, \quad (18)$$

де

$$d_i = \max_{i=1,n} \left|\widetilde{a}_i^T y_j\right|,$$

$$d_{s+1} = \max_{i=1,n} \left\| (I_n - \sum_{j=1}^{s} y_j y_j^T)\widetilde{a}_i \right\|, \quad j = \overline{1,s},$$

і може досягати менших розмірів ніж $\Omega_a^1(s,\lambda)$, тобто

$$\Omega_a^1(s,d) \subset \Omega_a^1(s,\lambda).$$

Відповідно при $s = r$ множина-контейнер $\Omega_a^1(r,d)$ має вигляд

$$\Omega_a^1(r,d) = \left\{ a:\ (a-\overline{a})^T \sum_{i=1}^{s} y_i y_i^T d_i^{-2} (a-\overline{a}) \le r, \right.$$

$$\left. \left\| (I_m - \sum_{i=1}^{s} y_i y_i^T)(a-\overline{a}) \right\|^2 \le \varepsilon^2 \right\}, \quad \varepsilon^2 > 0 \quad (19)$$

Тоді з побудови цих множин випливає $a_j \in \Omega_a^1(s,d)$, $a_j \in \Omega_a^1(r,d)$, $\forall j = \overline{1,n}$.

Еліпсоїди.

Із співвідношень(10) - (12) випливає така форма представлення:

$$\Omega_a^2(s,\lambda) = \left\{ a:\ (a-\overline{a})^T \left[\sum_{i=1}^{s} y_i y_i^T \lambda_i^{-2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda_{s+1}^{-2} \left(I_m - \sum_{i=1}^{s} y_i y_i^T \right) \right] (a-\overline{a}) \le \alpha^2(r,\lambda) \right\}$$

$$s = \overline{1, r-1},\ a_j \in \Omega_a^2(s,\lambda),\ j = \overline{1,n} \quad (20).$$

При $s = r$ множина-контейнер має вигляд еліпсоїда в R^m:

$$\Omega_a^2(r,\lambda) = \left\{ a:\ (a-\overline{a})^T \left[\sum_{i=1}^{r} y_i y_i^T (\lambda_i^{-2} \alpha^{-2}(r,\lambda) - \varepsilon^{-2}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varepsilon^{-2} I_m \right] (a-\overline{a}) \le 1 \right\}, \quad \varepsilon^2 > 0 \quad (21)$$

Еліпсоїдальні множини-контейнери відповідні еліптичним циліндрам (18), (19) мають таке представлення

$$\Omega_a^2(s,d) = \left\{ a:(a-\overline{a})^T \left[\sum_{i=1}^{s} y_i y_i^T (d_i^{-2} s^{-1} - d_{s+1}^{-2}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + d_{s+1}^{-2} I_m \right] (a-\overline{a}) \le 1 \right\}, \quad s = \overline{1, r-1} \quad (22)$$

$$\Omega_a^2(r,d) = \left\{ a:\ (a-\overline{a})^T \left[\sum_{i=1}^{r} y_i y_i^T (d_i^{-2} r^{-1} - \varepsilon^{-2}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varepsilon^{-2} I_m \right] (a-\overline{a}) \le 1 \right\}, \quad \varepsilon^2 > 0 \quad (23)$$

Паралелепіпеди.

Як і для еліптичних циліндрів і еліпсоїдів введемо до розгляду такий вид цих множин:

$$\Omega_a^3(r,d) = \left\{ a:\ \left|(a-\overline{a})^T y_i\right| \le d_i,\ i = \overline{1,r}, \right.$$

$$\left. \left|(a-\overline{a})^T y_j\right| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},\ j = \overline{r+1,m} \right\} \quad (24)$$

Очевидно, що

$$\Omega_a^3(r,d) \subset \Omega_a^2(r,d).$$

5. УМОВИ НЕПЕРЕТИНУ МНОЖИН КОНТЕЙНЕРІВ.

Нерівності Коші й умови неперетину множин.

Будемо використовувати нерівність Коші

$$\left(l^T a\right) \le l^T K^{-1} l a^T K a,$$

що має місце при $\forall\, l \in R^m$, $a \in R^m$ і довільній додатньо-визначеній матриці $K \in R^{m \times n}$. При цьому

$$\max_{a \in \{a:\ a^T K a \le 1\}} l^T a = \sqrt{l^T K^{-1} l} \quad (26)$$

Для двох еліпсоїдальних множин

$$\Omega_1 = \left\{ a:\ (a-\overline{a})^T K_1 (a-\overline{a}) \le 1 \right\}, \quad (27)$$

$$\Omega_2 = \left\{ a:\ (a-\overline{b})^T K_2 (a-\overline{b}) \le 1 \right\}, \quad (28)$$

де $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ - додатньо-визначені матриці, необхідне і достатня умова їх неперетину відповідно до (26) має вигляд:

$$\exists\, l \in R^m,\ \sqrt{l^T K_1^{-1} l} + \sqrt{l^T K_2^{-1} l} < l^T (b-a), \quad (29)$$

а при $l = \overline{b} - \overline{a}$ ця умова перетворюється лише в достатне, але з більш зручною для використання формою

$$\sqrt{(\overline{b}-\overline{a})^T K_1^{-1} (\overline{b}-\overline{a})} + \sqrt{(\overline{b}-\overline{a})^T K_2^{-1} (\overline{b}-\overline{a})} <$$

$$< \left\| (\overline{b}-\overline{a}) \right\|^2 \quad (30)$$

При такому представленні матриць

$$K_1 = \sum_{j=1}^{m} y_j(1) y_j^T(1) \lambda_j^{-2}(1),$$

$$K_2 = \sum_{j=1}^{m} y_j(2) y_j^T(2) \lambda_j^{-2}(2),\ \lambda_j(k) \ge \lambda_{j+1}(k),$$

$$y_i^T(k)y_j(k)=\delta_{ij},\ i,j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,2}$$

умови (29) і (30) одержують відповідно таку форму

$$\exists\, l\in R^m,\ \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(l^T y_j(1))^2\lambda_j^2(1)}+$$

$$+\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(l^T y_j(2))^2\lambda_j^2(2)}<l^T(\bar b-\bar a),$$

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[(\bar b-\bar a)^T y_j(1)\right]^2\lambda_j^2(1)}+$$

$$+\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[(\bar b-\bar a)^T y_j(2)\right]^2\lambda_j^2(2)}<\left\|\bar b-\bar a\right\|^2.$$

Для формулювання умов неперетину паралелепіпедів нерівність Коші

$$\left|l^T a\right|\le\max_{j=1,m}\left|a_j\right|\sum_{i=1}^{m}\left|l_i\right|$$

будемо використовувати у вигляді

$$\left|l^T a\right|\le\max_{j=1,m}\left|a^T y_j\right|\sum_{i=1}^{m}\left|l^T y_i\right|,\ y_i^T y_j=\delta_{ij},\ i,j=\overline{1,m},$$

при цьому

$$\max_{a\in\left\{a:\ \left|a^T y_j\right|\le 1,\ j=\overline{1,m}\right\}} l^T a=\sum_{i=1}^{m}\left|l^T y_i\right| \qquad (31)$$

Тоді для двох множин

$$\Omega_1=\left\{a:\ \left|y_j^T(1)(a-\bar a)\right|\le d_j(1),\ j=\overline{1,m}\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{a:\ \left|y_j^T(2)(a-\bar b)\right|\le d_j(2),\ j=\overline{1,m}\right\} \qquad (28)$$

необхідна і достатня умова їхнього неперетину буде такою

$$\exists\, l\in R^m,\ \sum_{j=1}^{m}\left(\left|l^T y_j(1)\right|d_j(1)+\left|l^T y_j(2)\right|d_j(2)\right)<$$

$$<l^T(\bar b-\bar a), \qquad (33)$$

а більш проста достатня умова неперетину множин (32) має форму

$$\sum_{j=1}^{m}\left|(\bar b-\bar a)^T y_j(1)\right|d_j(1)+\left|(\bar b-\bar a)^T y_j(2)\right|d_j(2)<$$

$$<\left\|\bar b-\bar a\right\|^2. \qquad (34)$$

При дослідженні умов неперетину множин типу еліптичних циліндрів будемо використовувати таку формулу

$$\max_{a\in\left\{a:\ \sqrt{\sum_{j=1}^{s}\left(a^T y_j\right)^2}\le 1,\ \sqrt{\sum_{j=s+1}^{m}\left(a^T y_j\right)^2}\le 1\right\}} l^T a=$$

$$=\sqrt{\sum_{j=1}^{s}\left(l^T y_j\right)^2}+\sqrt{\sum_{j=s+1}^{m}\left(l^T y_j\right)^2}. \qquad (35)$$

Тут для двох множин

$$\Omega_1=\left\{a:\ (a-\bar a)^T K_1(1)(a-\bar a)\le 1,\ (a-\bar a)^T K_1(2)(a-\bar a)\le 1\right\}, \qquad (36)$$

$$\Omega_2=\left\{a:\ (a-\bar b)^T K_2(1)(a-\bar b)\le 1,\ (a-\bar b)^T K_2(2)(a-\bar b)\le 1\right\},$$

де

$$K_i(1)=\sum_{j=1}^{s_i}y_j(i)y_j^T(i)\lambda_j^{-2}(i),$$

$$K_i(2)=\sum_{j=s_i+1}^{m}y_j(i)y_j^T(i)\lambda_j^{-2}(i),$$

необхідною і достатньою умовою їх неперетину буде

$$\exists\, l\in R^m,\ \sqrt{l^T K_1^+(1)l}+\sqrt{l^T K_1^+(2)l}+$$

$$+\sqrt{l^T K_2^+(1)l}+\sqrt{l^T K_2^+(2)l}<l^T(\bar b-\bar a), \qquad (37)$$

а достатня умова буде мати форму

$$\sum_{i,j=1}^{2}\sqrt{(\bar b-\bar a)^T K_i^+(j)(\bar b-\bar a)}<\left\|\bar b-\bar a\right\|^2. \qquad (38)$$

Тут

$$K_i^+(1)=\sum_{j=1}^{s_i}y_j(i)y_j^T(i)\lambda_j^2(i),$$

$$K_i^+(2)=\sum_{j=s_i+1}^{m}y_j(i)y_j^T(i)\lambda_j^2(i).$$

Умови неперетину в просторі ознак при класифікації сигналів визначаються застосуванням вище отриманих умов неперетину множин до множин-контейнерів (18)-(24).

Література

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.-М.:Наука,1967.-287 с.

2. Hiroshi Murase, Shree K. Nayar, Visual Learning and Recognition of 3-d Objects from Appearance, - International Journal of Computer Vision, 14, 5-24 (1995).

3. R. Kuc. Biomimetic sonar locates and recognizes objects. IEEE Journal of Oceanic Engineering, vol. 22 (4), 1997.

4. Кириченко Н.Ф., Куц Р.(США), Лепеха Н.П. Распознавание трехмерных объектов по ультразвуковым эхо-сигналам. //Проблеми управления и информатики.-1999.-№5.-С.110-122.

5. Кириченко М.Ф., Куц Роман (США), Лепеха М.П. Алгоритми розпізнавання об'єктів ультразвуковими сонарами. Теорія обчислень: Збірник наукових праць. Інститут кібернетики НАНУ. Київ, 1999, с.196-200