

ПРО ОДИН МЕТОД АДАПТИВНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕВНИХ СИГНАЛІВ АПРОКСИМУЮЧИМИ ІМПУЛЬСНИМИ СПЕКТРАМИ

Воронова О.С.

Відділення гібридних моделюючих та керуючих систем в енергетиці ПМЕ НАН України,
м. Київ, вул. ген. Наумова 15, т. 444-98-35

Викладено метод адаптації сітки для неперевних сигналів з довільною кількістю особливостей, який базується на апроексимуючих імпульсних спектрах (AIC). Наведено приклади застосування методу. Отримані результати порівнюються з результатами апроексимації по рівномірним сіткам.

При обробці інформації часто виникає потреба апроексимації сигналів, що є комбінацією швидко та повільно змінюючихся компонент. У випадку апроексимації таких сигналів по системі локальних базисних функцій виникає питання про вибір частоти дискретизації або, іншими словами, кроку сітки. Використання рівномірної сітки приводить або до надлишкового представлення сигналу на ділянках, де переважають компоненти, що повільно змінюються (якщо вибір кроку визначається точністю апроексимації швидких компонент), або до великих похибок в апроексимації швидко змінюючихся компонент сигналу (див. мал. 1, б).

В роботі пропонується один з алгоритмів адаптації сітки та апроексимації такого роду сигналів. Даний алгоритм спирається на особливості локально-імпульсних систем базисних функцій, а саме, системи базисних функцій, що складається з блочно-імпульсних та кусково-лінійних базисних функцій, яка є модифікацією системи запропонованої в [1, 2]:

$$v_i(t) = \sigma(t - (i-1)h - a) - \sigma(t - ih - a), \quad (1)$$

$$w_i(t) = \left(\frac{2(t-a)}{h} + 1 - 2i \right) v_i(t), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Зручність такої системи базисних функцій в тому, що по-перше, ця система є ортогональною, а по-друге, в кожній підсистемі проміжки визначення базисних функцій не перетинаються. Отже ми можемо розглядати апроексимацію сигналу на кожному інтервалі $[a + (i-1)h, a + ih]$ незалежно від решти області визначення сигналу. Дійсно, при використанні локально-імпульсних функцій (1)-(2) мі отримуємо кусково-поліноміальну апроексимацію сигналу:

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^m (X_0(i)v_i(t) + X_1(i)w_i(t)), \quad (3)$$

де X_0 та X_1 – компоненти вектора \tilde{X} спектра сигналу $x(t)$ [2]:

$$X_0(i) = \frac{1}{h} \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} x(t)v_i(t)dt = \frac{1}{h} \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} x(t)dt, \quad (4)$$

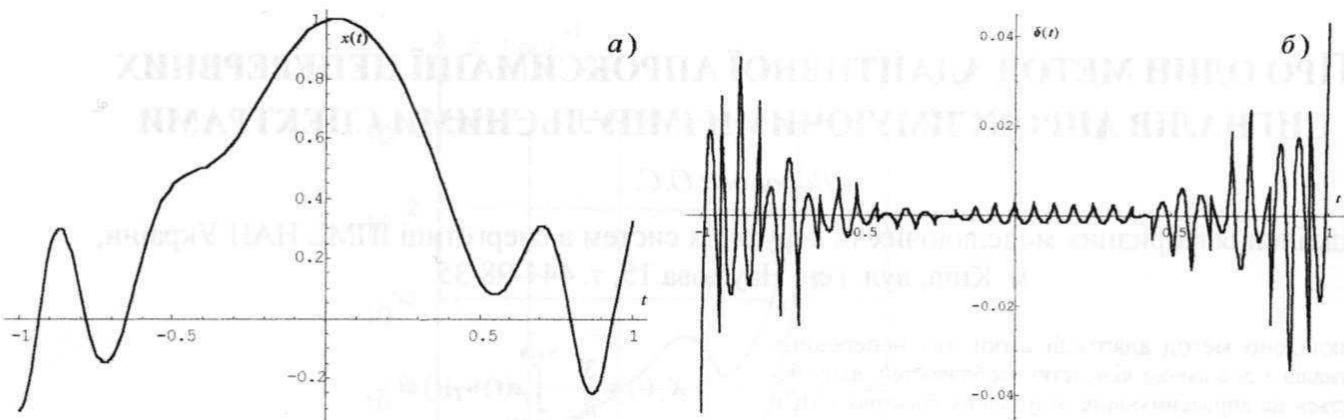
$$\begin{aligned} X_1(i) &= \frac{3}{h} \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} x(t)w_i(t)dt = \\ &= \frac{3}{h} \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} x(t) \left(\frac{2(t-a)}{h} + 1 - 2i \right) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Як можна помітити з (3), апроексимуючий поліном $x_a(t)$ фактично складається з m поліномів першої степені, кожен з яких визначено на проміжку $[a + (i-1)h, a + ih]$. Не важко переконатися, що відхилення апроексимації $x_a(t)$ від заданого сигналу на всьому інтервалі $[a, b]$ є сумаю відхилень від сигналу поліномів вигляду: $X_0(i)v_i(t) + X_1(i)w_i(t)$, де $i = 1, m$ – номер підінтервалу.

Нехай розглядається сигнал $x(t)$ на проміжку зміни аргументу $t: [a, b]$. На цьому інтервалі введемо рівномірну сітку з кроком h_0 : $\bar{\omega}_0 = \{t_j = a + ih_0, i = 1, m_0\}$. Припустимо, що середньоквадратичка похибка повинна розподілятися рівномірно, тоді можна перейти від оцінки похибки на всій області визначення до оцінки середньоквадратичної похибки на i -тому підінтервалі. При цьому на кожному інтервалі $[a + (i-1)h_0, a + ih_0]$ інтеграл середньоквадратичної похибки повинен складати ϵ/m_0 , де ϵ – задана точність. Проте, при апроексимації сигналу по рівномірній сітці $\bar{\omega}_0$ зустрічатимуться підінтервали, на яких похибки будуть значно більше (менше) заданого порогового значення (див. мал. 1, б).

Оберемо один з підінтервалів, на якому похибка більше заданого значення. Нехай для визначеності це буде проміжок $[a, a + h_0]$. Розглядаючи його як нову область визначення сигналу, що досліджується, можна ввести на ньому рівномірну сітку $\bar{\omega}_1$ з меншим кроком h_1 (скажімо, $h_1 = h_0/2$) та отримати на ній більш точну апроексимацію. Оцінивши відхилення на кожному підінтервалі сітки $\bar{\omega}_1$, можна знову виділити ділянки, на яких похибка перевищує задану точність та застосувати до них запропоновану процедуру.

Таким чином, ми отримуємо ітераційний процес покращання сітки. Якщо на кожній ітерації ми будемо модифіковувати сітку, замінюючи ті ділянки сітки $\bar{\omega}_{j-1}$, на яких похибка перевищує порогове значення, більш точними сітками $\bar{\omega}_j$, то отримаємо нерівномірну сітку $\bar{\omega}$, на кожному підінтервалі якої апроексимація відхиляється від сигналу у припустимих межах. Більш того, якщо в процесі модифікації сітки ми будемо зберігати спектр сигналу на тих ділянках,



Мал. 1. Приклад апроксимації сигналу по рівномірній сітці. (а) Сигнал, що апроксимується, та (б) похибка апроксимації цього сигналу по рівномірній сітці з кроком $h = 0.0625$.

де похибка апроксимації лежить у припустимих межах, можна отримати спектр та апроксимацію сигналу по сітці $\bar{\omega}$.

Оскільки система базисних функцій (1)-(2) безпосередньо залежить від вибору сітки, то можна говорити про ітераційну зміну системи базисних функцій. Можна також зауважити, що в запропонованій процедурі використовуються елементи теорії мультирезолюційного аналізу [3,4], оскільки отриману таким чином систему базисних функцій, визначену на нерівномірній сітці, можна розглядати як систему, що породжується з “материнської функції” (в даному випадку двох “материнських функцій”) шляхом масштабування та зсуву. Користуючись тією ж термінологією про вихідну систему (1)-(2) можна сказати, що вона породжується з материнських функцій лише за допомогою зсуву.

Для наочності продемоструємо запропонований алгоритм апроксимації та відновлення сигналу на прикладі. Розглянемо сигнал (мал. 1, а):

$$x_1(t) = \frac{t}{\pi} \cos(4\pi t^2) + e^{-5t^2} \quad (6)$$

на інтервалі зміни аргументу $[-1, 1]$ та задамо порядок точності $\epsilon = 10^{-3}$. Введемо вихідну рівномірну сітку $\bar{\omega}_0$, в якої кількість інтервалів дорівнює $m = 8$. Далі будуємо за формулами (3)-(5) апроксимацію сигналу (мал. 2, а) та оцінимо інтеграл середньоквадратичної похибки на кожному підінтервалі сітки:

$$\epsilon_h = \{ 0.00745, 0.00036, 0.00005, 0.00005, \\ 0.00011, 0.00002, 0.00029, 0.00804 \}$$

Якщо врахувати припущення про рівномірний розподіл похибки, то отримаємо, що на кожному підінтервалі похибка не повинна перевищувати $\epsilon/m = 0.125 \cdot 10^{-3}$. В нашому випадку це виконується скрізь за винятком 1, 2, 7 та 8 підінтервалів $\bar{\omega}_0$. Модифікуємо AI-спектр функції $x_1(t)$, записавши нулі замість значень спектру на перших двох та на останніх двох підінтервалах та збережемо отриманий спектр. Для спрощення процедури відновлення сигналу необхідно також зберегти інформацію про поточну сітку. В якості параметрів, що описують сітку

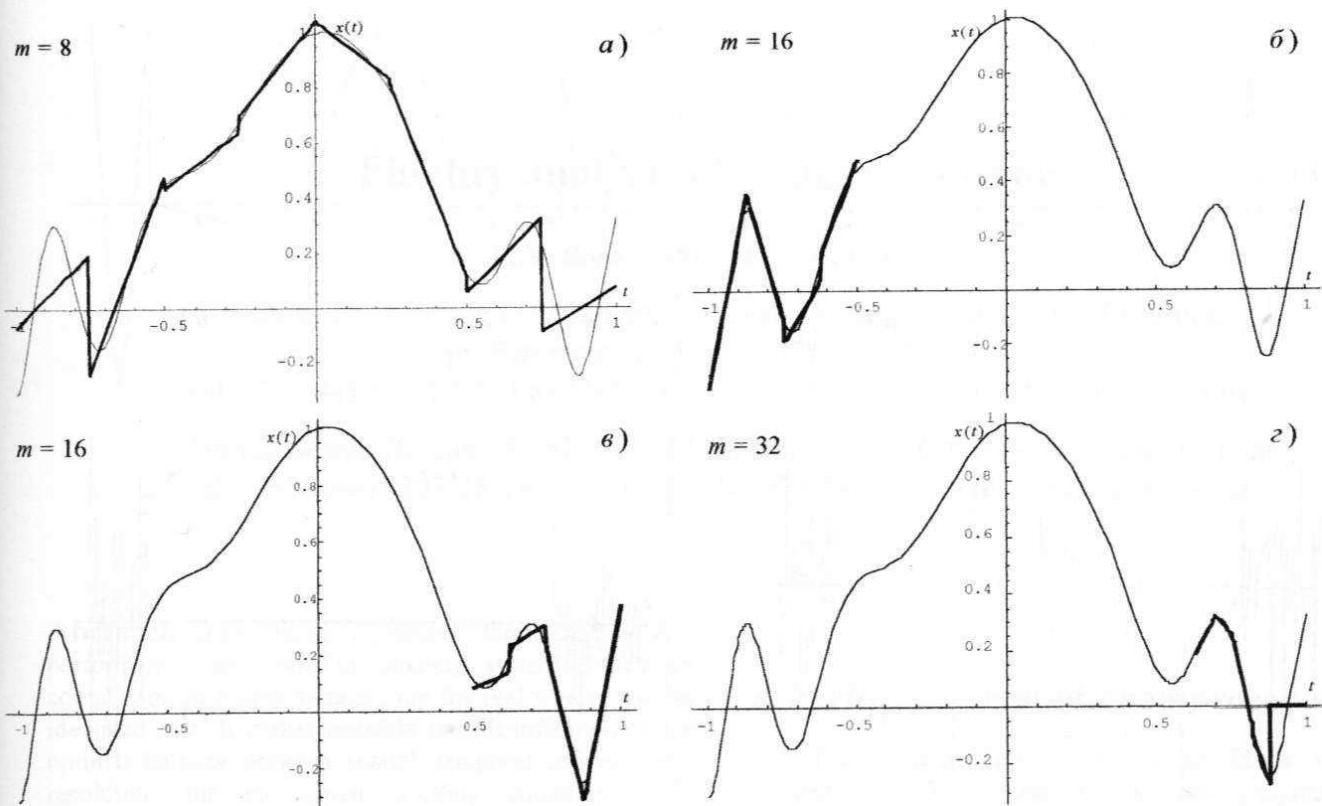
були обрані величина кроку, кількість врахованих підінтервалів та ліва межа області, на якій визначено сітку. Таким чином, частина спектру функції $x_1(t)$, яка відповідає $m = 8$, матиме вигляд:

$$\{ 0.0, 0.53575, 0.86909, 0.94073, 0.46411, 0.0, \\ 0.0, 0.10302, 0.16958, -0.10692, -0.34964, 0.0, \frac{1}{4}, 8, -1 \}$$

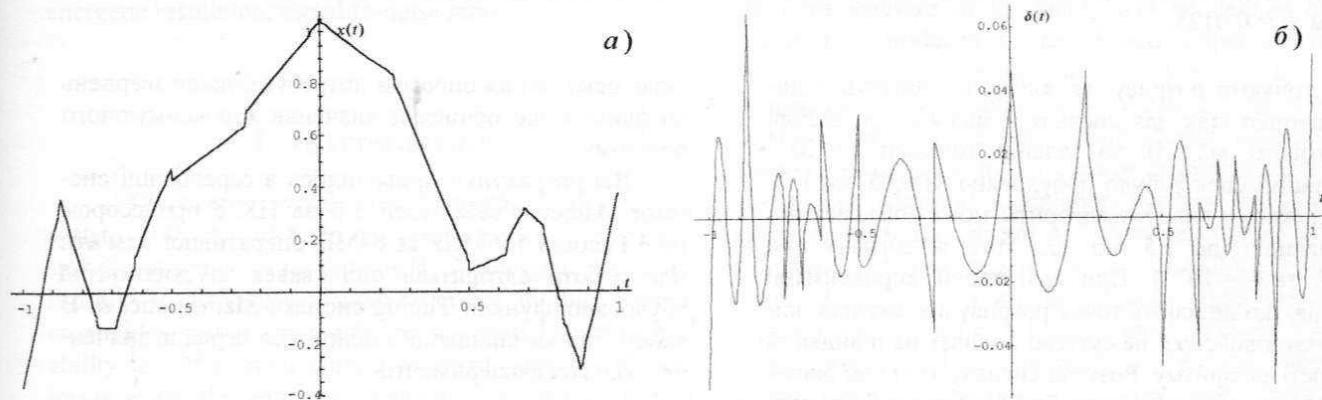
Згідно запропонованої процедури, розглянемо дві області: $I_1 = [-1, -0.5]$ та $I_2 = [0.5, 1]$. Кожна з цих областей складається з двох інтервалів сітки $\bar{\omega}_0$. Збільшимо (для визначеності подвоїмо) кількість інтервалів розбиття для кожної з областей I_1 та I_2 . Іншими словами, ми переходимо до нової рівномірної сітки $\bar{\omega}_1$ з $m = 16$, але розглядатимемо сигнал лише на перетині $\bar{\omega}_1$ з вказаними областями. Оскільки з точки зору мультирезолюційного аналізу параметр m можна розглядати як параметр масштабу, то можна говорити про представлення сигналу на новому масштабі. Отже переходимо на новий масштаб та послідовно повторимо для областей I_1 та I_2 вищезгадану процедуру. Будемо повторювати цю процедуру для все більш точних масштабів представлення сигналу доти, доки на кожному підінтервалі отриманої нерівномірної сітки похибка не буде перевищувати ϵ/m_j , де m_j – масштабний параметр відповідної сітки.

В нашому прикладі процес уточнення сітки завершиться після трьох ітерацій (мал. 2): $m = 8$, $m = 16$, $m = 32$, і ми отримаємо спектр функції $x_1(t)$:

$$\hat{X} = \{ \{ 0.0, 0.53575, 0.86909, 0.94074, 0.46411, 0.0, \\ 0.0, 0.10302, 0.16958, -0.10692, -0.34964, 0.0, \frac{1}{4}, 8, -1 \} \\ \{ -0.00679, 0.12961, 0, 0.30781, \\ 0.35818, -0.23501, 0, 0.17337, \frac{1}{8}, 4, -1 \}, \\ \{ 0.10906, 0, 0, 0.03274, \\ 0.02875, 0, 0, 0.34338, \frac{1}{8}, 4, \frac{1}{2} \} \\ \{ -0.13549, -0.01376, -0.00099, 0.10951, \frac{1}{16}, 2, -\frac{3}{4} \}, \\ \{ 0.24720, 0.28762, 0.08756, -0.19398, \\ 0.06183, -0.03499, -0.15465 - 0.09257, \frac{1}{16}, 4, \frac{5}{8} \} \}$$



Мал. 2. Кілька ітерацій процесу адаптації сітки. Жирною кривою показані апроксимуючі поліноми на рівномірних сітках, що введені на підінтервалах, а тонкою кривою – сигнал, що апроксимується.

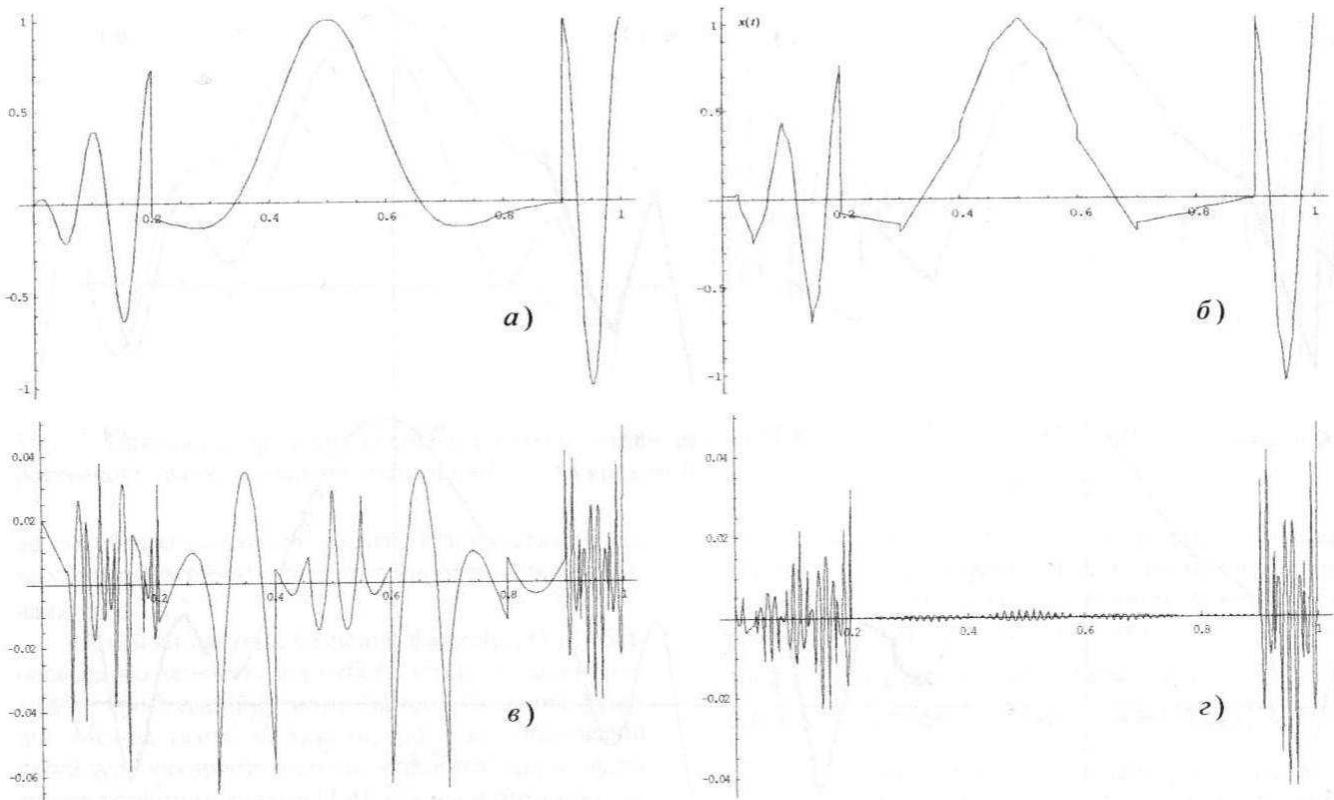


Мал. 3. (а) Апроксимація функції $x_1(t)$ по нерівномірній сітці та (б) графік функції похиби.

Відновити сигнал можна наступним чином. Для кожної рівномірної підсітки за формулою (3) будуємо апроксимуючий поліном, при цьому всю необхідну інформацію (елементи вектора спектра, границі сумування, розмір кроку, межі інтервала апроксимації) можна отримати з відповідної компоненти вектора \hat{X} . Сума отриманих апроксимуючих поліномів і дає апроксимацію сигналу на всій області визначення $[a, b]$ (мал.3,а). На мал.3,б показано графік похиби апроксимації $x_1(t)$ по адаптованій сітці. При цьому інтеграл середньоквадратичної похиби на проміжку $[-1, 1]$ склав $0.522786 \cdot 10^{-3}$. Для порівняння наведемо результати апроксимації даного сигналу по рівномірній сітці. Максимальне значення масштабного параметра, яке використовувалось під час побудови адаптованої сітки дорівнює $m = 32$. Цьому масштабу

відповідає рівномірна сітка з кроком $h = 0.0625$. Графік похиби апроксимації по цій сітці продемонстровано на мал.1,а; при цьому інтеграл середньоквадратичної похиби склав $0.114275 \cdot 10^{-3}$.

Запропонований алгоритм було реалізовано у вигляді пакету в середовищі системи Mathematica 3.0 [5] та було протестовано на сигналах різних типів (наприклад, мал.1,а та мал.4,а). При проведенні чисельних розрахунків також оцінювалась швидкодія алгоритму у порівнянні з алгоритмами апроксимації сигналів по рівномірній сітці AI-спектрами другого порядку. Наведемо деякі отримані результати. При побудові адаптивного спектру сигналу, що має точки розриву (мал.4,а), збіжність алгоритму в значній мірі залежить від вибору початкової рівномірної сітки. Якщо вихідну сітку обрано так, що її вузли співпада-



Мал. 4. Адаптивна апроксимація сигналу, що має точки розриву 1-го роду. (а) Сигнал, який складається з двох сінусоїд та так званого “мексиканського капелюха”, (б) апроксимація цього сигналу по адаптованій сітці , (в) графік похибки апроксимації по адаптованій сітці та (г) відхилення від сигналу апроксимації по рівномірній сітці з кроком $h = 0.0125$.

ють з точками розриву, то алгоритм збігається досить швидко (так для сигналу з мал.4,а при виборі початкового $m_0 = 10$ та заданій точності $\epsilon = 10^{-3}$ адаптивний спектр було побудовано за 9,65 сек.). У протилежному випадку алгоритм може збігатися дуже повільно (до 1,5 год. для того ж сигналу при $m_0 = 2$ та $\epsilon = 10^{-3}$). При адаптивній апроксимації сигналів, що не мають точок розриву або скачків, вибір початкової сітки не суттєво впливає на швидкість збіжності алгоритму. Розклад сигналу $x_1(t)$ по рівномірній сітці з кроком, що забезпечує відповідну точність, виконується (в залежності від вигляду сигналу) в 3-10 разів швидше.

Проте, оскільки при адаптивній апроксимації відбувається суттєва компресія інформації про сигнал (до 45% в залежності від типу сигналу) у порівнянні з представленням за допомогою рівномірної сітки, що забезпечує відповідну точність, при відновленні сигналу по його адаптивному спектру ми отримуємо значний виграш у швидкодії. Для ілюстрації, порівняємо час, витрачений на побудову графіку функції похибки: $\delta(t) = x(t) - x_a(t)$, де $x(t)$ – сигнал, а $x_a(t)$ – апроксимуючий поліном. Так, на побудову графіків з мал.1,а та мал.4,г знадобилося по 14.2сек. та 39.9сек., відповідно, а на побудову графіків з мал.3,б та мал.4,в – 4,25сек. та 9.6сек., відповідно. При обчисленні інтегралів середньоквадратичної похибки для апроксимації по рівномірній та адаптивній сіткам різниця у витратах часу стає ще біль-

шою, оскільки ця операція потребує більше звернень до функції, що обчислює значення апроксимуючого поліному.

Всі розрахунки проводились в середовищі системи Mathematica® версії 3.0 на ПК з процесором Intel Pentium 166MHz та 64MB оперативної пам'яті. Час роботи алгоритмів оцінювався за допомогою вбудованої функції Timing системи Mathematica®. В якості оцінки швидкодії вибиралося середнє значення з кількох експериментів.

Література

- Симак Л.А. Аппроксимирующие импульсные спектры в приложении к дробно-дифференциальному анализу. - Киев, 1989. - 56с. (Препр./ АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике; 89-8).
- Васильев В.В., Симак Л.А., Чечь В.В., Воронова О.С., Косова А.М., Пилипенко Н.Н. Методы аппроксимации и цифровой обработки сигналов мониторинга. - Киев, 1988. - 72с. (Препр./ НАНУ. ОМУСЭ ИПМЭ; №02/98).
- Васильев В.В., Симак Л.А., Воронова О.С., Апроксимация в спектральных методах моделирования динамических систем. Сравнительный анализ. - Киев, 1988. - 70с. (Препр./ НАНУ. ОГМУСЭ ИПМЭ; №04/98).
- Mallat S.G. A theory for multiresolution decomposition: The wavelet representation. // IEEE Trans. on Pattern. Anal. and Machine Intell., – 1989, vol.11. – p.674-693.
- Wolfram S. The Mathematica Book: Wolfram Media / Cambridge University Press. – 1996, – 1403p.