МОДИФІКАЦІЯ АЛГОРИТМУ НУССБАУМЕРА-КВЕНДЕЛЛА

Кожем`яко В.П., Майданюк В.П., Жуков К.М.
286021 Вінниця, Хмельницьке шосе, 95. ВДТУ, каф. оптоелектроніки, т.44-00-19, 46-32-16

В статті розглядаються можливості оптимізації алгоритму швидкого перетворення Фур`є (ШПФ) [1] Нуссбаумера-Квенделла (НК) [2,3] для довжин $n=2^m$. Показана спроможність обчислення всіх коефіцієнтів перетворення Фур`є за два кроки. На першому кроці обчислюються коефіцієнти перетворення Фур`є в непарних рядках аналогічно алгоритму Нуссбаумера-Квенделла, а на другому кроці – коефіцієнти в парних рядках.

Запропонований порядок обчислення забезпечує покращення структури алгоритму без суттєвого або зворотного змінювання кількості операцій.

1. Вступ

З відомих алгоритмів багатовимірних швидких прертворень Фур`є (ШПФ) алгоритм Нуссбаумера-Квенделла є одним з найбільш еффективних по швидкості обчислень. Він оснований на тому, що кількість комбінацій вхідних компонент обмежується для всіх можливих множин $\exp(-i\varphi)$. Будемо розглядати двомірні випадки ШПФ для довжин $n=2^m$. Обчислення коефіцієнтів перетворення Фур`є згідно алгоритму НК грунтується на наступній теоремі [1,2]:

Теорема 1.*Нехай k' – фіксоване ціле число, взаємно просте з n. Нехай Q(x) позначає круговий многочлен, корнем якого є елемент $w^{k'}$. Тоді обчислення компонент $V_{k',k'}$ може бути реалізоване у вигляді наступних трьох кроків:*

(1) обчислити поліноміальне перетворення

$$V'_k(x)=\sum_{i''=0}^{n-1} v_{i''}(x)\, x^{i''k} \pmod{Q(x)},$$

$$k=0, \dots, n-1;$$

де $v_{i''}(x)=\sum_{i'=0}^{n-1} v_{i',i''} x^{i'}$, $i''=0, \dots, n-1$;

$Q(x)=x^{n/2}+1$;

(2) обчислити n перетворень Фур`є

$$V'_{k',k}=\sum_{i'=1}^{n-1} w^{i'k'} V'_{i',k}, \qquad k': \text{НЗД}(k',n)=1,$$

($V_{i'k}=0$ для парних i', $V'_{i'k}$ - множник при $x^{(i'/2)-1}$ у V'_k)

(3) зробити перестановку

$$V_{k',k''}=V''_{k',((k''/k'))}, \qquad k': \text{НЗД}(k',n)=1,$$

$$k''=0, \dots, n-1.$$

Порядок обчислення перетворень Фур`є згідно алгоритму НК при $n=2^m$ наступний:

1) компоненти $V_{k',k''}$ з непарними k' і k''=0, ... , n-1 обчислюються згідно теоремі 1;

2) компоненти $V_{k',k''}$ з парними k' і непарними k'' обчислюються згідно теоремі 1 заміною k',k'' місцями.

3) останні компоненти $V_{k',k''}$ з обома парнима k', k'' обчислюються сполучанням у ШПФ довжини 2^{m-1}.

Недоліком ШПФ-алгоритму Нусбаумера-Квенделла для обчислення коефіцієнтів перетворення довжини $n=2^m$ є те, що для синтезу використовується трьохсходинна процедура. Більш ефективним є обчислення вихідних компонент з парними індексами k, яке грунтується на перестановках символів у поліноміальному перетворенні для k і k'.

2. Оптимізація ситезу алгоритму ШПФ Нуссбаумера-Квенделла

Введемо проміжні змінні:

$$a_{i,j}= v_{i,j} - v_{i+n/2,j},$$

$$a'_{i,j}= v_{i,j} + v_{i+n/2,j}, \quad i=0, \dots, n/2;$$

$$j=0, \dots, n,$$

де $v_{i,j}$ -- відповідни вхідни компоненти. Суми $a_{i,j}$ охоплюють всі вхідні компоненти згаданого поліноміального перетворення та компоненти

перетворення Фур`є з непарних рядків k, а суми $a'_{i,j}$ охоплюють всі інші компоненти з парних рядків[1].

Подальший порядок обчислення вихідних компонент з парних рядків, V_k пояснює наступна теорема

Теорема 2. *Нехай k' – фіксоване парне число. Нехай V'_k – n поліноміальних перетворень довжин $(2^m)^2$:*

$$V'_k(x) = \sum_{i''=0}^{n-1} a_{i''}(x) x^{i''k} \pmod{Q(x)},$$

$$k=0, \dots, n-1,$$

де $v_{i''}(x) = \sum_{i'=0}^{n-1} v_{i',i''} x^{i'}$ $i''=0, \dots, n-1;$

$Q(x)=x^{n/2}+1;$

Тоді обчислення компонент $V_{k',k''}$ для парних k' може бути виконано за наступні три етапи:

(1) замінити $a_{i',i''}$ на $a'_{i',i''}$;

(2) виконати переміщення для $a_{i',i''}$ (i'=1, ..., n/2-1),що знаходяться при множнику x^a для k'=0, ...,n-2,до множника x^b, де

$$b=(-i'+a+k'i')(\mathrm{mod}\ n/2)\,(-1)^{цілe(2(-i'+a)/n)},$$

$$i' \neq 0$$

(3) виконати n/2 перетворень Фур`є

$$V''_{k',k} = \sum_{i'=1}^{n-2} w^{i'k'} V'_{i'k},$$

$$k': НЗД(k',n)=2, \qquad k=0, \dots, n-2.$$

Оптимізація по додаванням у цих пов`язаних поліноміальних перетвореннях може бути організовано у вигляді алгоритму Кулі-Тьюкі за основою 2.

Застосування даної теореми у випадку, коли $n=2^m$ дозволяє обчислити всі коефіцієнти перетворення Фур`є за дві сходини:

1) обчислюються коефіцієнти в непарних рядках за теоремою 1;

2) обчислюються коефіцієнти в парних рядках за теоремою 2.

3. Експериментальні результати

Порівняльни характеристики для двомірного і трьохмірного випадків приведені в таблицях 1, 2.

Характеристики двомірного алгоритму Нуссбаумера-Квенделла для довжин $n \le 16$ не уступають порівняльному алгоритму.

Однак, спрощення структури та розміру часто використуємих підпрограм та проміжних даних алгоритму може впливати на швидкодію у обчислювальних засобах.

Таблиця 1

Розмір масиву n × n	Алгоритм Нуссбаумера Квенделла Кількість речовинних множень загальне	нетрівіальних	Кількість додавань
4 × 4	16	0	64
8 × 8	64	24	408
16 × 16	304	216	2264

Таблиця 2

Розмір масиву n × n	Альтернативний алгоритм Кількість речовинних множень загальне	нетрівіальних	Кількість додавань
4 × 4	16	0	64
8 × 8	64	32	420
16 × 16	320	256	2336

Тобто, зі збільшенням довжини n, характеристики пропонуємого методу не зменшуються асимптотично.

4. Висновки

1. Запропоновано метод реалізації алгоритму ШПФ Нуссбаумера-Квенделла, для випадку $n=2^m$ який дає можливість виконати перетворення Фур`є за два кроки.

2. Дослідження розроблених методів швидкого перетворення Фур`є показали, що швидкість обчислювання при зростанні довжини n асимптотично збільшується при спрощенні структури алгоритму.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов*. М. «Наука», 1984.

2. Р. Блейхут *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов*. М. «Мир», 1989.

3. Т.С. Хуанг, Дж.О. Эклунд, Г.Дж. Нуссбаумер и др. *Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений*. М. «Мир», 1984.