ТОМОГРАФІЧНЕ ВІДНОВЛЕННЯ ТЕНЗОРНИХ ПОЛІВ НА ОСНОВІ СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

В.В.Кошовий, Є.В.Кривін, В.В.Литвин, І.М.Романишин
Фізико-механічний інститут НАН України.
290601, Львів, вул. Наукова, 5.
(0322) 63-72-18, fax: (0322) 63-81-74, E-mail: dep23@ah.ipm.lviv.ua

Приведена методологія побудови алгоритмів томографічного відновлення тензорних полів на основі побудови сумарних зображень.

ВСТУП

Одним з ефективних методів томографічного відновлення скалярних полів у випадку, коли вони є повільно змінними функціями просторових координат, є метод сумарного зображення [1]. Вихідними даними для методу сумарних зображень є променеві проекції, які у двомірному випадку представляються у вигляді:

$$p(\bar{r},\bar{m}) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{r} + \bar{m}k)dk, \qquad (1)$$

де $g(\bar{r})$ - шуканий розподіл, $\bar{m} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ - орт в напрямку поширення променя. Сумарнм зображенням є:

$$P(\bar{r}) = \int_{0}^{\pi} p(\bar{r},\bar{m})d\alpha. \qquad (2)$$

Відомо, що в двомірному випадку при неперервній множині проектуючих функцій сумарне зображення є двомірною згорткою шуканої функції з $1/|\bar{r}|$:

$$P(\bar{r}) = g(\bar{r}) ** \frac{1}{|\bar{r}|}. \qquad (3)$$

У випадку анізотропного середовища, коли неоднорідність має тензорний характер, променева проекція залежить не тільки від компонент тензора, але і від напрямку поширення і поляризації зондуючої хвилі. Це приводить до того, що співвідношення між сумарним зображення та шуканим розподілом є складнішим, ніж (3), а ядро згортки визначається процедурою збору даних.

АЛГОРИТМ РЕКОНСТРУКЦІЇ

Нехай маємо деяку прямокутну систему координат $S(x,y,z)$ з початком в т.О, в якій $\sigma(x,y,z)$ - просторовий розподіл неоднорідності, що має тензорний характер. Не обмежуючи загальності, припустимо, що $\sigma(x,y,z)$ - симетричний тензор.

Нехай в напрямку ***i*** поширюється поперечна лінійно поляризована зондуюча хвиля, вектор поляризації якої напрямлений в напрямку ***k***. З векторами ***i, k*** зв"яжемо правосторонню систему координат $S^*(x,y,z)$, початок якої співпадає з початком системи координат $S(x,y,z)$. Припустимо, що у випадку однорідного просторового розподілу тензорного поля ($\sigma(x,y,z)$=const $\forall(x,y,z) \in V$) вплив тензорного поля на параметри зондуючого сигналу описується лінійним співвідношенням:

$$p_{ik} = \beta_1\sigma^*_{ii} + \beta_2\sigma^*_{kk} + \beta_3\sigma^*_{mm} + \beta_4\sigma^*_{ik} + \beta_5\sigma^*_{im} + \beta_6\sigma^*_{km} \qquad (4)$$

де ***i, k, m*** - орти, що задають правосторонню систему координат, зв"язану з променем поширення зондуючого сигналу ($m \perp k$, $m \perp i$), σ^*_{ln} (l=i, k, m; n=i, k, m) - компонети тензора в системі координат $S^*(x,y,z)$, β_j (j=1,…,6) - коефіцієнти, які визначають вплив компонент тензора на інформаційний параметр.

Тензор σ^* зв"язаний з тензором σ співвідношенням:

$$\sigma^* = T(\vartheta)\sigma T^{-1}(\vartheta), \qquad (5)$$

де $T(\vartheta)$ - матриця перетворення координат, ϑ характеризує набір необхідних кутів повороту Ейлера.

Підставивши (5) в (4), отримаємо співвідношення між вимірюваним інформаційним параметром p_{ik} та компонентами тензорного поля в системі координат $S(x,y,z)$ у вигляді:

$$p_{ik} = \beta_1(\vartheta)\sigma_{11} + \beta_2(\vartheta)\sigma_{22} + \beta_3(\vartheta)\sigma_{33} + \beta_4(\vartheta)\sigma_{12} + \beta_5(\vartheta)\sigma_{13} + \beta_6(\vartheta)\sigma_{23} \qquad (6)$$

де коефіцієнти β_j (j=1,…,6) залежать від набору кутів ϑ.

Розглянемо досліджуваний об"єм, як набір площин паралельних осі OZ. При процедурі збору даних в паралельних площинах, які паралельні осі OZ, орієнтація систем координат, що зв"язані з

променями поширення зондуючого сигналу (набір кутів ϑ) задається кутом прецесії α_i, одинаковим для всіх систем координат, кутом нутації, рівним $\pi/2$ (у випадку, коли орт $\boldsymbol{k}$ також лежить в розглядуваній площині), та змінним (для різних напрямів поширення сигналу в розглядуваній площині) кутом повороту γ. В цьому випадку співвідношення (6) для розглядуваної площини представляється у вигляді:

$$p_{ik}(s_0) = \beta_1(\alpha_i, \pi/2, \gamma)\sigma_{11}(s_0) + \\ + \beta_2(\alpha_i, \pi/2, \gamma)\sigma_{22}(s_0) + \beta_3(\alpha_i, \pi/2, \gamma)\sigma_{33}(s_0) + \\ + \beta_4(\alpha_i, \pi/2, \gamma)\sigma_{12}(s_0) + \beta_5(\alpha_i, \pi/2, \gamma)\sigma_{13}(s_0) + \\ + \beta_6(\alpha_i, \pi/2, \gamma)\sigma_{23}(s_0) \quad (7)$$

де s_0 - віддаль від розглядуваної площини до осі OZ.

На основі вимірюваних даних $p_{ik}(s_0)$ побудуємо двомірне сумарне зображення вимірюваного параметра $p(s_0)$. Отримаємо співвідношення між побудованим сумарним зображенням та сумарними зображеннями компонент тензора. Для цього розглянемо перший доданок представлення (7):

$$p_{ik}(s_0) = \beta_1(\alpha_i, \pi/2, \gamma)\sigma_{11}(s_0). \quad (8)$$

Аналогічно, як в (1), для (8) отримаємо, що сумарне зображення $P(\alpha_i, s_0)$ є згорткою $\sigma_{11}(s_0)$ з ядром $\beta_1\left(\alpha_i, \pi/2, arctg\left(y^*/x^*\right)\right)/r^*$, де $r^* = \sqrt{\left(x^*\right)^2 + \left(y^*\right)^2}$, x^*, y^* - координати в розглядуваній площині, тобто

$$P(\alpha_i, s_0) = \sigma_{11}(s_0) ** \frac{\beta_1\left(\alpha_i, \pi/2, arctg\left(y^*/x^*\right)\right)}{r^*} \quad (9)$$

Порівняння (9) і (3) показує, що у випадку (8) ядро згортки $1/|r|$ модулюється функцією, яка залежить від кута γ. Зауважимо, що ядро згортки є функцією α_i, не залежить від сумарного зображення і визначається тільки геометрією процедури збору даних.

Розглянемо набір двомірних сумарних зображень для різних s. На основі (9) запишемо:

$$P(\alpha_i, s) = \sigma_{11}(s) *** \frac{\beta_1\left(\alpha_i, \pi/2, arctg\left(y^*/x^*\right)\right)}{r^*}\delta(s) \quad (10)$$

де *** - тримірна згортка. Перейдемо від координат в розглядуваній площині x^*, y^* до координат (x,y,z) в системі координат $S(x,y,z)$ та виразимо s через координати (x,y,z). В результаті отримаємо для набору сумарних зображень в паралельних площинах, які характеризуються однаковим кутом α_i співвідношення:

$$P(\alpha_i, x, y, z) = \sigma_{11}(x,y,z) *** \tilde{\beta}_1\left(\alpha_i, \pi/2, x, y, z\right) + \\ + \sigma_{22}(x,y,z) *** \tilde{\beta}_2\left(\alpha_i, \pi/2, x, y, z\right) + \\ + \sigma_{33}(x,y,z) *** \tilde{\beta}_3\left(\alpha_i, \pi/2, x, y, z\right) + \\ + \sigma_{12}(x,y,z) *** \tilde{\beta}_4\left(\alpha_i, \pi/2, x, y, z\right) + \\ + \sigma_{13}(x,y,z) *** \tilde{\beta}_5\left(\alpha_i, \pi/2, x, y, z\right) + \\ + \sigma_{23}(x,y,z) *** \tilde{\beta}_6\left(\alpha_i, \pi/2, x, y, z\right) \quad (11)$$

Аналогічне співвідношення можемо записати для набору двомірних сумарних зображень в паралельних площинах, які відповідають іншому куту α_i. Розглянемо набір шести різних кутів α_i $(i=1,\ldots,6)$ та запишемо для них співвідношення аналогічні (11). В результаті отримаємо шість співвідношень для визначення просторового розподілу шести компонент тензорного поля. Відмітимо, що сумарні зображення вимірюваного параметру для одної і тої ж просторової точки, які побудовані на основі збору даних в площинах, що відповідають різним кутам α_i є різними внаслідок анізотропності середовища. Це дозволяє визначити просторовий розподіл компонент тензорного поля.

Застосуємо трьохмірне перетворення Фур'є до лівих і правих частин згаданих шести співвідношень між сумарними зображеннями в паралельних площинах та компонентами тензорного поля. В результаті отримаємо:

$$\Im_3(\sigma) = A\Im_3(P), \quad (12)$$

де $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6)^T$, $P_i = P(\alpha_i)$ $(i=1,\ldots,6)$, $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T$, $\Im_3(\cdot)$ - тримірне перетворення Фур'є, A - 6×6-мірна матриця, елементи якої є функціями просторових частот.

Співвідношенню (12) в області просторових координат відповідає представлення компонент тензорного поля у вигляді:

$$\sigma_i = b_{ij} *** P_j,$$

де b_{ij} - тримірне зворотнє Фур"є-перетворення елементів матриці A, $\sigma_i, P_i (i = \overline{1,6})$ - складові векторів σ і P, повторення індекса j означає сумування.

ВИСНОВКИ

В роботі показано, що шуканий просторовий розподіл компонент тензорного поля представляється у вигляді суми згорток плоско паралельних наборів сумарних зображень вимірюваних параметрів. Функції, з якими згортають ці зображення, визначаються процедурою збору даних і не залежать від побудованих сумарних зображень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Б.К. Синтез проектирующих функций // Доклады Академии наук СССР. - 1971, т. 196, №5.- С.1072-1075.