ПРО ЗАДАЧІ РОЗБИТТЯ

Надія ТИМОФІЄВА

МННЦ з ІТіС НАН України та Міносвіти
252022, Київ, просп. Ак. Глушкова, 40,тел.: (044) 2664356

Nadija Tymofijeva. About partition problems
An analysis of classes of problems of partition is suggested, some property of set of partition is represented, method of generation of set of partition is described. On basis of this analisis mathematical model of problem of partition is built

Задачі розбиття відомі в найрізноманітніших постановках. Це розбиття множини, розсічення графів, мереж, кластеризація, таксономія, класифікація. З обчислювальної точки зору вони є одними з найбільш складних.

Для правильного вибору методу і алгоритму, за допомогою яких можна одержати оптимальний розв'язок, необхідно побудувати математичну модель, яка б адекватно описувала поставлену задачу. З цією метою в статті аналізуються типи задач розбиття, наведено деякі властивості множини розбить, описано метод упорядкування усіляко можливих розбить. На підставі цих досліджень побудовано математичну модель задачі розбиття.

Отже, задача розбиття полягає в упорядкуванні заданих об'єктів у порівняно однорідні групи, тобто за розробленими правилами проводиться розбиття заданої множини на підмножини. Задачі розбиття можна розділити за типом завдання об'єктів і підмножин, по яких розподіляються ці об'єкти, і за способом обчислення цільової функції.

За типом завдання об'єктів і підмножин виділимо такі задачі.

1. Задано n об'єктів, які належать до різних типів. Кількість підмножин, по яких розподіляються об'єкти окремого типу, і їх потужність задано.

2. Задано n об'єктів, які належать до різних типів. Кількість підмножин, по яких розподіляються об'єкти окремого типу, і їх потужність не задано.

3. Задано n об'єктів, які належать до одного типу. Кількість підмножин, по яких розподіляються об'єкти, і їх потужність задано.

4. Задано n об'єктів, які належать до одного типу. Кількість підмножин, по яких розподіляються об'єкти, і їх потужність не задано.

За способом обчислення цільової функції задачі розбиття діляться на такі, у яких взаємозв'язки між об'єктами задано явно, у кількісному значенні, і такі, у яких їх задано неявно, у якісному значенні. Так, наприклад, у задачах компоновки, розбитті електричних схем на непересічні підмножини між об'єктами початкової множини задано кількість зв'язків. У цільовій функції, за якою здійснюється оцінка оптимального розв'язку, враховується сумарна кількість зв'язків між елементами, які входять до однієї підмножини, або сумарна кількість зв'язків між підмножинами. В задачах розпізнавання (таксономії), класифікації, кластеризації взаємозв'язок між об'єктами існує в якісному вимірі. Для встановлення цих зв'язків у кількісному вимірі вводяться міри подібності. Оскільки міра подібності - оцінка суб'єктивна, то використання для розв'язання однієї і тієї самої задачі різних мір подібності приводить до різних результатів. Отже, якщо взаємозв'язок між об'єктами визначається мірами подібності, то результат розв'язку задачі розбиття залежить і від способу визначення цих взаємозв'язків, і від завдання цільової функції, за якою проводиться пошук оптимального розв'язку.

Математична модель задач розбиття, як правило, задається однією множиною, між елементами якої існує взаємозв'язок. Початкові дані (взаємозв'язки між елементами цієї множини) подамо у вигляді матриці зв'язності. Якщо задача розбиття належить до першого типу за способом обчислення цільової функції, вважатимемо, що вхідні дані задано за умовою задачі. Якщо задача розбиття належить до другого типу (таксономія, кластеризація, класифікація), необхідно побудувати матрицю зв'язності, використовуючи залежно від класу задач такі міри подібності, як кооефіцієнт кореляції, міри відстані, коефіцієнти асоціативності чи ймовірнісні коефіцієнти подібності [1-2].

Розглянемо деякі властивості розбиття множини і спосіб генерування усіляко можливих розбить. Для їх упорядкування використаємо підхід, що враховує властивість періодичності, характерної для процесу генерування комбінаторних конфігурацій [3]. Згідно з ним усіляко можливі розбиття упорядковуються майже періодичними інтервалами, кожен із яких складається з основних майже періодів. Для цього необхідно:

а) визначити основний майже період множини розбить і правило, за яким він формується;

б) визначити правило, за яким формується обмежувальне розбиття;

в) визначити правило, за яким генеруються усіляко можливі розбиття, які належать до майже періода σ - го порядку. Тим самим забезпечується генерування усіляко можливих розбить.

Розбиттям n -елементної множини A на η^k підмножин назвемо упорядковану множину підмножин $\rho^k = (\rho_1^k \ldots \rho_{\eta^k}^k)$ таку, що $\rho_1^k \cup \ldots \cup \rho_{\eta^k}^k = A$, $\rho_j^k \cap \rho_l^k = \varnothing$, $j,l \in \{1,\ldots,\eta^k\}$, $j \neq l$, $\rho_j^k \neq \varnothing$, $j \in \{1,\ldots,\eta^k\}$, $\eta^k \in \{1,\ldots,n\}$, $k \in \{1,\ldots,q\}$, q - кількість усіляко можливих розбить. Упорядковану множину усіляко можливих розбить позначимо Θ .

Розбиття ρ^k характеризується кількістю підмножин ρ_j^k і кількістю елементів, що входять до цієї підмножини. За цими ознаками у множині Θ виділено чотири типи розбить.

Означення 1. Розбиття $\rho^k \in \Theta$ основного майже періоду утворюється із попереднього ρ^{k-1} однією транспозицією j - го елемента t - ї підмножини ρ^{k-1} - го розбиття і першого елемента $t+1$ - ї підмножини ρ^{k-1} - го розбиття, $j = \overline{1, \xi_t^k}$, $t \in \{1,\ldots,\eta^{k-1} - 1\}$, ξ_t^k - кількість елементів у ρ_t^k.

Означення 2.. Початкове розбиття ρ^k t - го основного майже періоду назвемо обмежувальним. Воно або задається, або визначається за особливим правилом.

Означення 3. Майже періодом σ -го порядку упорядкованої множини Θ назвемо упорядковану її підмножину , яка містить усіляко можливі розбиття, утворені елементами $i_1^k,\ldots,i_\sigma^k$, $\sigma \in \{\xi_1^k + 2,\ldots,n\}$.

На підставі вищевикладеного подамо математичну модель у такому вигляді. Назвемо вагою величину, що визначає залежність між елементом a_j і елементом a_l . Вагу між цими елементами задамо симетричною матрицею C . Введемо також (0,1) - симетричну комбінаторну матрицю $Q(\rho^k)$, яка задає розподілення елементів множини A по підмножинах ρ_j^k . Назвемо її комбінаторною матрицею розподілення. Елемент цієї матриці $g_{jl}(\rho^k) = 1$, якщо елементи a_j і a_l належать до однієї підмножини, і $g_{jl}(\rho^k) = 0$ в іншому випадку. Матриця $Q(\rho^k)$ утворюється із попередньої $Q(\rho^{k-1})$ за правилами генерування усіляко можливої множини розбить.

Подамо елементи правого поля матриці $Q(\rho^k)$ комбінаторною функцією $f_{\rho^k}(x)$, а елементи правого поля матриці C - числовою функцією $\varphi(x)$. Функція цілі для задачі розбиття набуде вигляду

$$F(\rho^k) = \sum_{j=1}^{m} f_{\rho^k}(x_j)\,\varphi(x_j), \qquad (1)$$

$m = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Оскільки однорідні елементи мають між собою найбільші ваги і їх необхідно об'єднати в одну підмножину, то задача полягає в знаходженні такого розбиття ρ^k , для якого функція цілі (1) при виконанні заданих умов була б найбільшою. Сформульована математична модель дозволяє визначати множину значень цільової функції в задачах розбиття різних типів і тим самим обмежувати область пошуку оптимального розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Винцюк Т.К. Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов.- К.: Наук. думка, 1987 .- 262 с.

2. Факторный, дискриминантный и кластерный анализ/ Дж.-О. Ким, Ч.У.Мьюллер, У.Р.Клекка, М.С.Олдендерфер, Р.К. Блэшфилдж; Под ред. И.С. Енюкова. -М.: Финансы и статистика, 1989.- 215 с.

3.Тимофієва Н.К. Про аргумент комбінаторних функцій// Проблеми оптимізації обчислень. Праці міжнародної конференції 6-8 жовтня 1997 р. м. Київ.- К.: 1997. - С. 303-307.