МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ІЗ ЗАДАНИМИ КУМУЛЯНТНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ю.П.Кунченко, О.С.Гавриш, А.Ю.Іванченко, С.В.Заболотній
Інженерно-технологічний інститут, 257006, Черкаси, бул. Шевченка 460,
тел.: (0472) 43-51-71, факс: (0472) 43-31-90, e-mail: postmaster@bee-pitron.cherkassy.ua

Анотація. У роботі розглядається можливість синтезу генераторів негауссівських випадкових величин з певними значеннями коефіцієнтів асиметрії та ексцесу. Запропоновані методи формування шуканої вибірки базуються на основі використання бігауссівської випадкової величини.

ВСТУП

Проблема імітаційного моделювання є актуальною для різноманітних галузей статистичної обробки інформації. При цьому більшість існуючих методів орієнтовано на генерацію випадкових величин з певними законами розподілу ймовірностей.

Відзначимо, що при вирішенні більшості прикладних стохастичних задач, реальні завади апроксимуються нормальним законом розподілу ймовірностей. Такий підхід дозволяє значну частину досліджень здійснювати аналітичними методами, що суттєво підвищує їх ефективність [1]. Широке розповсюдження гауссівських законів розподілу спричинене саме простотою їхнього застосування, заради якого допускається деяке погіршення відповідності прийнятої моделі реальним процесам. Для зменшення цього протиріччя в даній роботі пропонується спосіб аналітичного опису емпіричних одновимірних щільності ймовірності за допомогою бігауссівської щільності розподілу. Такий розподіл володіє більшим числом параметрів порівняно із звичайним гауссівським законом, що дозволяє більш точно апроксимувати цією математичною моделлю реальні негауссівські завади

1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

При моделюванні негауссівських випадкових величин одним із розповсюджених підходів є кусково-нормальна апроксимація щільності розподілу ймовірностей, що дозволяє варіювати гостровершинністю щільностей (змінювати коеффіцієнт єксцессу), а також придавати їм властивість несиметричності (змінювати коефіцієнт асиметрії) [2]. Проте при застосуванні такого підходу необхідне розв'язання достатньо складних апроксимаційних задач.

Досить часто при дослідженні негауссівських випадкових величин зручним є їх опис не щільністю розподілу, а кінцевою послідовністю моментів чи кумулянтів [3]. Тому алгоритми, що пропонуються, здатні формувати негаусівські випадкові величини з певними кумулянтними коєфіцієнтами вищих порядків. Принцип цього формування полягає у пропорційному змішуванні вибіркових значень, що можуть генеруватися різноманітними стандартними генераторами з розрахунковими параметрами гауссівського розподілу ймовірностей.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо випадкову величину ξ яка має бігауссівську щільність розподілу

$$p(x/\vec{\vartheta})=\frac{\delta}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}+ \\ +\frac{1-\delta}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}, \tag{1}$$

де δ - константа, яка приймає значення в інтервалі $[0;1]$, τ_1, τ_2, σ_1^2 і σ_2^2 - параметри бігаусівської щільність розподілу.

Необхідно дослідити характер залежності величини кумулянтних коефіцієнтів від параметрів бігауссівського розподілу, а також встановити зв'язок між ними.

3. ОСНОВНІ РОЗРАХУНКОВІ ФОРМУЛИ

Легко показати, що перші чотири кумулянти випадкової величини з щільністю розподілу ймовірностей виду (1) в загальному винадку описуються виразами

$$\chi_1=\delta\tau_1+(1-\delta)\tau_2,$$
$$\chi_2=\delta(1-\delta)(\tau_1-\tau_2)^2+\delta\sigma_1^2+(1-\delta)\sigma_2^2,$$
$$\chi_3=\delta(1-\delta)(1-2\delta)(\tau_1-\tau_2)^3+ \\ +3\delta(1-\delta)(\tau_1-\tau_2)(\sigma_1^2-\sigma_2^2),$$
$$\chi_4=\delta(1-\delta)(1-6\delta+6\delta^2)(\tau_1-\tau_2)^4+ \\ +6\delta(1-\delta)(1-2\delta)(\tau_1-\tau_2)^2(\sigma_1^2-\sigma_2^2)+ \\ +3\delta(1-\delta)(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2. \tag{2}$$

З наведених співвідношень видно, що при $\tau_1=\tau_2$ і $\sigma_1^2=\sigma_2^2$, при $\delta=0$ або $\delta=1$ щільність розподілу бігауссівської випадкової величини ξ стає гауссівською, а кумулянти вище 3-го порядку стають рівними нулю.

З одержаних співвідношень також очевидно, що кумулянти, вище другого порядку, залежать не стільки від параметрів τ_1 та τ_2, скільки від їхньої різниці $\tau_1 - \tau_2$, а починаючи з третього порядку залежать і від різниці параметрів $\sigma_1^2 - \sigma_2^2$. Отже можна зробити висновок, що бігауссівські випадкові величини, які мають однакову різницю параметрів $\tau_1 - \tau_2$ і $\sigma_1^2 - \sigma_2^2$, описуються однаковою послідовністю кумулянтів вищих порядків.

4. ОТРИМАНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для спрощення подальших розрахунків, непорушуючи загальних співвідношень, можемо прийняти $\tau_2 = 0$ та $\sigma_2 = 1$. Тоді формули (2) можна записати у вигляді

$$\chi_1 = \delta\tau, \qquad \chi_2 = (1-\delta)(\delta\tau^2 + 1) + \delta\sigma^2,$$

$$\chi_3 = \delta(1-\delta)(1-2\delta)\tau^3 + 3\delta\tau(1-\delta)(\sigma^2 - 1),$$

$$\chi_4 = \delta(1-\delta)(1-6\delta+6\delta^2)\tau^4 + 6\delta\tau^2(1-\delta)\times$$
$$\times(1-2\delta)(\sigma^2-1) + 3\delta(1-\delta)(\sigma^2-1)^2. \qquad (3)$$

Зауважимо, що величину маточікування можна змінювати шляхом додавання певної константи до отримуваних вибіркових значень. Таким чином, для формування випадкової величини з заданими кумулянтами (χ_2, χ_3 та χ_4), необхідно розв'язати систему з трьох нелінійних рівнянь з трьма невідомими (τ, σ та δ). Де значення параметра δ вказує на пропорційність внеску вибіркових значень, сформованих першим стандартним генератором нормальних випадкових величин в шукану вибірку.

На практиці, більш зручним є використання кумулянтних коефіцієнтів γ_i, які зв'язані з кумулянтами співвідношенням $\gamma_i = \chi_i \chi_2^{-0.5i}$ [4].

Наведемо деякі графіки залежності кумулянтних коефіцієнтів γ_3 та γ_4 від параметрів δ, τ і σ.

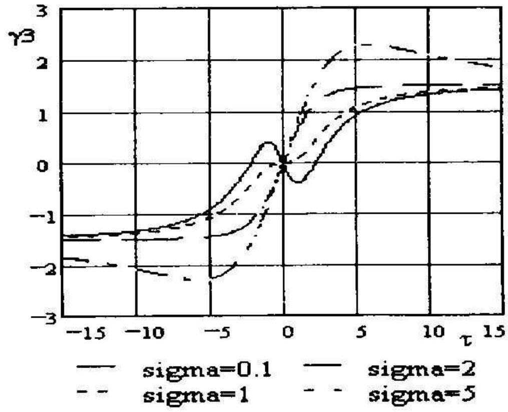

Рис.1 Графік залежності коефіцієнта асиметрії γ_3 від параметра τ

На рис.1,2 зображені графіки залежностей кумулянтних коефіцієнтів γ_3 і γ_4 від параметру τ при фіксованому параметрі $\delta = 0.2$ і різних $\sigma = 0.1, 1, 2, 5$. З наведених графіків бачимо, що кумулянтний коефіцієнт γ_3 є непарною функцією параметра τ, а кумулянтний коефіцієнт γ_4 - парною функцією.

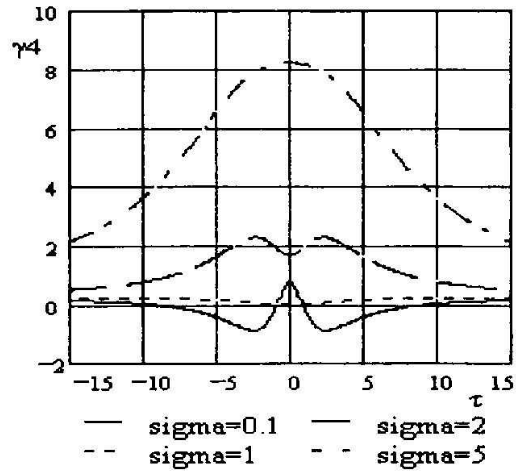

Рис.2 Графік залежності коефіцієнта ексцесу γ_4 від параметра τ

ВИСНОВКИ

1. Процес формування вибіркових значень негауссівської величини з шуканими кумулянтними коефіцієнтами відрізняється алгоритмічною та технічною простотою.
2. Диапазон варіювання величинами кумулянтних коеффіцієнтів асиметрії та ексцесу може бути досить значним.
3. Метод формування негауссівських випадкових величин з заданими коефіцієнтами асиметрії та ексцесу можна розповсюдити і на кумулянти вищих порядків, використовуючи для цього полігауссівські випадкові величини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Левин Б.Р. «Теоретические основы статистической радиотехники». -М.: Радио и связь, 1989.-656 с.
2. Штейнвольф А.Л. «Расчеты и имитация негауссовских случайных вибраций». - К.: Наукова думка, 1993. - 250 с.
3. Кунченко Ю.П., Лега Ю.Г. «Оценка параметров случайных величин методом максимизации полинома».-К.: Наукова думка, 1992.-180 с.
4. Малахов А.Н. «Кумулянтный анализ негауссовских случайных процессов и их преобразований».-М.: Сов. радио, 1978.-376с.