узагальнені кон'юнктивні перетворення дискретних сигналів та їх застосування

мич і.А., трофимлюк о.т.

Ужгородський державний університет

Вводяться в розгляд так звані узагальнені кон'юнктивні перетворення дискретних сигналів, розглядаються основні властивості цих перетворень, а також деякі з можливих їх застосувань в теорії бульових функцій.

Нехай $Z_2=\{0,1\}$, $Z_2^n=\{\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_i\in Z_2\}$ - множина n - місних бульових векторів.

Елементарною кон'юнкцією, утвореною із бульових змінних $X_1,X_2,\ldots,X_n$, будемо за означенням називати вираз

$$R_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\beta}}=(\overset{\alpha_1}{X_1})^{\beta_1}(\overset{\alpha_2}{X_2})^{\beta_2}\ldots(\overset{\alpha_n}{X_n})^{\beta_n}$$

де $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\in Z_2^n$, а

$$\overset{\delta}{X}=\begin{cases}\overline{X}, \text{ якщо } \delta=0\\ X, \text{ якщо } \delta=1\end{cases},$$

$$X^{\delta}=\begin{cases}1, \text{ якщо } \delta=0\\ X, \text{ якщо } \delta=1\end{cases}.$$

Введемо в розгляд матриці

$$K_0=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix} \quad \text{та} \quad K_1=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}.$$

Вектор $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in Z_2^n$ породжує матрицю $K_{\widetilde{\alpha}}=K_{\alpha_1}\otimes K_{\alpha_2}\otimes\ldots\otimes K_{\alpha_n}$, де $\otimes$ - символ операції кронекерівського добутку матриць.

Матрицю $K_{\widetilde{\alpha}}$ будемо називати матрицею узагальненого кон'юнктивного перетворення дискретних сигналів з міткою $\widetilde{\alpha}$.

Основні властивості матриці $K_{\widetilde{\alpha}}$:

1. $K_{\widetilde{\alpha}}$ - невироджена матриця порядку 2^n, причому $\det K_{\widetilde{\alpha}}=1$.
2. $K_{\widetilde{\alpha}}^{-1}=K_{\alpha_1}^{-1}\otimes K_{\alpha_2}^{-1}\otimes\ldots\otimes K_{\alpha_n}^{-1}$
3. Над полем $GF(2)$ матриця $K_{\widetilde{\alpha}}$ обернена сама собі.
4. В δ-му стовпці матриці $K_{\widetilde{\alpha}}$ поміщені значення елементарної кон'юнкції $R_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\beta}}$ на елементах множини Z_2^n, де $\delta\in\{0,1,\ldots,2^n-1\}$ - номер бульового вектора $\widetilde{\delta}=(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$, $\widetilde{\beta}=\overline{\widetilde{\alpha}}\oplus\widetilde{\delta}=\widetilde{\alpha}\oplus\overline{\widetilde{\delta}}$, $\oplus$- символ операції покомпонентного додавання бульових векторів по $\bmod 2$ $\overline{\widetilde{\alpha}}=(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\ldots,\overline{\alpha}_n)$ і $\overline{\widetilde{\delta}}=(\overline{\delta}_1,\overline{\delta}_2,\ldots,\overline{\delta}_n)$ - бульові вектори відповідно протилежні векторам $\widetilde{\alpha}$ і $\widetilde{\delta}$.
5. Матриця $K_{\widetilde{\alpha}}$ задає бінарне відношення часткового порядку $\prec_{\widetilde{\alpha}}$ на множині Z_2^n. Вважаємо, що вектори $\widetilde{\beta},\widetilde{\delta}\in Z_2^n$ знаходяться у відношенні $\widetilde{\beta}\prec_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\delta}$ тоді, коли для всіх $i=1,2,\ldots,n$ виконуються умови: $\beta_i\le\delta_i$, якщо $\alpha_i=1$ і $\beta_i\ge\delta_i$, якщо $\alpha_i=0$.

   Відношення попередника [2] на множині Z_2^n - це відношення $\prec_{\widetilde{\alpha}}$ для $\widetilde{\alpha}=(1,1,\ldots,1)$.
6. Матрицю $K_{\widetilde{\alpha}}$ можна представити у виді звичайного матричного добутку n слабозаповнених матриць $F_n^{(0)}$ та $F_n^{(1)}$ порядку 2^n, де

$$F_n^{(0)}=\begin{bmatrix}1\,1\,0\,0\,0\,0\ldots0\,0\\0\,0\,1\,1\,0\,0\ldots0\,0\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots1\,1\\0\,1\,0\,0\,0\,0\ldots0\,0\\0\,0\,0\,1\,0\,0\ldots0\,0\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots0\,1\end{bmatrix},$$

$$F_n^{(1)} = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0\ldots0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,0\ldots0\,0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots0\,1 \\ 1\,1\,0\,0\,0\,0\ldots0\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,0\ldots0\,0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots1\,1 \end{bmatrix}$$

7. Матриця K_n кон'юнктивного перетворення дискретних сигналів [1] - це матриця $K_{\tilde{\alpha}}$ для $\tilde{\alpha} = (1,1,\ldots,1)$.

Якщо $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{2^n-1})^T$ - дискретний сигнал, визначений на множині Z_2^n, тобто $f_\delta = f(\tilde{\delta})$, то матричний добуток $K_{\tilde{\alpha}} f$ будемо називати узагальненим кон'юнктивним перетворенням сигналу f з міткою $\tilde{\alpha}$.

Обчислення $K_{\tilde{\alpha}} f$ згідно формули

$$K_{\tilde{\alpha}} f = F_n^{(\alpha_1)}(F_n^{(\alpha_2)} \ldots (F_n^{(\alpha_n)} f)\ldots) \qquad (1)$$

називається швидким узагальненим кон'юнктивним перетворенням f з міткою $\tilde{\alpha}$.

Формальний вираз виду

$$\sum_{\delta=0}^{2n-1}{}^{\oplus} b_\delta \otimes R_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\delta}} \qquad (2)$$

де $\oplus$, $\otimes$ - відповідно символи операцій додавання і множення по $\bmod 2$, $b_\delta \in Z_2$, , будемо називати $\tilde{\alpha}$- канонічним поліномом, побудованим із змінних $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Поліном (2) називається $\tilde{\alpha}$- канонічним поліномом булькової функції $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{2^n-1})^T$, якщо він задає цю функцію.

На основі властивостей матриці $K_{\tilde{\alpha}}$ вектор $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{2^n-1})$ коефіцієнтів $\tilde{\alpha}$- канонічного поліному булевої функції f знаходиться із рівності

$$b = K_{\tilde{\alpha}} \otimes f \qquad (3)$$

Аналогічно означенню монотонної булевої функції [2], булеву функцію $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{i-1})^T$ будемо називати $\tilde{\alpha}$ - монотонною, якщо для довільних $\tilde{\beta}, \tilde{\delta} \in Z_2^n$, таких що $\tilde{\beta} \prec_{\tilde{\alpha}} \tilde{\delta}$ виконується умова $f(\tilde{\beta}) \leq f(\tilde{\delta})$.

Для булевої функції $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{2^n-1})^T$ побудуємо вектор $(K_{\tilde{\alpha}} f) \circ ((K_{\tilde{\alpha}}^{-1})^T f)$, де $\circ$ - символ операції покомпонентного добутку векторів,

Теорема 1. Булева функція $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{2^n-1})^T$ є $\tilde{\alpha}$ - монотонною тоді і тільки тоді, коли α -ва компонента вектора

$$(K_{\tilde{\alpha}} f) \circ ((K_{\tilde{\alpha}}^{-1})^T f) \qquad (4)$$

дорівнює нормі Хемінга функції f, а всі інші компо-ненти цього вектора дорівнюють 0.

Розглянемо $\tilde{\alpha}$ - канонічний поліном, який задовільняє умову $a_0 = 0$ і виконаємо в (2) формальну заміну символу $\oplus$ на символ $\vee$. Отримаємо деяку ДНФ, побудовану із булевих змінних $X_1, X_2, \ldots, X_n$, яку будемо називати $\tilde{\alpha}$ - поліноміальною ДНФ.

Побудована на основі $\tilde{\alpha}$ - канонічного поліному булевої функції $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ $\tilde{\alpha}$- поліноміальна ДНФ не завжди є ДНФ цієї функції.

Теорема 2[3]. Побудована на основі $\tilde{\alpha}$ - канонічного поліному булевої функції f $\tilde{\alpha}$ - поліноміальна ДНФ, тоді і тільки тоді є ДНФ цієї функції, коли функція f є $\tilde{\alpha}$ - монотонною.

В $\tilde{\alpha}$ - поліноміальну ДНФ кожна змінна X_i входить лише з запереченням або лише без заперечен-ня. Тому, виконавши в $\tilde{\alpha}$ - поліноміальній ДНФ бу-левої функції f всі елементарні поглинання [2], отримуємо скорочену ДНФ цієї функції.

Теорема 3[3]. Скорочена ДНФ $\tilde{\alpha}$ -монотонної булевої функції є єдиною мінімальною ДНФ цієї функції.

Література

1. Айзенберг Н.Н., Трофимлюк О.Т. Конъюнктивные преобразования дискретных сигналов и их применение для отыскания тестов и распознавания монотонности функций алгебры логики. Кибернетика, 1981, №5, с.138-139.
2. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т-1. - М.: Наука, 1974, 111с.
3. Трофимлюк О.Т., Мич І.А. Однорідні та $\tilde{\alpha}$ - монотонні булеві функції. - Науковий вісник Ужгородського університету, серія математика, випуск 2, -Ужгород, 1997, с.108-113.