Стохастична параметрична структура компонентних оцінок кореляційних характеристик періодично корельованих випадкових процесів

Ісаєв І.Ю., Яворський І.М.
Фізико-механічний інститут ім.Г.В.Карпенка НАН України
Україна, 290601, м.Львів, вул.Наукова,5
Тел.: (0322) 633-355, Факс: (0322) 649-427
Електронна пошта: iavor@ah.ipm.lviv.ua

Побудова параметричних моделей періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) базується на їх представленні у вигляді стаціонарних стаціонарно зв'язаних процесів. Надаючи стаціонарним процесам, що формують ПКВП, різного вигляду, отримуються часткові параметричні моделі. В доповіді розглянуто кореляційні властивості найбільш поширених параметричних моделей ПКВП - адитивної, мультиплікативної та квадратурної. На основі компонентного методу оцінювання характеристик другого порядку ПКВП, досліджено показники якості для наведених моделей. На основі проведених досліджень запропоновано рекомендації по вибору основних параметрів обробки - залежності точки усічення корелограми від довжини реалізації. Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів з результатами оцінювання за когерентним методом.

ВСТУП

Аналіз оцінок імовірнісних характеристик на основі параметричних зображень має за мету знаходження показників якості статистичної обробки рядів, що описуються певними параметричними моделями. Більшість стохастичних процесів можна спробувати класифікувати за властивостями математичного сподівання, кореляційної функції або спектральної густини, а також їх компонентів. Модель коливань у вигляді ПКВП дозволяє поєднати стаціонарний підхід до опису природних явищ з підходом, що базується на використанні детермінованих функцій. Дослідження властивостей фізичного сигналу необхідно починати з віднесення його до певного параметричного класу. Перехід до модельного параметричного опису сигналів здійснюється на основі представлення ПКВП через стаціонарні стаціонарно пов'язані компоненти [1]

$$\xi(t)=\sum_{k\in Z}\xi_k(t)e^{ik\frac{2\pi}{T}t}. \quad (1)$$

Накладаючи певні умови на вигляд стаціонарних процесів $\xi_k(t)$, отримуються часткові моделі ПКВП.

1. Стохастична параметрична структура ПКВП

1.1. Якщо покласти $\xi_k(t)=a_k+\eta_k(t)$, де $a_k=const$, $\eta_k(t)$ - некорельовані стаціонарні процеси, то отримаємо <u>адитивну модель</u>

$$\xi(t)=\sum_{k\in Z}a_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t}+\sum_{k\in Z}\eta_k(t)e^{ik\frac{2\pi}{T}t}=f(t)+\eta(t). \quad (2)$$

В силу некорельованості $\eta_k(t)$ для всіх $n\neq 0$, математичне сподівання та кореляційна функція моделі (2) мають вигляд:

$$\mathrm{E}\xi(t)=m(t)=\sum_{k\in Z}m_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t},\quad m_k=a_k+\mathrm{E}\eta_k(t)=a_k+b_k,$$

$$b(t,u)=\sum_{l\in Z}D_{l,l}(u)e^{-il\frac{2\pi}{T}u}\equiv R_\eta(u)=B_0(u), \quad (3)$$

тобто кореляційна функція (3) адитивної моделі є кореляційною функцією стаціонарного випадкового процесу $\eta(t)$ і описується лише нульовим кореляційним компонентом розкладу в ряд Фур'є [2].

Вводячи представлення $\eta_l(t)=\frac{1}{2}\left[\eta_l^c(t)-i\eta_l^s(t)\right]$, автокореляційну функцію процесу $\eta_l(t)$ можна представити у вигляді

$$D_{l,l}(u)=\frac{1}{4}\left[D_{l,l}^{cc}(u)+D_{l,l}^{ss}(u)+i\left[D_{l,l}^{cs}(u)-D_{l,l}^{sc}(u)\right]\right].$$

Позначаючи через $P_{l,l}^{cs}(u)$ і $N_{l,l}^{cs}(u)$ - парну і непарну частину розкладу $D_{l,l}(u)$ і

$$\begin{cases}D_{l,l}^{cs}(u)=P_{l,l}^{cs}(u)+N_{l,l}^{cs}(u),\\ D_{l,l}^{sc}(u)=P_{l,l}^{cs}(u)-N_{l,l}^{cs}(u),\end{cases}$$

отримаємо наступну формулу для кореляційної функції адитивної моделі

$$B_0(u)=R_\eta(u)=\frac{1}{4}D_{00}^{cc}(u)+ + \sum_{l\in N}\left[D_{l,l}^{cc}(u)\cos l\omega_0 u+N_{l,l}^{cs}(u)\sin l\omega_0 u\right]. \quad (4)$$

Деталізація представлення (4) вже залежить від вигляду автокореляційних функцій $D_{l,l}(u)$.

1.2. Поклавши у формулі (1) $\xi_k = a_k \eta(t)$, отримаємо мультиплікативну модель:

$$\xi(t) = \eta(t)\sum_{k \in Z} a_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} = \eta(t) f(t). \qquad (5)$$

Математичне сподівання

$$E\xi(t) = m(t) = \sum_{k \in Z} m_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t}, \quad m_k = a_k E\eta(t).$$

Розглянемо кореляційну функцію моделі (5)

$$b(t,u) = E\,\overset{\circ}{\xi}(t)\,\overset{\circ}{\xi}(t+u) = f(t) f(t+u) R_\eta(u)$$

Представимо:

$$f(t)f(t+u) = \sum_{n \in Z} e^{in\frac{2\pi}{T}t}\left[\sum_{l \in Z} m_{l+n}\overline{m_l}\, e^{-il\frac{2\pi}{T}u}\right],$$

тоді кореляційні компоненти виглядатимуть так:

$$B_n(u) = R_\eta(u)\sum_{l \in Z} m_{n+l}\overline{m_l}\, e^{-il\frac{2\pi}{T}u}$$

Ввівши представлення

$$B_n(u) = \frac{1}{2}\left[B_n^c(u) - iB_n^s(u)\right], \quad B_0(u) = \frac{1}{2}B_0^c(u),$$

$$m_{n+l} = \frac{1}{2}\left[m_{n+l}^c - i m_{n+l}^s\right], \quad \overline{m_l} = \frac{1}{2}\left[m_l^c + i m_l^s\right], \quad m_0 = \frac{1}{2}m_0^c,$$

отримаємо

$$b(t,u) = B_0(u) + \sum_{n \in Z}\left[B_n^c(u)\cos n\omega_0 t + B_n^s(u)\sin n\omega_0 t\right],$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \qquad (6)$$

де кореляційні компоненти мають вигляд:

$$B_0(u) = 1/4\, R_\eta(u)\sum_{l \in Z}\left[\left(m_l^c\right)^2 + \left(m_l^s\right)^2\right]\cos l\omega_0 u =$$
$$= 1/2\, R_\eta(u)\left[m_0^2 + 1/2\sum_{l \in N}\left[\left(m_l^c\right)^2 + \left(m_l^s\right)^2\right]\cos l\omega_0 u\right]$$

$$B_n^c(u) = 1/2\, R_\eta(u)\sum_{l \in Z}\left[\left(m_{l+n}^c m_l^c + m_{l+n}^s m_l^s\right)\cos l\omega_0 u + \left(m_{l+n}^c m_l^s - m_{l+n}^s m_l^c\right)\sin l\omega_0 u\right],$$

$$B_n^s(u) = 1/2\, R_\eta(u)\sum_{l \in Z}\left[\left(m_{l+n}^s m_l^c - m_{l+n}^c m_l^s\right)\cos l\omega_0 u + \left(m_{l+n}^c m_l^c + m_{l+n}^s m_l^s\right)\sin l\omega_0 u\right].$$

Подальша деталізація кореляційної структури (6) мультиплікативної моделі залежить як від вигляду функції $f(t)$, так і від властивостей кореляційної функції $R_\eta(u)$ стаціонарного процесу $\eta(t)$ [3].

1.3. Розглянемо гармонічне коливання

$$\xi(t) = \eta(t)e^{i\omega_0 t} + \overline{\eta(t)}e^{-i\omega_0 t} \qquad (7)$$

яке має назву <u>квадратурної моделі.</u> Тут $\eta(t)$ - стаціонарний випадковий процес. Вираз (7) отримується із загального параметричного представлення (1), коли $k = -1, 1$, і може бути записаний в інакшому вигляді

$$\xi(t) = \xi^c(t)\cos\omega_0 t + \xi^s(t)\sin\omega_0 t.$$

Тоді

$$m(t) = E\xi(t) = E\xi^c(t)\cos\omega_0 t + E\xi^s(t)\sin\omega_0 t,$$

тобто математичне сподівання складається з компонент m_{-1} і m_1:

$$m_1 = \frac{1}{2}\left[m_1^c - i m_1^s\right] = \frac{1}{2}\left[E\xi^c(t) - iE\xi^s(t)\right], \quad m_{-1} = \overline{m_1}.$$

Кореляційні компоненти мають такий вигляд:

$$B_0(u) = 1/2\left[D_{cc}(u) + D_{ss}(u)\right]\cos\omega_0 u + 1/2\left[D_{cs}(u) - D_{sc}(u)\right]\sin\omega_0 u,$$

$$B_2^c(u) = 1/2\left[D_{cc}(u) - D_{ss}(u)\right]\cos\omega_0 u + 1/2\left[D_{cs}(u) + D_{sc}(u)\right]\sin\omega_0 u,$$

$$B_2^s(u) = 1/2\left[D_{ss}(u) - D_{cc}(u)\right]\sin\omega_0 u + 1/2\left[D_{cs}(u) + D_{sc}(u)\right]\cos\omega_0 u.$$

ВИСНОВКИ

Для наведених модельних представлень, як показник якості оцінювання розглядались відносне зміщення $\varepsilon\left[\hat{b}(t,u)\right]/\hat{b}(t,u)$ та відносна дисперсія $\sigma\left[\hat{b}(t,u)\right]/\hat{b}(t,u)$.

При наступних параметрах обробки: дисперсії D=1, декременту затухання α=0.1, періоду корельованості T=12 та довжини реалізації K=10000, отримані результати дозволяють рекомендувати вибір максимального зсуву для <u>адитивної моделі</u> таким, що не перевищує величини u=24 для K=1024 і u=35 для K=10000.

Розглянемо частковий випадок <u>мультиплікативної моделі,</u> коли відмінні від нуля лише $a_{-1} = a_1 = 1/2$, що відповідає випадку $f(t) = \cos\omega_0 t$. По результатах обчислень $\varepsilon\left[\hat{b}(t,u)\right]/\hat{b}(t,u)$, як і у випадку адитивної моделі, для отримання похибки до 100% можна рекомендувати для α=1, T=12 та K=10000 максимальний зсув вибирати $u_{\max} = 10$. При довжини реалізації K=1024, область достовірності для кореляційної функції скорочується до значення максимального зсуву, рівного $u_{\max} = 5$

Для квадратурної моделі потужність коливань кореляційної функції зі збільшенням зсуву згасає, проте швидкість заникання оцінки кореляційної функції на порядок вища, тому при вище вказаних параметрах обробки, 100%-на похибка результату досягається при значенні зсуву $u_{\max} = 8$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Драган Я. П. *О представлении периодически коррелированного случайного процесса через стационарные компоненты//* Отбор и передача информации.- 1975.- №45.- С.7-20.
2. Яворский И.Н. *Компонентные оценки вероятностных характеристик периодически коррелированных случайных процессов//* Автоматика. - 1986. - №4. - С.44-48.
3. Ісаєв І.Ю., Яворський І.М. *Аналіз властивостей оцінок характеристик періодично корельованих випадкових процесів з використанням їх параметричних зображень //* Відбір і передача інформації. - 1997. - №2. - С.24-28.