

# Стохастична параметрична структура компонентних оцінок кореляційних характеристик періодично корельованих випадкових процесів

Ісаєв І.Ю., Яворський І.М.

Фізико-механічний інститут ім.Г.В.Карпенка НАН України

Україна, 290601, м.Львів, вул.Наукова,5

Тел.: (0322) 633-355, Факс: (0322) 649-427

Електронна пошта: iavor@ah.ipm.lviv.ua

Побудова параметричних моделей періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) базується на їх представленні у вигляді стаціонарних стаціонарно зв'язаних процесів. Надаючи стаціонарним процесам, що формують ПКВП, різного вигляду, отримуються часткові параметричні моделі. В доповіді розглянуто кореляційні властивості найбільш поширених параметричних моделей ПКВП - адитивної, мультиплікативної та квадратурної. На основі компонентного методу оцінювання характеристик другого порядку ПКВП, досліджено показники якості для наведених моделей. На основі проведених досліджень запропоновано рекомендації по вибору основних параметрів обробки - залежності точки усічення корелограми від довжини реалізації. Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів з результатами оцінювання за когерентним методом.

## ВСТУП

Аналіз оцінок імовірнісних характеристик на основі параметричних зображень має за мету знаходження показників якості статистичної обробки рядів, що описуються певними параметричними моделями. Більшість стохастичних процесів можна спробувати класифікувати за властивостями математичного сподівання, кореляційної функції або спектральної густини, а також їх компонентів. Модель коливань у вигляді ПКВП дозволяє поєднати стаціонарний підхід до опису природніх явищ з підходом, що базується на використанні детермінованих функцій. Дослідження властивостей фізичного сигналу необхідно починати з віднесення його до певного параметричного класу. Перехід до модельного параметричного опису сигналів здійснюється на основі представлення ПКВП через стаціонарні стаціонарно пов'язані компоненти [1]

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(t) e^{ik \frac{2\pi}{T} t} \quad (1)$$

Накладаючи певні умови на вигляд стаціонарних процесів  $\xi_k(t)$ , отримуються часткові моделі ПКВП.

## 1. Стохастична параметрична структура ПКВП

1.1. Якщо покласти  $\xi_k(t) = a_k + \eta_k(t)$ , де  $a_k = const$ ,  $\eta_k(t)$  - некорельовані стаціонарні процеси, то отримаємо адитивну модель

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik \frac{2\pi}{T} t} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k(t) e^{ik \frac{2\pi}{T} t} = f(t) + \eta(t) \quad (2)$$

В силу некорельованості  $\eta_k(t)$  для всіх  $n \neq 0$ , математичне сподівання та кореляційна функція моделі (2) мають вигляд:

$$E\xi(t) = m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k e^{ik \frac{2\pi}{T} t}, \quad m_k = a_k + E\eta_k(t) = a_k + b_k,$$

$$b(t, u) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} D_{l,l}(u) e^{-il \frac{2\pi}{T} u} \equiv R_\eta(u) = B_0(u), \quad (3)$$

тобто кореляційна функція (3) адитивної моделі є кореляційною функцією стаціонарного випадкового процесу  $\eta(t)$  і описується лише нульовим кореляційним компонентом розкладу в ряд Фур'є [2].

Вводячи представлення  $\eta_l(t) = \frac{1}{2} [\eta_l^c(t) - i\eta_l^s(t)]$ , автокореляційну функцію процесу  $\eta_l(t)$  можна представити у вигляді

$$D_{l,l}(u) = \frac{1}{4} [D_{l,l}^{cc}(u) + D_{l,l}^{ss}(u) + i[D_{l,l}^{cs}(u) - D_{l,l}^{sc}(u)]]$$

Позначаючи через  $P_{l,l}^{cs}(u)$  і  $N_{l,l}^{cs}(u)$  - парну і непарну частину розкладу  $D_{l,l}(u)$  і

$$\begin{cases} D_{l,l}^{cs}(u) = P_{l,l}^{cs}(u) + N_{l,l}^{cs}(u), \\ D_{l,l}^{sc}(u) = P_{l,l}^{cs}(u) - N_{l,l}^{cs}(u), \end{cases}$$

отримаємо наступну формулу для кореляційної функції адитивної моделі

$$B_0(u) = R_\eta(u) = \frac{1}{4} D_{00}^{cc}(u) + \sum_{l \in \mathbb{N}} [D_{l,l}^{cc}(u) \cos l\omega_0 u + N_{l,l}^{cs}(u) \sin l\omega_0 u] \quad (4)$$

Деталізація представлення (4) вже залежить від вигляду автокореляційних функцій  $D_{l,l}(u)$ .



1.2. Поклавши у формулі (1)  $\xi_k = a_k \eta(t)$ , отримаємо мультиплікативну модель:

$$\xi(t) = \eta(t) \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik \frac{2\pi}{T} t} = \eta(t) f(t). \quad (5)$$

Математичне сподівання

$$E\xi(t) = m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k e^{ik \frac{2\pi}{T} t}, \quad m_k = a_k E\eta(t).$$

Розглянемо кореляційну функцію моделі (5)

$$b(t, u) = E \xi(t) \xi(t+u) = f(t) f(t+u) R_\eta(u)$$

Представимо:

$$f(t) f(t+u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in \frac{2\pi}{T} t} \left[ \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_{l+n} \overline{m_l} e^{-il \frac{2\pi}{T} u} \right],$$

тоді кореляційні компоненти виглядатимуть так:

$$B_n(u) = R_\eta(u) \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_{n+l} \overline{m_l} e^{-il \frac{2\pi}{T} u}.$$

Ввівши представлення

$$B_n(u) = \frac{1}{2} [B_n^c(u) - iB_n^s(u)], \quad B_0(u) = \frac{1}{2} B_0^c(u),$$

$$m_{n+l} = \frac{1}{2} [m_{n+l}^c - im_{n+l}^s], \quad \overline{m_l} = \frac{1}{2} [m_l^c + im_l^s], \quad m_0 = \frac{1}{2} m_0^c,$$

отримаємо

$$b(t, u) = B_0(u) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} [B_n^c(u) \cos n\omega_0 t + B_n^s(u) \sin n\omega_0 t], \quad (6)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

де кореляційні компоненти мають вигляд:

$$B_0(u) = 1/4 R_\eta(u) \sum_{l \in \mathbb{Z}} [(m_l^c)^2 + (m_l^s)^2] \cos l\omega_0 u =$$

$$= 1/2 R_\eta(u) \left[ m_0^2 + 1/2 \sum_{l \in \mathbb{N}} [(m_l^c)^2 + (m_l^s)^2] \cos l\omega_0 u \right]$$

$$B_n^c(u) = 1/2 R_\eta(u) \sum_{l \in \mathbb{Z}} [(m_{l+n}^c m_l^c + m_{l+n}^s m_l^s) \cos l\omega_0 u + (m_{l+n}^c m_l^s - m_{l+n}^s m_l^c) \sin l\omega_0 u],$$

$$B_n^s(u) = 1/2 R_\eta(u) \sum_{l \in \mathbb{Z}} [(m_{l+n}^s m_l^c - m_{l+n}^c m_l^s) \cos l\omega_0 u + (m_{l+n}^c m_l^c + m_{l+n}^s m_l^s) \sin l\omega_0 u].$$

Подальша деталізація кореляційної структури (6) мультиплікативної моделі залежить як від вигляду функції  $f(t)$ , так і від властивостей кореляційної функції  $R_\eta(u)$  стаціонарного процесу  $\eta(t)$  [3].

1.3. Розглянемо гармонічне коливання

$$\xi(t) = \eta(t) e^{i\omega_0 t} + \overline{\eta(t)} e^{-i\omega_0 t}, \quad (7)$$

яке має назву квадратурної моделі. Тут  $\eta(t)$  - стаціонарний випадковий процес. Вираз (7) отримується із загального параметричного представлення (1), коли  $k = -1, 1$ , і може бути записаний в іншому вигляді

$$\xi(t) = \xi^c(t) \cos \omega_0 t + \xi^s(t) \sin \omega_0 t.$$

Тоді

$$m(t) = E\xi(t) = E\xi^c(t) \cos \omega_0 t + E\xi^s(t) \sin \omega_0 t,$$

тобто математичне сподівання складається з компонент  $m_{-1}$  і  $m_1$ :

$$m_1 = \frac{1}{2} [m_1^c - im_1^s] = \frac{1}{2} [E\xi^c(t) - iE\xi^s(t)], \quad m_{-1} = \overline{m_1}.$$

Кореляційні компоненти мають такий вигляд:

$$B_0(u) = 1/2 [D_{cc}(u) + D_{ss}(u)] \cos \omega_0 u + 1/2 [D_{cs}(u) - D_{sc}(u)] \sin \omega_0 u,$$

$$B_2^c(u) = 1/2 [D_{cc}(u) - D_{ss}(u)] \cos \omega_0 u + 1/2 [D_{cs}(u) + D_{sc}(u)] \sin \omega_0 u,$$

$$B_2^s(u) = 1/2 [D_{ss}(u) - D_{cc}(u)] \sin \omega_0 u + 1/2 [D_{cs}(u) + D_{sc}(u)] \cos \omega_0 u.$$

## ВИСНОВКИ

Для наведених модельних представлень, як показник якості оцінювання розглядалися відносне зміщення  $\varepsilon[b(t, u)]/b(t, u)$  та відносна дисперсія  $\sigma[b(t, u)]/b(t, u)$ .

При наступних параметрах обробки: дисперсії  $D=1$ , декременту затухання  $\alpha=0.1$ , періоду корельованості  $T=12$  та довжини реалізації  $K=10000$ , отримані результати дозволяють рекомендувати вибір максимального зсуву для адитивної моделі таким, що не перевищує величини  $u=24$  для  $K=1024$  і  $u=35$  для  $K=10000$ .

Розглянемо частковий випадок мультиплікативної моделі, коли відмінні від нуля лише  $a_{-1} = a_1 = 1/2$ , що відповідає випадку  $f(t) = \cos \omega_0 t$ . По результатах обчислень  $\varepsilon[b(t, u)]/b(t, u)$ , як і у випадку адитивної моделі, для отримання похибки до 100% можна рекомендувати для  $\alpha=1$ ,  $T=12$  та  $K=10000$  максимальний зсув вибирати  $u_{\max} = 10$ . При довжини реалізації  $K=1024$ , область достовірності для кореляційної функції скорочується до значення максимального зсуву, рівного  $u_{\max} = 5$ .

Для квадратурної моделі потужність коливань кореляційної функції зі збільшенням зсуву згасає, проте швидкість зникання оцінки кореляційної функції на порядок вища, тому при вище вказаних параметрах обробки, 100%-на похибка результату досягається при значенні зсуву  $u_{\max} = 8$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Драган Я. П. *О представлении периодически коррелированного случайного процесса через стационарные компоненты* // Отбор и передача информации. - 1975. - №45. - С.7-20.
2. Яворский И.Н. *Компонентные оценки вероятностных характеристик периодически коррелированных случайных процессов* // Автоматика. - 1986. - №4. - С.44-48.
3. Ісаєв І.Ю., Яворський І.М. *Аналіз властивостей оцінок характеристик періодично корельованих випадкових процесів з використанням їх параметричних зображень* // Відбір і передача інформації. - 1997. - №2. - С.24-28.



# узагальнені кон'юнктивні перетворення дискретних сигналів та їх застосування

мич і.А., трофимлюк о.т.

ужгородський державний університет

Вводяться в розгляд так звані узагальнені кон'юнктивні перетворення дискретних сигналів, розглядаються основні властивості цих перетворень, а також деякі з можливих їх застосувань в теорії булевих функцій.

Нехай  $Z_2 = \{0,1\}$ ,  $Z_2^n = \{\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in Z_2\}$  - множина  $n$ -місних булевих векторів.

Елементарною кон'юнкцією, утвореною із булевих змінних  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , будемо за означенням називати вираз

$$R_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} = (X_1)^{\alpha_1} (X_2)^{\alpha_2} \dots (X_n)^{\alpha_n} \beta_n$$

де  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in Z_2^n$ , а

$$X^\delta = \begin{cases} \bar{X}, & \text{якщо } \delta = 0 \\ X, & \text{якщо } \delta = 1 \end{cases}$$

$$X^\delta = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \delta = 0 \\ X, & \text{якщо } \delta = 1 \end{cases}$$

Введемо в розгляд матриці

$$K_0 = \begin{bmatrix} 11 \\ 01 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad K_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Вектор  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in Z_2^n$  породжує матрицю  $K_{\tilde{\alpha}} = K_{\alpha_1} \otimes K_{\alpha_2} \otimes \dots \otimes K_{\alpha_n}$ , де  $\otimes$  - символ операції кронекерівського добутку матриць.

Матрицю  $K_{\tilde{\alpha}}$  будемо називати матрицею узагальненого кон'юнктивного перетворення дискретних сигналів з міткою  $\tilde{\alpha}$ .

Основні властивості матриці  $K_{\tilde{\alpha}}$ :

1.  $K_{\tilde{\alpha}}$  - невироджена матриця порядку  $2^n$ , причому  $\det K_{\tilde{\alpha}} = 1$ .
2.  $K_{\tilde{\alpha}}^{-1} = K_{\alpha_1}^{-1} \otimes K_{\alpha_2}^{-1} \otimes \dots \otimes K_{\alpha_n}^{-1}$
3. Над полем  $GF(2)$  матриця  $K_{\tilde{\alpha}}$  обернена сама собі.

4. В  $\delta$ -му стовпці матриці  $K_{\tilde{\alpha}}$  поміщені значення елементарної кон'юнкції  $R_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}}$  на елементах множини  $Z_2^n$ , де  $\delta \in \{0,1, \dots, 2^n - 1\}$  - номер булевого вектора  $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ ,  $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\delta} = \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\delta}$ ,  $\oplus$  - символ операції покомпонентного додавання булевих векторів по  $\text{mod } 2$ ,  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  і  $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  - булеві вектори

відповідно протилежні векторам  $\tilde{\alpha}$  і  $\tilde{\delta}$ .

5. Матриця  $K_{\tilde{\alpha}}$  задає бінарне відношення часткового порядку  $\prec_{\tilde{\alpha}}$  на множині  $Z_2^n$ . Вважаємо, що вектори  $\tilde{\beta}, \tilde{\delta} \in Z_2^n$  знаходяться у відношенні  $\tilde{\beta} \prec_{\tilde{\alpha}} \tilde{\delta}$  тоді, коли для всіх  $i = 1, 2, \dots, n$  виконуються умови:  $\beta_i \leq \delta_i$ , якщо  $\alpha_i = 1$  і  $\beta_i \geq \delta_i$ , якщо  $\alpha_i = 0$ .

Відношення попередника [2] на множині  $Z_2^n$

- це відношення  $\prec_{\tilde{\alpha}}$  для  $\tilde{\alpha} = (1, 1, \dots, 1)$ .

6. Матрицю  $K_{\tilde{\alpha}}$  можна представити у виді звичайного матричного добутку  $n$  слабозаповнених матриць  $F_n^{(0)}$  та  $F_n^{(1)}$  порядку  $2^n$ , де

$$F_n^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$F_n^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Матриця  $K_n$  кон'юнктивного перетворення дискретних сигналів [1] - це матриця  $K_{\tilde{\alpha}}$  для  $\tilde{\alpha} = (1, 1, \dots, 1)$ .

Якщо  $f = (f_0, f_1, \dots, f_{2^n-1})^T$  - дискретний сигнал, визначений на множині  $Z_2^n$ , тобто  $f_\delta = f(\tilde{\delta})$ , то матричний добуток  $K_{\tilde{\alpha}} f$  будемо називати узагальненим кон'юнктивним перетворенням сигналу  $f$  з міткою  $\tilde{\alpha}$ .

Обчислення  $K_{\tilde{\alpha}} f$  згідно формули  $K_{\tilde{\alpha}} f = F_n^{(\alpha_1)} (F_n^{(\alpha_2)} \dots (F_n^{(\alpha_n)} f) \dots)$  (1) називається швидким узагальненим кон'юнктивним перетворенням  $f$  з міткою  $\tilde{\alpha}$ .

Формальний вираз виду

$$\sum_{\delta=0}^{2^n-1} \oplus b_\delta \otimes R_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\delta}} \quad (2)$$

де  $\oplus, \otimes$  - відповідно символи операцій додавання і множення по mod 2,  $b_\delta \in Z_2$ , будемо називати  $\tilde{\alpha}$ - канонічним поліномом, побудованим із змінних  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Поліном (2) називається  $\tilde{\alpha}$ - канонічним поліномом бульової функції  $f = (f_0, f_1, \dots, f_{2^n-1})^T$ , якщо він задає цю функцію.

На основі властивостей матриці  $K_{\tilde{\alpha}}$  вектор  $b = (b_0, b_1, \dots, b_{2^n-1})$  коефіцієнтів  $\tilde{\alpha}$ - канонічного поліному бульової функції  $f$  знаходиться із рівності

$$b = K_{\tilde{\alpha}} \otimes f \quad (3)$$

Аналогічно означенню монотонної бульової функції [2], бульову функцію  $f = (f_0, f_1, \dots, f_{i-1})^T$  будемо називати  $\tilde{\alpha}$  - монотонною, якщо для довільних

$\tilde{\beta}, \tilde{\delta} \in Z_2^n$ , таких що  $\tilde{\beta} \prec_{\tilde{\alpha}} \tilde{\delta}$  виконується умова  $f(\tilde{\beta}) \leq f(\tilde{\delta})$ .

Для бульової функції  $f = (f_1, f_2, \dots, f_{2^n-1})^T$  побудуємо вектор  $(K_{\tilde{\alpha}} f) \circ ((K_{\tilde{\alpha}}^{-1})^T f)$ , де  $\circ$  - символ операції покомпонентного добутку векторів,

**Теорема 1.** Бульова функція  $f = (f_1, f_2, \dots, f_{2^n-1})^T \in \tilde{\alpha}$  - монотонною тоді і тільки тоді, коли  $\alpha$ -ва компонента вектора

$$(K_{\tilde{\alpha}} f) \circ ((K_{\tilde{\alpha}}^{-1})^T f) \quad (4)$$

дорівнює нормі Хемінга функції  $f$ , а всі інші компоненти цього вектора дорівнюють 0.

Розглянемо  $\tilde{\alpha}$  - канонічний поліном, який задовільняє умову  $a_0 = 0$  і виконаємо в (2) формальну заміну символу  $\oplus$  на символ  $\vee$ . Отримаємо деяку ДНФ, побудовану із бульових змінних  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , яку будемо називати  $\tilde{\alpha}$  - поліноміальною ДНФ.

Побудована на основі  $\tilde{\alpha}$  - канонічного поліному бульової функції  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$   $\tilde{\alpha}$  - поліноміальна ДНФ не завжди є ДНФ цієї функції.

**Теорема 2[3].** Побудована на основі  $\tilde{\alpha}$  - канонічного поліному бульової функції  $f$   $\tilde{\alpha}$  - поліноміальна ДНФ, тоді і тільки тоді є ДНФ цієї функції, коли функція  $f \in \tilde{\alpha}$  - монотонною.

В  $\tilde{\alpha}$  - поліноміальну ДНФ кожна змінна  $X_i$  входить лише з запереченням або лише без заперечення. Тому, виконавши в  $\tilde{\alpha}$  - поліноміальній ДНФ бульової функції  $f$  всі елементарні поглинання [2], отримуємо скорочену ДНФ цієї функції.

**Теорема 3[3].** Скорочена ДНФ  $\tilde{\alpha}$ -монотонної бульової функції є єдиною мінімальною ДНФ цієї функції.

#### Література

1. Айзенберг Н.Н., Трофимлюк О.Т. Кон'юнктивне преобразование дискретных сигналов и их применение для отыскания тестов и распознавания монотонности функций алгебры логики. Кибернетика, 1981, №5, с.138-139.
2. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т-1. - М.: Наука, 1974, 111с.
3. Трофимлюк О.Т., Мич І.А. Однорідні та  $\tilde{\alpha}$  - монотонні бульові функції. - Науковий вісник Ужгородського університету, серія математика, випуск 2, - Ужгород, 1997, с.108-113.



# МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ІЗ ЗАДАНИМИ КУМУЛЯНТНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ю.П.Кунченко, О.С.Гавриш, А.Ю.Іванченко, С.В.Заболотний

Інженерно-технологічний інститут, 257006, Черкаси, бул. Шевченка 460,  
тел.: (0472) 43-51-71, факс: (0472) 43-31-90, e-mail: postmaster@bee-pitron.cherkassy.ua

**Анотація.** У роботі розглядається можливість синтезу генераторів негауссівських випадкових величин з певними значеннями коефіцієнтів асиметрії та ексцесу. Запропоновані методи формування шуканої вибірки базуються на основі використання бігауссівської випадкової величини.

## ВСТУП

Проблема імітаційного моделювання є актуальною для різноманітних галузей статистичної обробки інформації. При цьому більшість існуючих методів орієнтовано на генерацію випадкових величин з певними законами розподілу ймовірностей.

Відзначимо, що при вирішенні більшості прикладних стохастичних задач, реальні завади апроксимуються нормальним законом розподілу ймовірностей. Такий підхід дозволяє значну частину досліджень здійснювати аналітичними методами, що суттєво підвищує їх ефективність [1]. Широке розповсюдження гауссівських законів розподілу спричинене саме простотою їхнього застосування, заради якого допускається деяке погіршення відповідності прийнятої моделі реальним процесам. Для зменшення цього протиріччя в даній роботі пропонується спосіб аналітичного опису емпіричних одновимірних щільності ймовірності за допомогою бігауссівської щільності розподілу. Такий розподіл володіє більшим числом параметрів порівняно із звичайним гауссівським законом, що дозволяє більш точно апроксимувати цією математичною моделлю реальні негауссівські завади

## 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

При моделюванні негауссівських випадкових величин одним із розповсюджених підходів є кусково-нормальна апроксимація щільності розподілу ймовірностей, що дозволяє варіювати гостровершинністю щільностей (змінювати коефіцієнт ексцесу), а також надавати їм властивість несиметричності (змінювати коефіцієнт асиметрії) [2]. Проте при застосуванні такого підходу необхідне розв'язання достатньо складних апроксимаційних задач.

Досить часто при дослідженні негауссівських випадкових величин зручним є їх опис не щільністю розподілу, а кінцевою послідовністю моментів чи кумулянтів [3]. Тому алгоритми, що

пропонуються, здатні формувати негауссівські випадкові величини з певними кумулянтними коефіцієнтами вищих порядків. Принцип цього формування полягає у пропорційному змішуванні вибіркового значень, що можуть генеруватися різноманітними стандартними генераторами з розрахунковими параметрами гауссівського розподілу ймовірностей.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо випадкову величину  $\xi$  яка має бігауссівську щільність розподілу

$$p(x/\xi) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\tau_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} + \frac{1-\delta}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\tau_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}, \quad (1)$$

де  $\delta$  - константа, яка приймає значення в інтервалі  $[0;1]$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\sigma_1^2$  і  $\sigma_2^2$  - параметри бігауссівської щільності розподілу.

Необхідно дослідити характер залежності величини кумулянтних коефіцієнтів від параметрів бігауссівського розподілу, а також встановити зв'язок між ними.

## 3. ОСНОВНІ РОЗРАХУНКОВІ ФОРМУЛИ

Легко показати, що перші чотири кумулянти випадкової величини з щільністю розподілу ймовірностей виду (1) в загальному випадку описуються виразами

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \delta\tau_1 + (1-\delta)\tau_2, \\ \chi_2 &= \delta(1-\delta)(\tau_1 - \tau_2)^2 + \delta\sigma_1^2 + (1-\delta)\sigma_2^2, \\ \chi_3 &= \delta(1-\delta)(1-2\delta)(\tau_1 - \tau_2)^3 + \\ &\quad + 3\delta(1-\delta)(\tau_1 - \tau_2)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2), \\ \chi_4 &= \delta(1-\delta)(1-6\delta+6\delta^2)(\tau_1 - \tau_2)^4 + \\ &\quad + 6\delta(1-\delta)(1-2\delta)(\tau_1 - \tau_2)^2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + \\ &\quad + 3\delta(1-\delta)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

З наведених співвідношень видно, що при  $\tau_1 = \tau_2$  і  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , при  $\delta = 0$  або  $\delta = 1$  щільність розподілу бігауссівської випадкової величини  $\xi$  стає гауссівською, а кумулянти вище 3-го порядку

стають рівними нулю.

З одержаних співвідношень також очевидно, що кумулянти, вище другого порядку, залежать не стільки від параметрів  $\tau_1$  та  $\tau_2$ , скільки від їхньої різниці  $\tau_1 - \tau_2$ , а починаючи з третього порядку залежать і від різниці параметрів  $\sigma_1^2 - \sigma_2^2$ . Отже можна зробити висновок, що бігауссівські випадкові величини, які мають однакову різницю параметрів  $\tau_1 - \tau_2$  і  $\sigma_1^2 - \sigma_2^2$ , описуються однаковою послідовністю кумулянтів вищих порядків.

#### 4. ОТРИМАНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для спрощення подальших розрахунків, непорушуючи загальних співвідношень, можемо прийняти  $\tau_2 = 0$  та  $\sigma_2 = 1$ . Тоді формули (2) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \delta\tau, & \chi_2 &= (1-\delta)(\delta\tau^2 + 1) + \delta\sigma^2, \\ \chi_3 &= \delta(1-\delta)(1-2\delta)\tau^3 + 3\delta\tau(1-\delta)(\sigma^2 - 1), \\ \chi_4 &= \delta(1-\delta)(1-6\delta+6\delta^2)\tau^4 + 6\delta\tau^2(1-\delta) \times \\ &\quad \times (1-2\delta)(\sigma^2 - 1) + 3\delta(1-\delta)(\sigma^2 - 1)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Зауважимо, що величину маточікування можна змінювати шляхом додавання певної константи до отримуваних вибірових значень. Таким чином, для формування випадкової величини з заданими кумулянтами ( $\chi_2$ ,  $\chi_3$  та  $\chi_4$ ), необхідно розв'язати систему з трьох нелінійних рівнянь з трьома невідомими ( $\tau$ ,  $\sigma$  та  $\delta$ ). Де значення параметра  $\delta$  вказує на пропорційність внеску вибірових значень, сформованих першим стандартним генератором нормальних випадкових величин в шукану вибірку.

На практиці, більш зручним є використання кумулянтних коефіцієнтів  $\gamma_i$ , які зв'язані з кумулянтами співвідношенням  $\gamma_i = \chi_i \chi_2^{-0.5i}$  [4].

Наведемо деякі графіки залежності кумулянтних коефіцієнтів  $\gamma_3$  та  $\gamma_4$  від параметрів  $\delta$ ,  $\tau$  і  $\sigma$ .

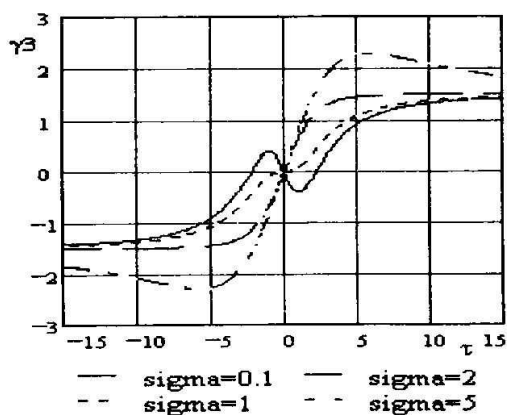


Рис.1 Графік залежності коефіцієнта асиметрії  $\gamma_3$  від параметра  $\tau$

На рис.1,2 зображені графіки залежностей кумулянтних коефіцієнтів  $\gamma_3$  і  $\gamma_4$  від параметру  $\tau$  при фіксованому параметрі  $\delta = 0.2$  і різних  $\sigma = 0.1, 1, 2, 5$ . З наведених графіків бачимо, що кумулянтний коефіцієнт  $\gamma_3$  є непарною функцією параметра  $\tau$ , а кумулянтний коефіцієнт  $\gamma_4$  - парною функцією.

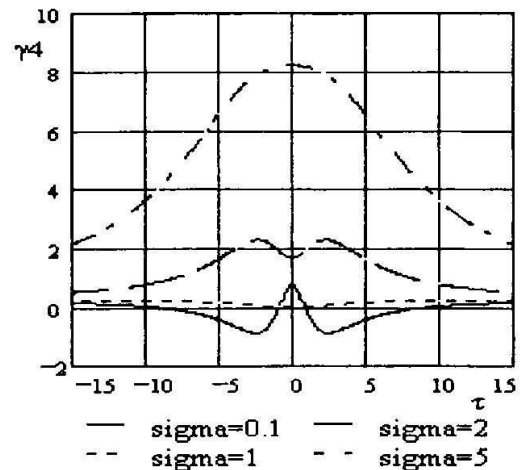


Рис.2 Графік залежності коефіцієнта ексцесу  $\gamma_4$  від параметра  $\tau$

#### ВИСНОВКИ

1. Процес формування вибірових значень негауссівської величини з шуканими кумулянтними коефіцієнтами відрізняється алгоритмічною та технічною простотою.
2. Діапазон варіювання величинами кумулянтних коефіцієнтів асиметрії та ексцесу може бути досить значним.
3. Метод формування негауссівських випадкових величин з заданими коефіцієнтами асиметрії та ексцесу можна розповсюдити і на кумулянти вищих порядків, використовуючи для цього полігауссівські випадкові величини.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Левин Б.Р. «Теоретические основы статистической радиотехники». -М.: Радио и связь, 1989.-656 с.
2. Штейнвольф А.Л. «Расчеты и имитация негауссовских случайных вибраций». - К.: Наукова думка, 1993. - 250 с.
3. Кунченко Ю.П., Лега Ю.Г. «Оценка параметров случайных величин методом максимизации полинома». -К.: Наукова думка, 1992.-180 с.
4. Малахов А.Н. «Кумулянтный анализ негауссовских случайных процессов и их преобразований». -М.: Сов. радио, 1978.-376с.



# Nonlinear adaptive filters for 1-D signal processing

Vladimir V. Lukin, Alexander A. Zelensky, Natalya O. Tulyakova, Sergey K. Abramov

Kharkov Aviation Institute, Department 507, 17 Chkalova Street,  
310070, Kharkov, Ukraine, tel/fax (0572) 441186,  
E-mail: lukin@xai.kharkov.ua

## Abstract

The novel nonlinear adaptive filters for processing the signals corrupted with noise with nonstationary characteristics are proposed and investigated. They are based on iterative procedure assuming preliminary filtering, Z-parameter calculation and analysis with further adaptive selection of nonlinear filter parameters for local processing of signals. It is shown that the proposed adaptive approach provides a good trade-off of filter properties: noise suppression and spike removal ability combined with edge preservation property and low level of residual dynamic errors.

## 1. INTRODUCTION

The sampled information processes or sequences of measurements  $U(t)$  observed and registered in practice are usually the nonstationary ones containing step and ramp edges and other kinds of fragments like extrema, constant level and increasing/decreasing parts, etc. Besides, the noise or the measurement errors can also have statistical characteristics varying in time i.e. be non-stationary and non-gaussian. In such conditions the known linear filters fail to perform well and only nonlinear filtering algorithms can be applied [1]. However, the selection of a proper nonlinear filter is a problem as well because its properties depend upon many factors: filter type and scanning window length. Moreover, the statistical and, especially dynamical properties of nonlinear filters are analysed not thoroughly enough and they often can not be described analytically [1,2]. This is the reason of problems arising in forecasting of the output signal behaviour in cases of nonlinear filter application to noisy signals. So, first, the analysis of several typical nonlinear filter dynamic and statistical characteristics is done. They are compared to the corresponding characteristics of mean filter for gaussian noise and the approximate dependences are obtained.

The nonstationary characteristics of noise and peculiar behaviour of information signal lead to expedience of adaptive nonlinear filtering. The basic idea is the local analysis of observed noise/signal mixture properties and respective selection of nonlinear filter type in order to ensure desired output characteristics. Several methods have been analysed and the corresponding recommendations concerning filter local selection have been put forward. The designed filters are, thus, locally-adaptive nonlinear ones. They are

based on Z-parameter and its modifications. The efficiency of proposed techniques and algorithms is confirmed by numerical simulation results.

## 2. SIGNAL/NOISE MODEL

The model of test signal  $S(t)$  included different fragments: constant level signal, increasing/decreasing parts, neighborhoods of extrema, step edge neighborhoods of these fragment junction. It is shown in Fig. 1,a. Every fragment contained 50 samples and it was possible to analyse the filter output characteristics separately for each fragment or to get integral characteristics for any part.

It was supposed that the noise may contain the additive (gaussian with zero mean and constant variance), multiplicative (with mean equal to unit and signal-dependent variance) and impulsive components. For this model the quantitative criterions both integral and local ones have been introduced.

## 3. NONLINEAR FILTER PROPERTY ANALYSIS

It was shown that for considered nonlinear filters (standard median, Wilcoxon, Hodges-Lehman and  $\alpha$ -trimmed ones) the generalized expressions for describing dynamical and statistical characteristics could be got and they are derived using the expressions for standard mean filter with the same scanning window length. In particular, the dynamic errors of filter outputs can be written as

$$\Delta^W \approx 0.9 \cdot \Delta^1, \Delta^H \approx 0.85 \cdot \Delta^1, \Delta^\alpha \approx 0.6 \cdot \Delta^1, \quad (1)$$

where  $\Delta^W$ ,  $\Delta^H$ ,  $\Delta^\alpha$ ,  $\Delta^1$  are the dynamical errors of Wilcoxon, Hodges-Lehman,  $\alpha$ -trimmed and mean filters, respectively.

The statistical characteristics of filter outputs can be approximately described in the following way

$$\sigma_w^2 \approx \sigma_H^2 \approx \frac{1.2\sigma_n^2}{N} = 1.2\sigma_1^2, \quad (2)$$

$$\sigma_\alpha^2 \approx \frac{1.35\sigma_n^2}{N} = 1.35\sigma_1^2, \quad (3)$$

where  $\sigma_w^2$ ,  $\sigma_H^2$ ,  $\sigma_\alpha^2$ ,  $\sigma_1^2$  are the output signal residual fluctuation variances for Wilcoxon, Hodges-Lehman,  $\alpha$ -trimmed and standard mean filters with equal scanning window sizes  $N$ , respectively.

The exceptional situation is the presence of spike in the scanning window current position. Its influence on



output signal statistical characteristics has been analysed numerically for different filter types, scanning window sizes, noise variances and kinds of signals (in particular, its slopes). It was shown that the minimal integral output errors in case of spikes are provided by standard median filter with small scanning window size. That is why it can be recommended to be used in spike neighborhoods for locally adaptive filters. However, even better decision is the detection of spikes and their elimination from further "consideration" before processing. The main drawback of the standard median filter is its very poor performance for rapidly increasing/decreasing fragments of signal [2].

#### 4. PROPOSED ADAPTIVE NONLINEAR FILTERS

The proposed adaptive filters assume the calculation of intermediate output using nonadaptive nonlinear filter (for example, the  $\alpha$ -trimmed one with middle size  $N_p$  of scanning window). Then one or two Z-parameters are to be derived as

$$Z_i = \frac{\sum_{j=i-\frac{N_p-1}{2}}^{i+\frac{N_p-1}{2}} (U_j^f - U_j)}{\sum_{j=i-\frac{N_p-1}{2}}^{i+\frac{N_p-1}{2}} |U_j^f - U_j|}, \quad (4)$$

$$Z_i^s = \sum_{j=i-\frac{N_p-1}{2}}^{i+\frac{N_p-1}{2}} \text{sign}(U_j^f - U_j) / N_p,$$

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \\ -1, & \text{if } x < 0, \end{cases} \quad (5)$$

where  $U_i^f$  denotes the preliminary filter output signal,  $U_i$  is the initial (input noisy signal),  $j$  and  $i$  are the indices.

The adaptive filtering can be performed on basis of separate and joint analysis of parameters  $Z$  and  $Z^s$ . Besides, it is possible to make smoothing of  $Z$ -parameter and its additional analysis using quasirange  $Q_Z$ . Thus, six variants of nonlinear adaptive filters was proposed and considered. It was shown that the addition of  $Q_Z$  analysis permits to detect edges while joint analysis of parameters  $Z$  and  $Z^s$  let to detect spikes. This "analysis" assumes the comparison of the current values of  $Z$ ,  $Z^s$  and  $Q_Z$  with predetermined thresholds and undertaking decision on filter type and parameter selection on basis of several unequations and decision strategy. The best numerical simulation results have been obtained for variant of adaptive filtering performing joint analysis of  $Z$ ,  $Z^s$  and  $Q_Z$ . For all considered variants of additive, multiplicative and impulsive noise characteristics it provided the best or very close to the best integral MSE in comparison to nonadaptive counterparts used as components of adaptive algorithm (standard median with  $N=5$  and  $\alpha$ -trimmed filters with  $N=9$  and  $13$ ). The numerical simulation results (Table data) for different

noise situations are presented in the report confirming this conclusion.

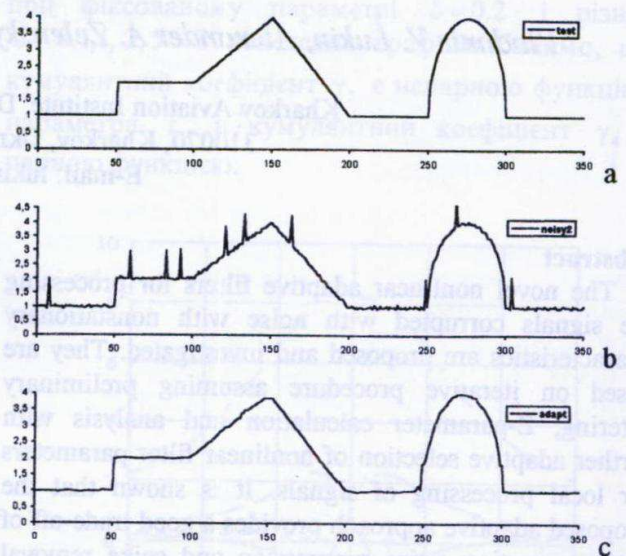


Fig.1. Simulation results: a) test signal, b) noisy test signal, c) result of processing by adaptive nonlinear filter

The simulations were performed for wide set of noise characteristics: additive noise variance was from 0.001 to 0.01, probability of spikes  $P$  varied from 0.0 to 0.03 and for multiplicative noise relative variance  $\sigma_\mu^2 = k_0(S(t))^2$  parameter  $k_0$  was within the limits [0.001;0.01]. For case presented in Fig.1 ( $P=0.02$ ,  $\sigma_a^2=0.001$ ,  $\sigma_\mu^2=k_0(S(t))^2$ ,  $k_0=0.001$ ) the MSE value for standard median filter 0.0031, for  $\alpha$ -trimmed ( $N=9$ ) we got  $MSE=0.0042$ , for  $\alpha$ -trimmed with  $N=13$   $MSE=0.0060$  and for the best adaptive filter it was 0.0023. Local parameters of adaptive filter performance can be a little bit worse than for the best component filter because of errors in "situation recognition" based on  $Z$ -parameter analysis.

#### CONCLUSIONS

It is shown that an adaptive approach and algorithms of nonlinear filtering based on  $Z$ -parameter and proposed iterative procedure are rather simple and effective for wide variety of practical situations when the statistical characteristics of noise and the properties of signals are a priori unknown or one has restricted information about them. Their main advantage is that they perform well for various types of fragments due to local adaptivity, thus ensuring both good integral and local characteristics (MSE and MAE).

#### REFERENCES

1. I. Pitas, A. N. Venetsanopoulos, "Nonlinear digital filters: Principles and Applications", Kluwer academic Publishers, 1990.
2. K. Willner, P. Kuosmanen, V. Lukin, A. Pogrebnik, "Nonlinear filters and rapidly increasing/decreasing signals corrupted with noise", CD-ROM Proceedings of NSIP Conference, Michigan, USA, Sept. 1997, 5 pages.