Сингулярні представлення матриць в застосуванні до задач розпізнавання образів

Кириченко М.Ф., Кривонос Ю.Г. (Київ, Україна)
(Інститут кібернетики НАН України, проспект Глушкова , 40, т/ф- 266-4118)

В доповіді на основі властивостей сингулярного представлення матриць та проекційних операторів [1],[2],[3] в скінченномірних просторах формулюється ефективний алгоритм класифікації об'єктів, який можна використовувати для розпізнання звукових, оптичних та іншого типу сигналів. Цей алгоритм був застосований Кириченком М.Ф., Куцом Р. та Лепехою М.П. до розпізнання ультразвукової інформації і дав якісні результати. Застосування формул сингулярного представлення матриць мало широке розповсюдження в дослідженнях по розпізнанню об'єктів з використанням розкладень Карунена-Лоєва. В даній роботі розвиваються нові оригінальні алгоритмичні засоби класифікації сигналів, які базуються на властивостях сингулярного представлення матриць та розроблені під впливом результатів по візуальному розпізнанню просторових об'єктів.

Приведемо основні математичні положення з теорії сингулярного представлення матриць [1],[2],[3] та витікаючий з них алгоритм класифікації.

Теорема 1. (сингулярне представлення матриць).

Кожна прямокутна матриця A розмірності $m \times n$ допускає сингулярне представлення в вигляді

$$A = \sum_{j=1}^{r} y_j x_j^T \lambda_j, \qquad (1)$$

де $r = rankA$, y_j - нормовані власні вектори матриці AA^T, тобто

$$AA^T y_j = y_j \lambda_j^2, y_i^T y_j = \delta_{ij}, j = \overline{1,r}, \qquad (2)$$

x_j - нормовані власні вектори матриці $A^T A$,тобто

$$A^T A x_j = x_j \lambda_j^2, x_i^T x_j = \delta_{ij}, j = \overline{1,r}. \qquad (2')$$

Доведення. Формули (1),(2),(2') представимо відповідно в такій матричній формі

$$A = Y\Lambda X^T, AA^T Y = Y\Lambda\Lambda^T, \quad A^T AX = X\Lambda^T\Lambda,$$

де $\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_r, 0, ..., 0)$ – матриця розмірності $m \times n$, а матриці Y і X такі, що

$$YY^T = I_m, XX^T = I_n,$$

тут I_m та I_n – відповідно m- і n-мірні одиничні матриці.

Побудуємо Y відповідно умовам

$$AA^T y_j = y_j \lambda_j^2, j = \overline{1,r}, AA^T y_s = 0, s = \overline{r+1,m}.$$

$$y_i^T y_j = \delta_{ij}, Y = (y_1 \vdots ... \vdots y_m).$$

Тоді

$$y_i^T AA^T y_j = \delta_{ij}\lambda_j^2, j = \overline{1,r}.$$

Введемо систему векторів

$x_j = \dfrac{1}{\lambda_j} A^T y_j, j = \overline{1,r},$ яку розширимо

векторами $x_s = \overline{r+1,n}$ до ортонормованої системи $x_k, k = \overline{1,n}$, тобто

$$X\Lambda^T = A^T Y$$

згідно побудови. Звідси витікає, що

$$A^T YY^T = X\Lambda^T Y^T.$$

Тоді

$$A^T = X\Lambda^T Y^T, A = Y\Lambda X^T,$$

при цьому

$$A^T AX = A^T Y\Lambda X^T X = A^T Y\Lambda = X\Lambda^T\Lambda.$$

Теорема 2.

Псевдообернена до A матриця A^+ має таке сингулярне представлення [1]:

$$A^+ = \sum_{j=1}^{r} x_j y_j^T \lambda_j^{-1}. \qquad (3)$$

Наслідок 1.

Проекція довільного вектора $b \in R^m$ на лінійну оболонку вектор-стовбців матриці A має вигляд

$$\Pr_{L(A)} b = \arg \min_{p \in L(A)} \|p - b\|^2 = AA^+ b = \sum_{j=1}^{r} y_j y_j^T b, \qquad (4)$$

де $L(A)=\{p: p=Ax, \forall x\in R^n\}\subset R^m$.

Нехай власні числа $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ упорядковані співвідношеннями

$$\lambda_{j+1}^2 \le \lambda_j^2,\ j=\overline{1,r-1}. \qquad (5)$$

Наслідок 2.

Вектор-стовбці матриці $A=(a_1\vdots\dots\vdots a_n)$ задовольняють умовам

$$\left\| a_s - \mathrm{Pr}_{L(Y_p)} a_s \right\| \le \sum_{j=p+1}^{r} |\lambda_j|, \qquad (6)$$

де $Y_p=(y_1\vdots\dots\vdots y_p)$ - матриця, утворена p першими власними векторами $y_1,\dots,y_p$, тобто

$$Y_p=(y_1\vdots\dots\vdots y_p). \qquad (7)$$

Доведення. Так як $A=\sum_{j=1}^{r} y_j x_j^T \lambda_j$, то

$a_s=\sum_{j=1}^{r} y_j x_{js}\lambda_j$, де $x_j^T=(x_{j1}\vdots\dots\vdots x_{jn})$, і, як наслідок, мають місце співвідношення

$$a_s=\sum_{j=1}^{r} y_j y_j^T a_s=\sum_{j=1}^{p} y_j y_j^T a_s+\sum_{j=p+1}^{r} y_j y_j^T a_s=$$

$$=\sum_{j=1}^{p} y_j y_j^T a_s+\sum_{j=p+1}^{r} y_j x_{js}\lambda_j,$$

$$\left\| a_s-\sum_{j=1}^{p} y_j y_j^T a_s \right\| = \left\| \sum_{j=p+1}^{r} y_j x_{js}\lambda_j \right\| \le$$

$$\le \sum_{j=p+1}^{r} |\lambda_j| \left\| y_j \right\| |x_{js}| \le \sum_{j=p+1}^{r} |\lambda_j|$$

що і доводить даний наслідок.

Вважатимемо, що маємо в деякому m-мірному просторі признаків деякі кількості $N_1,\dots,N_M$ зображень відповідно для кожного з M різних об'єктів, тобто, послідовність, що навчає:

$a(1,1),\dots,a(1,N_1)$ – по 1-ому об'єкту, ...

$a(M,1),\dots,a(M,N_M)$ – по M - ому об'єкту,

Побудова алгоритма класифікації. Алгоритм класифікації базується на вище наведених результатах:

1. Визначається для кожного об'єкта його центр в просторі зображень

$$\bar{a}(j)=\frac{1}{N_j}\sum_{i=1}^{N_j} a(j,i),\ j=\overline{1,M}. \qquad (8)$$

2. Здійснюється центрування зображень

$$\tilde{a}(j,i)=a(j,i)-\bar{a}_j,\ i=\overline{1,N_j},\ j=\overline{1,M}. \qquad (9)$$

3. Для матриць

$$A(j)=(a(j,1)\vdots\dots\vdots a(j,N_j)),\ j=\overline{1,M} \qquad (10)$$

находяться власні вектори $y_1(j),\dots,y_{r_j}(j)$ та власні значення $\lambda_1(j),\dots,\lambda_{r_j}(j)$..

4. Визначається таке k, щоб для кожного $s\in\{s: s=\overline{1,M}\}$ мала місце умова

$$\left\| a-\bar{a}(s)-\sum_{i=1}^{k} y_i(s) y_i^T(s)(a-\bar{a}(s)) \right\| > \sum_{i=k+1}^{r_s} |\lambda_i(s)|,$$

$$\forall\, a\in \bigcup_{\substack{j=\overline{1,M}\\ j\ne s}} \mathrm{P}_j, \qquad (11)$$

$$\mathrm{P}_j=\{a: a=a(j,i),\ i=\overline{1,N_j}\}. \qquad (12)$$

5. Тоді можна сформулювати таке правило класифікації:

для невідомого об'єкта a, що належить одному з множин P_j $j=\overline{1,M}$:

$$a\in \bigcup_{j=\overline{1,M}} \mathrm{P}_j, \qquad (13)$$

здійснити класифікацію можна згідно такому правилу

$$s_0=\arg\min_{s=\overline{1,M}} \left\| \left(I_m-\sum_{i=1}^{k} y(s)y^T(s)\right)\left(a-\bar{a}(s)\right) \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\in \mathrm{P}_{s_0}. \qquad (14)$$

З наслідка 2 очевидно, що правило (14) здійснює класифікацію об'єкта, що задовольняє умові (13), безпомилкове.

Приведена вище математична технологія класифікації в даний час розвивається з метою розпізнавання рукописної та сонарної інформації, а також є перспективною при застосуванні до розв'язання задач прогнозу і розпізнавання екологічних, фінансових та соціальних ситуацій

ЛІТЕРАТУРА.

1. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинні методи математичних обчислень. - М.: - Мир. - 1980. - 280 с.

2.Гантмахер Ф.Р. Теорія матриць. - М.: - Наука. - 1967. - 287 с.

3.Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П. Псевдообернення в задачах управління та спостереження //Автоматика. – 1993. - №5. - С.69-81.